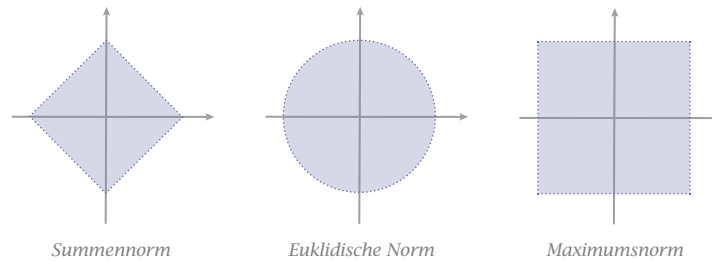


Abb 2 Einheitskugeln bezüglich verschiedener Normen



■ Skalarprodukte

Um auch den euklidischen Abstand als Norm zu erkennen, benötigen wir noch das Konzept des *Skalarproduktes*.

Definition Ein *Skalarprodukt* auf einem reellen Vektorraum E ist eine Funktion

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$$

mit folgenden Eigenschaften:

(S-1) **Definitheit:** $\langle x, x \rangle \geq 0$, und $\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$,

(S-2) **Symmetrie:** $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$,

(S-3) **Linearität:** $\langle \lambda x + \mu y, z \rangle = \lambda \langle x, z \rangle + \mu \langle y, z \rangle$,

für alle $x, y, z \in E$ und $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. ✕

Wegen der Symmetrie ist ein reelles Skalarprodukt auch linear im zweiten Argument, also

$$\langle x, \lambda y + \mu z \rangle = \lambda \langle x, y \rangle + \mu \langle x, z \rangle.$$

Man spricht daher auch von einer *bilinearen Form* auf E . Für diese gilt übrigens $\langle x, 0 \rangle = 0$ für alle $x \in E$.

Für Skalarprodukte gilt folgende grundlegende Ungleichung, die man meist nur *Schwarzsche Ungleichung* nennt.

32 **Cauchy-Schwarz-Bunjakowskische Ungleichung** Für ein Skalarprodukt auf einem reellen Vektorraum E gilt

$$\langle x, y \rangle^2 \leq \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle, \quad x, y \in E.$$

Gleichheit gilt dabei genau dann, wenn x und y linear abhängig sind. ✕

⟨⟨⟨⟨ Für jedes Skalarprodukt und jede reelle Zahl λ gilt

$$0 \leq \langle x + \lambda y, x + \lambda y \rangle = \langle x, x \rangle + 2\lambda \langle x, y \rangle + \lambda^2 \langle y, y \rangle.$$

Da die Behauptung offensichtlich für $y = 0$ gilt, dürfen wir $y \neq 0$ annehmen. Dann ist $\langle y, y \rangle > 0$, und wir können

$$\lambda = -\frac{\langle x, y \rangle}{\langle y, y \rangle}$$

wählen. Einsetzen in die vorangehende Ungleichung ergibt

$$0 \leq \langle x, x \rangle - 2\frac{\langle x, y \rangle^2}{\langle y, y \rangle} + \frac{\langle x, y \rangle^2}{\langle y, y \rangle} = \langle x, x \rangle - \frac{\langle x, y \rangle^2}{\langle y, y \rangle},$$

und Multiplikation mit $\langle y, y \rangle > 0$ ergibt die Behauptung

$$0 \leq \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle - \langle x, y \rangle^2.$$

Angenommen, es gilt sogar Gleichheit. Ist $y = 0$, so sind x und y ohnehin linear abhängig. Ist dagegen $y \neq 0$, so ergibt dieselbe Wahl von λ und dieselbe Rechnung in umgekehrter Richtung die Identität

$$\langle x + \lambda y, x + \lambda y \rangle = 0,$$

also $x + \lambda y = 0$. Somit sind x und y linear abhängig. ⟩⟩⟩⟩

33 Satz Ist $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ein Skalarprodukt auf einem Vektorraum E , so definiert

$$\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

eine Norm auf E . ✕

⟨⟨⟨⟨ Definitheit ist leicht zu verifizieren. Positive Homogenität folgt mit

$$\|\lambda x\| = \sqrt{\langle \lambda x, \lambda x \rangle} = \sqrt{\lambda^2 \langle x, x \rangle} = |\lambda| \sqrt{\langle x, x \rangle} = |\lambda| \|x\|.$$

Ferner ist aufgrund der Cauchyungleichung

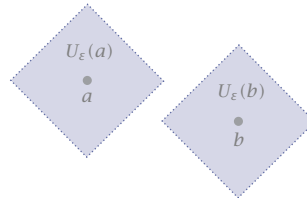
$$|\langle x, y \rangle| \leq \sqrt{\langle x, x \rangle} \sqrt{\langle y, y \rangle} = \|x\| \|y\|.$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 &= \langle x + y, x + y \rangle \\ &= \langle x, x \rangle + 2 \langle x, y \rangle + \langle y, y \rangle \\ &\leq \|x\|^2 + 2 \|x\| \|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2. \end{aligned}$$

Wurzelziehen ergibt die Dreiecksungleichung. ⟩⟩⟩⟩

Abb 3
Trennende Umgebungen
 $U_\varepsilon(a)$ und $U_\varepsilon(b)$



► Das *Standardskalarprodukt* auf dem \mathbb{R}^n ist

$$\langle x, y \rangle := \sum_{k=1}^n x_k y_k = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n.$$

Somit ist $\langle x, x \rangle = |x_1|^2 + \dots + |x_n|^2$, und die hiervon induzierte Norm ist die *euklidische Norm* $\|\cdot\|_2$, die hiermit ³³ auch tatsächlich als *Norm* erkannt ist. ◀

Bemerkung Nicht jede Norm wird durch ein Skalarprodukt gegeben. Dies ist nur dann der Fall, wenn die *Parallelogrammgleichung*

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$$

erfüllt ist ^{A-37}. ◊

Wir haben damit erste Beispiele von normierten Räumen. Viele weitere werden folgen. Eine zentrale Rolle spielen sie zum Beispiel in der Funktionalanalysis, wo man verschiedenste Räume von Funktionen und Abbildungen studiert.

■ Umgebungen

Um Konvergenz für Folgen in einem normierten Vektorraum E zu definieren, genügt es nun, den Begriff der Umgebung entsprechend zu verallgemeinern. Die *ε -Umgebungen* eines Punktes a sind hier die Mengen

$$U_\varepsilon(a) := \{x \in E : \|x - a\| < \varepsilon\}.$$

Sie werden auch *offene ε -Kugeln* um a genannt und mit $B_\varepsilon(a)$ bezeichnet.

Allerdings sehen diese Kugeln nur im Fall der euklidischen Norm wie handelsübliche Kugeln aus – siehe Abbildung 2. Dies ist jedoch für mathematische Zwecke unwesentlich. Wichtig ist, dass es um zwei verschiedene Punkte eines normierten Raumes immer ε -Umgebungen gibt, die *disjunkt* sind. Man sagt, man kann verschiedene Punkte durch offene Umgebungen *trennen*.

34 **Trennungseigenschaft** Zu je zwei Punkten $a \neq b$ eines normierten Raumes gibt es immer ein $\varepsilon > 0$ derart, dass

$$U_\varepsilon(a) \cap U_\varepsilon(b) = \emptyset. \quad \times$$

⟨⟨⟨ Man nehme $\varepsilon = \|b - a\| / 2 > 0$ und führe die Annahme, dass die entsprechenden Umgebungen einen Punkt gemeinsam haben, zum Widerspruch. ⟩⟩⟩

■ Konvergenz

Die Definition einer konvergenten Folge und ihres Grenzwertes in einem normierten Raum ist nun *wörtlich* dieselbe wie im reellen Fall ²⁴.

Definition und Satz Eine Folge (a_n) in einem normierten Raum E heißt *konvergent* mit Grenzwert a , falls jede ε -Umgebung von a fast alle Folgenglieder enthält. Dieser Grenzwert a ist eindeutig bestimmt. ✕

⟨⟨⟨ Zu jedem $b \neq a$ existiert aufgrund des Trennungssatzes ³⁴ ein $\varepsilon > 0$, so dass die ε -Umgebungen um a und b disjunkt sind. Da fast alle Folgenglieder in $U_\varepsilon(a)$ liegen, können nur noch höchstens endlich viele in $U_\varepsilon(b)$ liegen. Also kann b kein Grenzwert der Folge sein. ⟩⟩⟩

35 Notiz In einem normierten Raum konvergiert eine Folge (a_n) genau dann gegen den Punkt a , wenn $(\|a_n - a\|)$ eine reelle Nullfolge bildet. ✕

⟨⟨⟨ Dies ergibt sich aus

$$a_n \in U_\varepsilon(a) \Leftrightarrow \|a_n - a\| < \varepsilon \Leftrightarrow \|a_n - a\| \in U_\varepsilon(0),$$

wobei $U_\varepsilon(0)$ die ε -Umgebung von $0 \in \mathbb{R}$ meint. ⟩⟩⟩

■ Grenzwertsätze

Auch die Grenzwertsätze verallgemeinern sich von reellen Folgen direkt auf Folgen in normierten Räumen. Wir fassen uns daher kurz.

36 Satz Gilt $a_n \rightarrow a$ in einem normierten Vektorraum E , so gilt auch

$$\|a_n\| \rightarrow \|a\|$$

in \mathbb{R} . Jede konvergente Folge ist daher auch *beschränkt* – das heißt, es gibt ein $M \geq 0$, so dass $\|a_n\| \leq M$ für alle n . ✕

⟨⟨⟨ Wegen der umgekehrten Dreiecksungleichung gilt

$$|\|a_n\| - \|a\|| \leq \|a_n - a\| \rightarrow 0.$$

Also konvergiert $(\|a_n\|)$ gegen $\|a\|$. Insbesondere ist diese Folge beschränkt. ⟩⟩⟩

- 37 **Grenzwertgleichung für Linearkombinationen** Sind (a_n) und (b_n) zwei konvergente Folgen in einem normierten Vektorraum, so ist auch jede Linearkombination $(\lambda a_n + \mu b_n)$ konvergent, und es gilt

$$\lim (\lambda a_n + \mu b_n) = \lambda \lim a_n + \mu \lim b_n. \quad \times$$

⟨⟨⟨ Mit $a = \lim a_n$ und $b = \lim b_n$ ist

$$\begin{aligned} \|(\lambda a_n + \mu b_n) - (\lambda a + \mu b)\| &= \|\lambda(a_n - a) - \mu(b_n - b)\| \\ &\leq |\lambda| \|a_n - a\| + |\mu| \|b_n - b\|. \end{aligned}$$

Wegen $a_n \rightarrow a$ und $b_n \rightarrow b$ steht auf der rechten Seite eine Nullfolge₃₅. Also bildet auch die linke Seite eine Nullfolge₅, und die Behauptung folgt₃₅. ⟩⟩⟩

■ Konvergenz in \mathbb{R}^m und \mathbb{C}

Eine Folge (x_n) im \mathbb{R}^m heißt auch *vektorwertige Folge*. Hier ist jedes Folgenglied ein m -Tupel, also

$$x_n = (x_{n,1}, \dots, x_{n,m}).$$

Ein Grenzwert einer solchen Folge ist dann ebenfalls ein m -Tupel $a = (a_1, \dots, a_m)$.

- 38 **Satz** Eine vektorwertige Folge (x_n) konvergiert gegen a bezüglich der Summen-, euklidischen und Maximumsnorm genau dann, wenn sie also *komponentenweise konvergiert*:

$$x_{n,i} \rightarrow a_i, \quad 1 \leq i \leq m. \quad \times$$

Zunächst eine Ungleichung, die öfter benötigt wird.

- 39 **Lemma** Für $x \in \mathbb{R}^m$ gilt

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq m \|x\|_\infty. \quad \times$$

⟨⟨⟨ Es ist ja

$$\begin{aligned} \left(\max_{1 \leq i \leq m} |x_i|\right)^2 &\leq |x_1|^2 + \dots + |x_m|^2 \\ &\leq (|x_1| + \dots + |x_m|)^2 \leq \left(m \max_{1 \leq i \leq m} |x_i|\right)^2. \end{aligned}$$

Das heißt, es ist $\|x\|_\infty^2 \leq \|x\|_2^2 \leq \|x\|_1^2 \leq m^2 \|x\|_\infty^2$. Wurzelziehen ergibt die Behauptung. ⟩⟩⟩

⟨⟨⟨ Beweis des Satzes ⟩⟩⟩ Aufgrund des letzten Lemmas ist

$$\|x_n - a\|_\infty \leq \|x_n - a\|_2 \leq \|x_n - a\|_1 \leq m \|x_n - a\|_\infty.$$

Bildet also eine dieser Normen eine Nullfolge, dann auch jede andere. Konvergenz in jeder Komponente ist gleichbedeutend mit Konvergenz bezüglich $\|\cdot\|_\infty$, woraus die Behauptung folgt. ⟩⟩⟩

Komplexe Folgen können als ein Spezialfall dieses Satzes betrachtet werden, wenn man \mathbb{C} mit \mathbb{R}^2 identifiziert. Eine komplexe Folge konvergiert also genau dann, wenn die Real- und Imaginärteile ihrer Folgenglieder konvergieren A-36.

Schließlich gilt auch der

- 40 **Satz von Bolzano-Weierstraß im \mathbb{R}^m** Jede beschränkte vektorwertige Folge besitzt eine konvergente Teilfolge. ✕

⟨⟨⟨ Sei $(x_n)_n$ eine beschränkte Folge im \mathbb{R}^m . Sei $x_n = (x_{n,1}, \dots, x_{n,m})$. Dann ist auch jede Komponentenfolge

$$(x_{n,i})_n, \quad 1 \leq i \leq m,$$

beschränkt. Nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß für reelle Folgen 17 existiert somit eine erste Teilfolge $(x_{n'_k})$, deren erste Koordinate konvergiert:

$$x_{n'_k,1} \rightarrow a_1.$$

Aus dieser können wir eine zweite Teilfolge $(x_{n''_k})$ auswählen, wo auch die zweite Koordinate konvergiert:

$$x_{n''_k,2} \rightarrow a_2.$$

Dieses Auswahlverfahren können wir fortsetzen, bis wir eine letzte Teilfolge (x_{n_k}) erhalten, wo auch die letzte Koordinate konvergiert:

$$x_{n_k,m} \rightarrow a_m.$$

Somit konvergiert jede Komponente der Teilfolge (x_{n_k}) . Damit 38 konvergiert diese Teilfolge aber auch in der euklidischen Norm gegen $a = (a_1, \dots, a_m)$. ⟩⟩⟩

■ Cauchyfolgen und Banachräume

Cauchyfolgen in normierten Räumen sind wie reelle Cauchyfolgen definiert.

Definition Eine Folge (a_n) in einem normierten Vektorraum heißt *Cauchyfolge*, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N \geq 1$ gibt, so dass

$$\|a_n - a_m\| < \varepsilon, \quad n, m \geq N. \quad \times$$

Jede konvergente Folge ist wieder eine Cauchyfolge, und Lemma 1₂₀ und 2₂₁ für reelle Cauchyfolgen gelten genauso in normierten Räumen. In den Beweisen muss man lediglich den Betrag durch die jeweilige Norm ersetzen:

- 41 **Satz** *In einem normierten Vektorraum gilt:*
- (1) *Jede konvergente Folge ist eine Cauchyfolge.*
 - (2) *Jede Cauchyfolge ist beschränkt.*
 - (3) *Besitzt eine Cauchyfolge eine konvergente Teilfolge, so ist die gesamte Folge konvergent mit demselben Grenzwert. ✕*

Der große Unterschied ist jedoch, dass das Cauchy Kriterium im Allgemeinen *nicht mehr gilt*: es gibt normierte Vektorräume, in denen Cauchyfolgen *keinen* Grenzwert haben. Ein Beispiel dafür geben wir im nächsten Abschnitt.

Vielmehr ist dies eine Eigenschaft, die eine wichtige Klasse von normierten Räumen *auszeichnet*, während sie anderen Räumen fehlt. Daher erhalten solche Räume auch einen eigenen Namen.

Definition *Ein normierter Vektorraum heißt **vollständig**, wenn jede Cauchyfolge in ihm einen Grenzwert besitzt. Ein vollständiger, normierter Vektorraum wird **Banachraum** genannt. ✕*

Die einfachsten Beispiele von Banachräumen kennen wir bereits.

- 42 **Satz** *Die Räume \mathbb{R} und \mathbb{C} mit der Betragsnorm sowie \mathbb{R}^n mit der euklidischen, Summen- oder Maximumsnorm sind vollständig, also Banachräume. ✕*

«««« Jede Cauchyfolge ist beschränkt. Da in den genannten Räumen der Satz von Bolzano-Weierstraß gilt, besitzt jede Cauchyfolge auch eine konvergente Teilfolge. Dann ist aber auch die Cauchyfolge selbst konvergent. »»»»

Bemerkung Wir werden in Abschnitt ?? sehen, dass der \mathbb{R}^n mit *jeder* Norm vollständig ist, da dort alle Normen äquivalent sind. →

► **Noch ein Beispiel** Sei X eine beliebige nichtleere Menge, und für eine Funktion $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ sei

$$\|f\|_X := \sup \{ |f(x)| : x \in X \}.$$

Auf dem Raum der beschränkten reellen Funktionen auf X ,

$$B(X) = \{ f : X \rightarrow \mathbb{R} : \|f\|_X < \infty \},$$

ist dies eine Norm, genannt **Supremumsnorm**, und $(B(X), \|\cdot\|_X)$ ist ein Banachraum A-41. ◀