Heuristische Strategien zur Lösung von Übungsaufgaben

WS 2017/18

Inhaltsverzeichnis

Vorwort

Das vorliegende Skript dient zur Vermittlung heuristischer Strategien, welche beim Lösen von Übungsaufgaben hilfreich sein können. Solche Überlegungen haben in der mathematischen Fachdidaktik eine lange Tradition. Als Klassiker gelten beispielsweise die Arbeiten [4] von G. Polya und [2] von P. Halmos. Die folgende Darstellung beruht jedoch im Wesentlichen auf Arbeiten und Skripten von H. König, vorwiegend aber [3]. Desweiteren wurden Ideen von D. Grieser, [1] und H. Sewerin, [5] übernommen. An dieser Stelle sei auch meinen Kollegen E. Güzel und T. Hummel für Anmerkungen und Korrekturen, sowie Prof. T. Weidl, J. Wirth und P. Lesky für die konstruktive Begleitung bei der Entstehung des Skripts gedankt.

J. Köllner, 2017

1 Worum geht es hier?

Im Verlauf Ihres Studiums werden Sie Woche für Woche vor neue (Übungs-) Aufgaben gestellt. Einige dieser Aufgaben werden leichter, andere komplizierter zu lösen sein. Manche dieser Aufgaben werden als so schwer empfunden, dass man glaubt, sie unmöglich aus eigener Kraft lösen zu können. An diesem Punkt sollte man nicht verzweifeln. Gerade in den ersten Semestern stehen Ihnen einige Hilfestellungen zur Verfügung, nutzen Sie diese und besuchen Sie die angebotenen Sprechstunden seitens der Dozenten, Assistenten oder mit den Tutoren. Dennoch müssen Sie an einem bestimmten Punkt lernen mathematische Probleme selbstständig anzugehen. Ein Mathematiker bedient sich dabei üblicherweise einem ganzen Werkzeugkasten *heuristischer Methoden*. Was diese genau sind, lässt sich, wenn überhaupt, nur sehr schwer definieren, weswegen wir auch auf eine strenge Definition verzichten wollen. Vielmehr wollen wir uns hier darauf beschränken einige dieser Problemlösungsmethoden anzusprechen und anhand einiger Beispiele aufzuzeigen, wie man diese effektiv einsetzen kann, um komplexere Aufgaben zu bewältigen. Ziel Ihres Studiums ist es, neben dem Erlernen mathematischer Theorien, auch diese Methoden und Prinzipien Stück für Stück zu verinnerlichen. Neben dem strukturellen Denken und einer gewissen Frustrationstoleranz sind es nämlich diese Fähigkeiten Probleme effektiv zu lösen, welche Mathematiker im Berufsleben zu wertvollen Mitarbeitern machen.

2 Vom Beweisen

Darüber was ein Beweis genau ist, lässt sich wunderbar diskutieren. Für uns soll im Moment aber die einfache Definition als *Nachweis einer Aussage* genügen. Innerhalb eines Beweises verwendet man Definitionen und bereits bekannte Sätze um durch logische Schlüsse eine Behauptung unter gegebenen Voraussetzungen zu zeigen.

2.1 Beweis einer Allaussage

Unter einer *Allaussage* verstehen wir Sätze der Art: "Für alle Elemente einer Menge gilt die Eigenschaft, dass...". Dabei ist es meistens unmöglich, die Eigenschaft nacheinander für alle Elemente der Menge einzeln zu prüfen. Der Beweis wird dann anhand eines gewählten Elements geführt, es ist jedoch zu beachten, dass man in der Argumentation nur Eigenschaften verwendet, welche auf alle Elemente der Menge zutreffen.

Beispiel 2.1. Wir betrachten den aus der Schule bekannten Satz des Pythagoras:

In jedem rechtwinkligen Dreieck ist die Summe der Quadrate über den Katheten gleich dem Quadrat über der Hypothenuse.

Wir betrachten ein Dreieck, welches von den beiden Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ mit Skalarprodukt $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ aufgespannt wird (vgl. Abbildung 1). Die Seitenlängen sind dann gerade $|\vec{a}|$, $|\vec{b}|$ und $|\vec{a} + \vec{b}|$ und es gilt, dass

$$|\vec{a} + \vec{b}|^2 = (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{a} + \underbrace{\vec{a} \cdot \vec{b}}_{=0} + \underbrace{\vec{a} \cdot \vec{b}}_{=0} + \vec{b} \cdot \vec{b} = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2.$$

Möchte man hingegen eine Allaussage widerlegen, so genügt die Angabe eines Gegenbeispiels.

Beispiel 2.2. Wir betrachten die folgende, <u>falsche</u> Aussage

Jede Parabelfunktion besitzt mindestens eine reelle Nullstelle.

Diese Aussage ist falsch, um sie zu Widerlegen geben wir ein Gegenbeispiel, z.B. die Parabelfunktion $f(x) = x^2 + 1$ an. Da die Gleichung $x^2 = -1$ für keine relle Zahl x erfüllt ist, hat f keine relle Nullstelle.

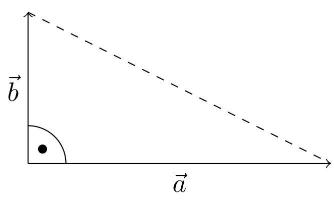

Abbildung 1: Skizze für Beispiel 2.1.

2.2 Beweis einer Wenn-Dann-Aussage

Bei einer *Wenn-Dann-Aussage* schließt man aus einer Reihe von Voraussetzungen auf eine Behauptung.

Beispiel 2.3. Wir betrachten den folgenden Satz:

Ist eine Funktion in einem Punkt x_0 ihres Definitionsbereiches differenzierbar, so ist $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Für alle x aus dem Definitionsbereich von f ist

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot (x - x_0).$$

Da f in x_0 differenzierbar ist, ist $\lim_{x\to x_0} (f(x) - f(x_0))/(x - x_0) = f'(x_0)$. Desweiteren ist $\lim_{x\to x_0} (x - x_0) = 0$. Zusammengenommen folgt daraus, dass

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} f(x_0) + \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot \lim_{x\to x_0} (x - x_0) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot 0 = f(x_0).$$

2.3 Beweis einer Genau-Dann-Wenn-Aussage

Im Gegensatz zum Beweis einer *Wenn-Dann-Aussage* besteht der Beweis einer *Genau-Dann-Wenn-Aussage* immer aus zwei Teilen. Es ist nicht nur zu zeigen, dass ein bestimmtes Objekt unter gewissen Voraussetzungen eine Eigenschaft besitzt, sondern auch, dass dieses Objekt die Eigenschaft nicht mehr besitzt, wenn die Voraussetzung verletzt ist. Insofern setzt sich eine *Genau-Dann-Wenn-Aussage* aus zwei *Wenn-Dann-Aussagen* zusammen.

Beispiel 2.4. Wir betrachten den folgenden Satz:

Seien f und g stetig differenzierbare Funktionen auf $\mathbb{R}$.
Es ist $f'(x) = g'(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ genau dann, wenn $f - g$ eine konstante Funktion ist.

- Wir nehmen zunächst an, dass $f - g$ konstant ist und müssen zeigen, dass $f'(x) = g'(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt. Da $f - g$ konstant ist, verschwindet die Ableitung von $f - g$ und es ist

  $$0 = (f(x) - g(x))' = f(x)' - g(x)'.$$

  Daraus folgt $f'(x) = g'(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

- Sei nun $f'(x) = g'(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Dann folgt mit der Formel von Newton-Leibnitz, dass

  $$f(x) - f(x_0) = \int_{x_0}^{x} f'(x)\,\mathrm{d}x = \int_{x_0}^{x} g'(x)\,\mathrm{d}x = g(x) - g(x_0)$$

  für alle $x, x_0 \in \mathbb{R}$ und die Differenz

  $$f(x) - g(x) = f(x_0) - g(x_0)$$

  ist konstant.

2.4 Indirekter Beweis

In manchen Fällen ist es einfacher, die Aussage nicht direkt, sondern indirekt zu zeigen. Dabei nimmt man an die Verneinung der zu zeigenden Aussage wäre richtig und versucht aus dieser Annahme einen Widerspruch herzuleiten. Eine häufige Anwendung dieser Beweismethode sind Aussagen der Art "Es gibt kein...".

Beispiel 2.5. Wir betrachten den folgenden Satz:

Die Zahl 3 ist nicht das Quadrat einer natürlichen Zahl.

Wir nehmen an, dass es eine Zahl $n \in \mathbb{N}$ mit $n^2 = 3$ gibt. Wegen

$$1^2 < 3 < 2^2$$

und Monotonie der Wurzelfunktion wäre dann $1 < n < 2$. Nun gibt es aber keine natürliche Zahl zwischen 1 und 2, was einen Widerspruch darstellt. Die Annahme es gäbe ein n mit $n^2 = 3$ muss also falsch sein.

2.5 Fallunterscheidungen

Oftmals lässt sich eine Aussage nicht für alle Objekte, über die eine Aussage getroffen wird, mit einem einheitlichen Verfahren beweisen. Manchmal können kompliziertere Probleme auch einfach in kleinere Teilprobleme zerlegt werden. In beiden Situationen ist es hilfreich eine *Fallunterscheidung* zu machen. Wie dies im Einzelnen funktioniert, soll anhand der folgenden Beispiele erläutert werden.

Beispiel 2.6. Wir wollen zeigen, dass das Produkt $n \cdot (n+1)$ für jede natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ eine gerade Zahl, d.h. durch 2, teilbar ist.
Um zu zeigen, dass das Produkt zweier Zahlen gerade ist, genügt es zu zeigen, dass eine der beiden Zahlen n oder $n+1$ gerade ist. Nun ist über n jedoch nichts weiter vorausgesetzt, wir wissen nicht, ob n selbst gerade oder ungerade ist. Innerhalb einer Fallunterscheidung könnten wir jedoch beide Annahmen nacheinander treffen:
Fall 1: Wir nehmen an, dass n gerade ist. Damit ist $n = 2 \cdot k$ für eine natürliche Zahl $k \in \mathbb{N}$ und

$$n \cdot (n+1) = 2 \cdot k(n+1).$$

Wegen $k(n+1) \in \mathbb{N}$ ist $n \cdot (n+1)$ in diesem Fall also eine gerade Zahl.
Fall 2: Wir nehmen an, dass n eine ungerade Zahl ist. Damit ist aber $n+1$ eine gerade Zahl und $n+1 = 2 \cdot k$ für ein $k \in \mathbb{N}$. Es folgt

$$n \cdot (n+1) = n \cdot 2k,$$

d.h. wegen $k \cdot n \in \mathbb{N}$ ist auch $n \cdot (n+1)$ eine gerade Zahl.
Da eine natürliche Zahl nur gerade (Fall 1) oder ungerade (Fall 2) sein kann, haben wir mit unserer Fallunterscheidung kein $n \in \mathbb{N}$ ausgelassen und die Aussage ist tatsächlich für alle möglichen natürlichen Zahlen gezeigt. Der Beweis ist damit abgeschlossen.

Beispiel 2.7. Eine sehr häufige Anwendung der Fallunterscheidung ist auch das Lösen von (Un-)Gleichungen, in denen der Betrag $|x|$ einer z.B. reellen Zahl $x \in \mathbb{R}$ vorkommt. Dabei wissen wir, dass $|x| = x$ für alle positiven und $|x| = -x$ für alle negativen reellen Zahlen gilt. Unterscheiden wir diese beiden Fälle, so verschwindet der Betrag in der gegebenen (Un-)Gleichung, die (Un-)Gleichung wird damit einfacher, sodass wir sie ggf. lösen können.
In unserem Beispiel soll nun die Ungleichung

$$|2x - 1| \leq 1$$

für $x \in \mathbb{R}$ gelöst werden. Um nun herauszufinden welche Fälle wir nun unterscheiden müssen, können wir umgekehrt vorgehen und fragen, wann $2x - 1$ positiv oder negativ ist. Hierfür lösen wir also die Gleichung $2x - 1 = 0$ und erhalten

$$2x - 1 = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad 2x = 1 \qquad \Leftrightarrow \qquad x = \frac{1}{2}.$$

Es sind also die beiden Fälle $x \geq 1/2$ und $x < 1/2$ zu unterscheiden:
Fall 1: Wir nehmen an, dass $x \geq 1/2$ ist. Dann ist

$$2x - 1 \geq 2 \cdot \frac{1}{2} - 1 = 0$$

und $|2x - 1| = 2x - 1$. Die gegebene Ungleichung vereinfacht sich zu

$$2x - 1 \leq 1 \qquad \Leftrightarrow \qquad 2x \leq 2 \qquad \Leftrightarrow \qquad x \leq 1.$$

Unter der Annahme, dass $x \geq 1/2$ ist, haben wir also gefunden, dass alle Zahlen $x \leq 1$ die Ungleichung erfüllen. Damit erfüllen alle reellen Zahlen mit $1/2 \leq x \leq 1$ die gegebene Ungleichung.
Fall 2: Wir nehmen an, dass $x < 1/2$ ist. Dann ist

$$1 - 2x < 2 \cdot \frac{1}{2} - 1 = 0$$

und $|2x - 1| = -(2x - 1) = 1 - 2x$. Die gegebene Ungleichung vereinfacht sich also zu

$$1 - 2x \leq 1 \qquad \Leftrightarrow \qquad 1 \leq 1 + 2x \qquad \Leftrightarrow \qquad 0 \leq 2x \qquad \Leftrightarrow \qquad 0 \leq x.$$

Unter der Annahme, dass $x < 1/2$, haben wir diesmal gefunden, dass alle Zahlen $x \geq 0$ die Ungleichung erfüllen. Damit erfüllen zusätzlich alle rellen Zahlen $0 \leq x < 1/2$ die gegebene Ungleichung.
Zusammenfassend haben wir durch Fallunterscheidung herausgefunden, dass alle rellen Zahlen mit $0 \leq x \leq 1$ die gegebene Ungleichung erfüllen. Dabei haben wir bei unserer Fallunterscheidung keine Zahlen vergessen und auch ansonsten keine falschen Umformungen vorgenommen, wir können uns daher auch wirklich sicher sein alle reellen Zahlen mit $|2x - 1| \leq 1$ gefunden zu haben.

2.6 Beweis durch vollständige Induktion

Sei $A(n)$ eine beliebige, von n abhängige Aussage. Sätze der Form: "Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, dass $A(n)$."lassen sich meistens mit Hilfe einer *vollständigen Induktion* zeigen. Bei diesem Verfahren zeigt man zunächst, dass $A(1)$ eine wahre Aussage ist (Induktionsanfang). Anschließend zeigt man unter der Voraussetzung, dass $A(n)$ für irgendein $n \in \mathbb{N}$ wahr ist (Induktionsvoraussetzung), dass auch $A(n+1)$ eine wahre Aussage ist (Induktionsschluss). Nach dem Induktionsaxiom hat man dann $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ bewiesen.

Beispiel 2.8. Wir betrachten die Aussage

Sei $x > -1$ eine reelle Zahl.
Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $(1 + x)^n \geq 1 + nx$.

- Die Aussage stimmt zumindest für $n = 1$, da

$$(1 + x)^1 = 1 + x = 1 + 1 \cdot x$$

  gilt.

- Wir nehmen nun an, dass die Aussage für ein gewisses $n \in \mathbb{N}$ erfüllt ist, und zeigen die Aussage dann für $n + 1$: Hierfür ist

$$(1 + x)^{n+1} = (1 + x)^n \cdot \underbrace{(1 + x)}_{>0} \overset{\text{IV.}}{\geq} (1 + nx) \cdot (1 + x) = 1 + (n + 1)x + \underbrace{nx^2}_{\geq 0} \geq 1 + (n + 1)x.$$

3 Allgemeine Prinzipien

Im vorangegangenen Abschnitt haben wir einige Beweise gesehen. Technisch waren Sie alle korrekt und ab einem gewissen Punkt im Studium wird von Ihnen verlangt, dass Sie solche Beweise selbsständig so formulieren. Was in solchen Beweisen aber fehlt ist eine Darstellung davon, wie man gerade zu diesem Beweis gekommen ist. Auf dem Weg dorthin bedient man sich einiger Techniken und Prinzipien, welche üblicherweise nicht dargestellt werden. Fehlwege, die man gehen musste, werden gänzlich weggelassen. Ziel der folgenden Abschnitte ist es nun gerade diese Strategien einmal zusammenzufassen.
Wir beginnen mit einer Auflistung relativ einfacher Prinzipien. Manche dieser Prinzipien werden Ihnen vielleicht bereits bekannt vorkommen, trotzdem werden die Wenigsten in diesem Zusammenhang darüber nachgedacht haben und es ist gut, sich diese Prinzipien, vor allem bei komplexeren Aufgaben, wieder ins Gedächtnis zu rufen und sich zu erinnern.
Manche dieser Prinzipien wie z.B. das *Analogie-*, *Zerlegungs-*, *Transformations-* und *Rückführungsprinzip* sind universell einsetzbar. Andere Prinzipien wie das *Extremalprinzip*, *Schubfachprinzip* oder *Symmetrieprinzip* eignen sich nur bei bestimmten Aufgaben, helfen dann aber die Aufgabe erheblich zu vereinfachen.

Das Analogieprinzip sollte man bereits beim Lesen einer Aufgabe beachten und sich fragen, ob man eine ähnliche Aufgabe bereits gelöst hat. Ist dies der Fall, sollte man zunächst versuchen bei der neuen Aufgabe analog vorzugehen und die gleichen Techniken in ggf. modifizierter Form wieder anwenden.

Das Zerlegungsprinzip eignet sich vor allem für komplexere Aufgaben. Dabei versucht man eine Aufgabe in kleinere Teilaufgaben zu unterteilen und diese dann schrittweise zu lösen. Evtl. muss man *Fallunterscheidungen* treffen und sich überlegen, in welcher Reihenfolge die Teilaufgaben zu lösen sind.

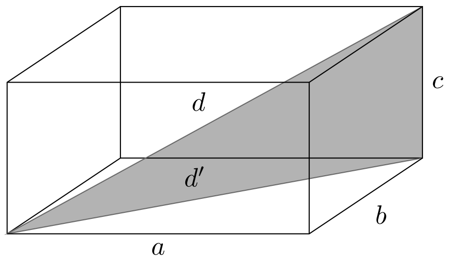

Abbildung 2: Skizze für Beispiel 3.1.

Beim Transformationsprinzip versucht man die Situation in einer Aufgabe in die Sprache einer geeignet gewählten mathematischen Theorie zu übersetzen. Beispielsweise führt man bei Anwendungsaufgaben geeignete Koordinaten oder Variablen ein, um dann nach Gleichungen zu suchen. Hat man die Lösung des mathematischen Problems gefunden, muss man diese dann wieder in den Ausgangsbereich zurückübersetzen.

Beim Rückführungsprinzip sucht man nach einer bereits gelösten Aufgabe oder einem Satz aus der Vorlesung, auf den sich die Aufgabe zurückführen lässt. Ggf. hilft es dabei, die Aufgabe zu verallgemeinern oder sich Hilfsaufgaben zu formulieren.

Beispiel 3.1. Dieses schöne Anwendungsbeispiel für das Rückführungsprinip ist alt und geht auf George Pólya (1887 - 1985) zurück. Man findet es z.B: in [4].
Gegeben ist ein Quader mit den Seitenlängen $a, b, c > 0$. Es soll eine Formel zur Berechnung seiner Raumdiagonalen d mit Hilfe von a, b, c gefunden werden. Das Problem erinnert stark an das Problem der Berechnung einer Flächendiagonalen d' in einerm Rechteck mit den Seitenlängen $a, b > 0$. Dort führt die Anwendung des Satz des Pythagoras auf die Formel

$$d' = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Versuchen wir für die Raumdiagonale also ebenfalls ein rechtwinkliges Dreieck zu finden. Zeichnet man sich die Flächendiagonale d' wie in Abbildung 2 als Hilfslinie in den Quader, so erkennt man ein solches mit den Seitenlängen d', d und c. Die Anwendung des Satz des Pythagoras führt dann auf die Gleichung

$$d^2 = d'^2 + c^2$$

und die Berechnung der Raumdiagonalen wurde auf die bekannte Formel für die Flächendiagonale zurückgeführt. Einsetzen liefert letztendlich, dass

$$d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}.$$

Man beachte, dass die Formel für die Flächendiagonale als Spezialfall für $c = 0$ in dieser Formel wieder enthalten ist. Allgemeiner können eine ganze Reihe n-dimensionaler Probleme auf ein $n-1$-dimensionales Problem zurückgeführt werden (Induktion in der Dimension) und es ist hilfreich sich neben dem n-dimensionalen Problem auch $n-1$-dimensionale Spezialfälle anzuschauen. Manchmal liefert dies die richtigen Ideen, in anderen Fällen kann die Intuition aber auch trügen.

Schubfachprinzip Wenn mehr als n Elemente auf genau n Schubfächer verteilt werden, so müssen in mindestens eines der Fächer mindestens zwei Elemente gepackt werden. Aber welche Aufgaben lassen sich mit Hilfe dieser Erkenntnis bearbeiten? Dieses Prinzip ist recht speziell und kommt eigentlich nur bei Existenzaussagen über endliche Mengen vor, beispielsweise dann, wenn man zeigen möchte, dass zwei oder mehrere Elemente eine gemeinsame Eigenschaft haben.

Beispiel 3.2.

- In einer Gruppe von 13 Personen haben mindestens zwei Personen im gleichen Monat Geburtstag. In diesem Fall sind die 13 Personen gerade 13 Elemente, welche wir auf 12 Schubfächer (die Geburtsmonate) verteilen.

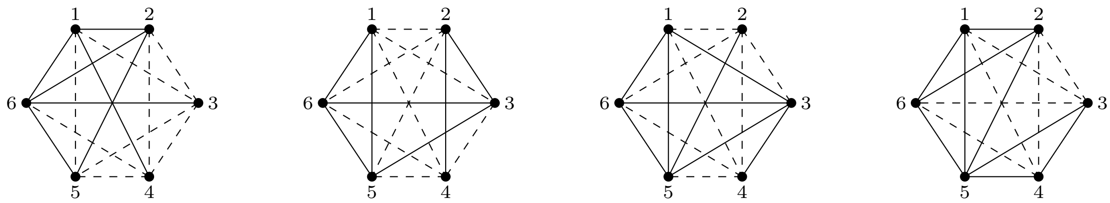

Abbildung 3: Beispiele für mögliche Zusammensetzungen der Partys aus Beispiel 3.3

- Verteilt man 13 Studenten auf 3 Übungsgruppen, so hat mindestens eine Übungsgruppe mindestens 5 Teilnehmer. Hier verteilt man 13 Elemente (die Studenten) auf 3 Schubfächer (die Übungsgruppen). Angenommen jede Übungsgrupppe hätte maximal 4 Teilnehmer, so dürften wir nur 12 Studenten verteilen, da wir einen weiteren hinzunehmen, muss eine Gruppe mehr als 4 Teilnehmer haben.

In diesen Beispielen war es relativ offensichtlich, wie man das Schubfachprinzip anwenden musste. Dies muss aber nicht immer der Fall sein, oft benötigt man neben dem Schubfachprinzip weitere Hilfsmittel.

Beispiel 3.3. Auf einer Erstsemesterparty mit 6 Teilnehmern findet man sicher entweder eine Gruppe von 3 Erstsemestern, die sich untereinander nicht kennen oder man findet sicher eine Gruppe von 3 Erstsemestern, die sich untereinander kennen. Sich zu "kennen" soll dabei eine symmetrische Eigenschaft sein, d.h. zwei Erstsemester kennen sich, wenn jeder der beiden den jeweils anderen kennt. Hier sehen wir zunächst nicht, wie wir das Schubfachprinzip anwenden können. Klar ist nur, dass wir nach "Elementen" und "Schubfächern" Ausschau halten müssen. Beginnen wir also damit die Partygäste mit $1, \ldots, 6$ durchzunummerieren. Nun könnten wir zu jedem Erstsemester alle anderen Erstsemester notieren, die ihn kennen. Das Problem ist hierbei, dass z.B. Tabellen relativ schnell unübersichtlich werden und wir gleichzeitig eine allgemeine Party mit einer beliebigen Zusammensetzung von Personen betrachten wollen. Nichtsdestotrotz hilft es vielleicht sich einige Beispiele solcher Partys anzuschauen. Anstelle von Tabellen verwenden wir dabei besser Bilder und versuchen Gemeinsamkeiten zu identifizieren. Wir zeichnen also für jeden Partygast einen Punkt und verbinden die beiden Punkte durch eine durchgezogene Linie, wenn sich die beiden Personen kennen. Im anderen Fall verbinden wir die Punkte mit einer gestrichelten Linie. Abbildung 3 zeigt hierfür einige Beispiele. In allen Bildern erkennen wir, dass es tatsächlich immer ein Dreieck aus entweder durchgezogenen Linien oder gestrichelten Linien gibt, d.h. man findet eine Gruppe von drei Personen, die sich entweder untereinander kennen oder nicht kennen. Wie können wir das nun aber im allgemeinen Fall begründen? Betrachten wir die Bilder einmal näher. Jeder Punkt ist durch 5 Linien mit einem anderen Punkt verbunden. Dabei gibt es aber zwei Arten von Linien. Wenden wir das Schubfachprinzip an, so müssen an einem Punkt mindestens drei Linien von einer Art (gestrichelt oder durchgezogen) ausgehen. Sei n die Nummer der betrachteten Person, diese sei z.B. mit den Personen k, l, m durch eine gestrichelte Linie verbunden. Sind nun zwei der Personen k, l, m ebenfalls durch eine gestrichelte Linie verbunden, so haben wir eine Gruppe von drei Personen gefunden, die sich untereinander nicht kennen. Sind die drei Personen k, l, m aber nur durch durchgezogene Linien verbunden, so bilden sie eine Gruppe von Personen, die sich untereinander kennen. Damit haben wir einen Lösungsweg gefunden, den wir nun niederschreiben können.

Beispiel 3.4. Eine andere, sehr versteckte Anwendung für das Schubfachprinzip ist die folgende Aufgabe:

Zeigen Sie, dass es unter allen Potenzen von 3 *mindestens eine gibt, welche in der Dezimaldarstellung auf die Ziffern* 001 *endet.*

Diese Aufgabe müssen wir zunächst wieder in eine mathematische Sprache übersetzen. Es geht hier um Potenzen von 3, d.h. um Zahlen 3^n mit $n \in \mathbb{N}$. Was bedeutet es nun, dass eine Zahl in der Dezimaldarstellung auf 001 endet? Schreiben wir uns zunächst einige Beispiele auf:

$$1001, 2001, 3001, \ldots, 15001, \ldots 123001, \ldots$$

Alle diese Zahlen haben gemeinsam, dass sie, teilt man sie durch 1000 den Rest 1 haben, wir schreiben dafür

$$3001 \mod 1000 = 1.$$

Die Behauptung in der Aufgabe lautet also, dass es eine Zahl 3^n gibt für die

$$3^n \mod 1000 = 1$$

gilt. Wir wollen das Schubfachprinzip anwenden, hierfür suchen wir wieder nach Elementen, die wir auf Schubfächer verteilen wollen. Mögliche Elemente wären die Zahlen 3^n, Schubfächer ihr Rest bei Division durch 1000. Wie viele Schubfächer gibt es also? Bei Division durch 1000 kommen als mögliche Reste nur die Zahlen $0, \ldots, 999$ in Frage. Unter den unendlich vielen Elementen 3^n muss es also mindestens zwei Potenzen geben, welche bei Division durch 1000 den gleichen Rest haben. Seien 3^k und 3^l mit $k > l$ diese beiden Potenzen. D.h. es gilt

$$3^k = 3^l \mod 1000,$$

bzw. die Differenz $3^k - 3^l$ kann ohne Rest durch 1000 geteilt werden. Damit kann aber auch

$$3^l(3^{k-l} - 1) = 3^k - 3^l$$

ohne Rest durch 1000 geteilt werden. Nun kann 3^l aber nie ohne Rest durch 1000 geteilt werden, da 1000 z.B. nur die Primfaktoren 2 und 5 besitzt. D.h. $3^{k-l} - 1$ ist durch 1000 teilbar, bzw. 3^{k-l} hat bei Division durch 1000 den Rest 1 und endet somit auf die Ziffern 001.

Symmetrieprinzip Das Wort *Symmetrie* hat viele Bedeutungen. Im Alltag verwenden wir es meist um Bilder oder Objekte zu beschreiben, so erscheint das menschliche Gesicht auf den ersten Blick symmetrisch, genauso wie klassische Bauwerke. Diese Art der Symmetrie hat in der Mathematik eine Entsprechung, in der Geometrie kennt man etwas präziser die Begriffe *Achsen-* oder *Punktsymmetrie*. Etwas allgemeiner spricht man in der Mathematik aber zusätzlich dann von einer Symmetrie, wenn es "vertauschbare Teile" gibt, so ist z.B. ein gleichseitiges Dreieck symmetrisch, da die Reihenfolge der Ecken für die meisten Fragen unwichtig ist oder der Ausdruck

$$xy + yz + zx$$

symmetrisch, da die konkreten Werte von x, y und z vertauscht werden können, ohne dass sich das Endergebnis ändert. Findet man in Aufgaben Symmetrien, so kann man diese ausnutzen um die Aufgaben eleganter, leichter oder überhaupt zu lösen.

Beispiel 3.5. Symmetrieargumente können beispielsweise die Anzahl der zu unterscheidenden Fälle bei einer Fallunterscheidung reduzieren:
Wir wollen zeigen, dass

$$\sqrt{\frac{x^2 + y^2}{2}} \leq \max\{x, y\}$$

für alle $x, y \in \mathbb{R}$ mit $x, y \geq 0$ erfüllt ist. Solche Ungleichungen lassen sich mit Hilfe einer Fallunterscheidung behandeln. Hier beobachten wir aber zusätzlich, dass wir in der Ungleichung die Rollen von x und y vertauschen können. Anstelle der beiden Fälle $x \geq y$ und $y \geq x$ genügt es also nur einen der beiden Fälle zu untersuchen. In der Mathematik verwendet man dafür auch die Abkürzung oBdA für *ohne Beschränkung der Allgemeinheit.*
Sei also oBdA $x \geq y \geq 0$, dann ist auch $x^2 \geq y^2$ und damit

$$\sqrt{\frac{x^2 + y^2}{2}} \leq \sqrt{\frac{x^2 + x^2}{2}} = \sqrt{x^2} = x = \max\{x, y\}.$$

Auf die Darstellung der Heuristik, welche zu dieser Lösung führt, haben wir in diesem Beidpiel verzichtet und verweisen auf den Abschnitt 4.2.1.

Beispiel 3.6. Symmetrien lassen sich auch zur einfachen Berechnung mancher Integrale verwenden. Es soll beispielsweise der Wert des Integrals

$$\int_{-\pi}^{\pi} (\sin x)^{99} \mathrm{d}x$$

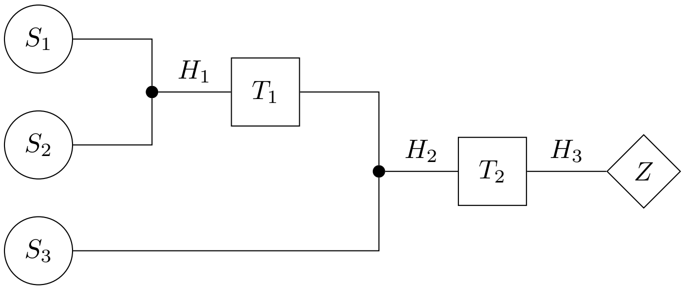

Abbildung 4: Beispiel für eine schematische Darstellung eines Lösungsplans.

(a) Vorwärtsarbeiten

(b) Rückwärtsarbeiten

Abbildung 5: Schematische Darstellungen des Vorwärts- und Rückwärtsarbeitens.

berechnet werden. Prinzipiell lässt sich eine Stammfunktion von $(\sin x)^{99}$ ermitteln, dies ist nur aufwändig und erleichtert die Berechnung dieses Integrals keinesfalls. Der Trick besteht darin zu bemerken, dass man eine (zum Ursprung des Koordinatensystems) punktsymmetrische Funktion über ein symmetrisch zum Ursprung gewähltes Intervall integriert. Das Integral sollte also den Wert Null annehmen, da, anschaulich gesprochen, zu jedem Stückchen Flächeninhalt oberhalb der x-Achse es ein genauso großes Stückchen Flächeninhalt unterhalb der x-Achse gibt. Diese beiden Beiträge zum Wert des Integrals heben sich aber gerade auf.
Der Nachweis, dass es sich beim Integranden um eine punktsymmetrische Funktion handelt, erfolgt durch Nachrechnen der Gleichung $f(-x) = -f(x)$ für alle $x \in [-\pi, \pi]$. Dabei ist

$$f(-x) = (\sin(-x))^{99} = (-\sin x)^{99} = (-1)^{99} \cdot (\sin x)^9 9 = -(\sin x)^{99} = -f(x).$$

4 Strategien zum Aufgabenlösen

4.1 Lösungspläne

Jede Aufgabe enthält Informationen über *Start S* und *Ziel Z*. Bei Rechenaufgaben sind etwa gewisse Größen gegeben, andere werden gesucht. In Beweisaufgaben gibt es Voraussetzungen und eine Aussage, die es zu beweisen gilt. Eine Aufgabe zu lösen bedeutet dann auf irgendeine Art und Weise einen Weg vom Start zum Ziel zu finden. Auf dem Weg bedient man sich üblicherweise einiger *Hilfsmittel H* um zwischendurch *Teilziele T* zu erreichen. Die Gesamtheit von Start, Ziel, Teilzielen und Hilfsmitteln lässt sich in einem *Lösungsplan einer Aufgabe* zusammenfassen, diesen kann man schematisch mit Hilfe eines Graphen wie in Abbildung 4 veranschaulichen.

4.2 Vorwärts- und Rückwärtsarbeiten

Vorwärtsarbeiten ist die wohl universellste Strategie. Sie kann zwar prinzipiell immer angewandt werden, führt aber auch oft in Sackgassen. Ausgehend vom Start sucht man nach weiteren Teilzielen und Hilfsmitteln, welche direkt zum Ziel führen (für eine schematische Dastellung vgl. Abbildung 5). Geeignete Teilziele findet man mit Hilfe der Frage:

$$\text{Was lässt sich aus den} \left\{\begin{matrix} \text{gegebenen Größen} \\ \text{Voraussetzungen} \\ \text{gegebenen Bedingungen} \end{matrix}\right\} \text{unmittelbar} \left\{\begin{matrix} \text{berechnen} \\ \text{ableiten} \\ \text{folgern} \end{matrix}\right\} ?$$

Die Frage nach den entsprechenden Hilfsmitteln liefert dann die verwendete Formel oder einen Satz. Umgekehrt kann man aber auch zunächst nach geeigneten Hilfsmitteln suchen. Hierfür

$$\text{sucht man nach} \left\{\begin{matrix} \text{Formeln, in denen die gegebenen Größen vorkommen} \\ \text{Sätzen mit den gleichen Voraussetzungen wie in der Aufgabe} \end{matrix}\right\}.$$

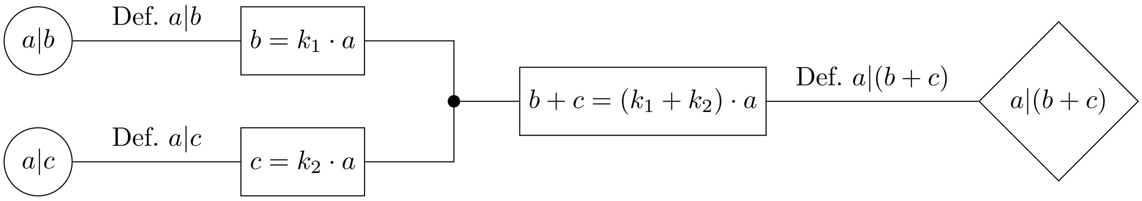

Abbildung 6: Lösungsplan für die Aufgabe aus Beispiel 4.1.

Die Teilziele ergeben sich dann aus der Frage:

$$\text{Was lässt sich also} \begin{Bmatrix} \text{aus den gegebenen Größen berechnen} \\ \text{aus den Voraussetzungen ableiten} \end{Bmatrix} ?$$

Beispiel 4.1. Wir betrachten die folgende Aufgabe:

Zeigen Sie: Teilt eine natürliche Zahl zwei andere natürliche Zahlen, so auch deren Summe.

Um die Aufgabe zu lösen müssen wir zunächst Variablen einführen und uns vergegenwärtigen, welche Voraussetzungen gegeben sind und was wir zeigen müssen. Bezeichnen wie die natürliche Zahl, welche die beiden übrigen teilt mit a und die beiden übrigen mit b und c, so haben wir die beiden Voraussetzungen

$$\begin{aligned} V_1 : &\quad a|b, \\ V_2 : &\quad a|c \end{aligned}$$

gegeben. Unser Ziel ist hierbei $a|(b+c)$.
Was lässt sich nun unmittelbar aus V_1 folgern? Wenn $a|b$ dann gibt es eine natürliche Zahl k_1, sodass $b = k_1 \cdot a$ gilt. Genauso können wir aus V_2 folgern, dass es eine natürliche Zahl k_2 gibt, sodass $c = k_2 \cdot a$ gilt. Beide Male haben wir als Hilfsmittel nur die Definition des Ausdrucks $a|b$, bzw. $a|c$ verwendet.
Im Hinblick auf unser Ziel, eine Aussage über die Summe von b und c zu beweisen, könnten wir nun auf die Idee kommen diese beiden Gleichungen zu addieren, und erhalten

$$b + c = k_1 \cdot a + k_2 \cdot a = (k_1 + k_2) \cdot a = k_3 \cdot a.$$

Dies entspricht aber gerade der Definition von $a|(b+c)$, da k_3 als Summe zweier natürlicher Zahlen wieder eine natürliche Zahl ist. Das Hilfsmittel im letzten Schritt war wieder die Anwendung der Definition der Teilbarkeit. Die schematische Zusammenfassung dieser Lösung findet sich in Abbildung 6.

Beim Rückwärtsarbeiten geht man umgekehrt vor und sucht ausgehend vom Ziel nach geeigneten Teilzielen und Hilfsmitteln, welche wieder auf das Ziel führen. Bei der Suche nach Teilzielen stellt man sich die Frage:

$$\text{Woraus lässt sich} \begin{Bmatrix} \text{die gesuchte Größe} \\ \text{die Behauptung} \end{Bmatrix} \text{unmittelbar} \begin{Bmatrix} \text{berechnen} \\ \text{ableiten} \end{Bmatrix} ?$$

Um Hilfsmittel zu finden kann man sich fragen:

$$\text{Welche} \begin{Bmatrix} \text{Formel enthält die gesuchte Größe} \\ \text{Sätze enthalten gleichartige Behauptungen} \end{Bmatrix} ?$$

Das Vorwärtsarbeiten setzt man meist ohnehin unbewusst ein und natürlich ist nichts dagegen einzuwenden, wenn man nach dem Lesen einer Aufgabe zunächst versucht direkt durch Vorwärtsarbeiten zum Ziel zu kommen. Gelingt dies aber nach einiger Zeit nicht, so sollte man diesen Ansatz abbrechen und versuchen rückwärts zu arbeiten. Dabei muss man die Fortschritte vom Vorwärtsarbeiten nicht vergessen, vielmehr können sie auch beim Rückwärtsarbeiten helfen. Eine solche Kombination von Vorwärtsarbeiten und Rückwärtsarbeiten ist eine sehr effektive Lösungsstrategie.

4.2.1 Folgern aus der Behauptung

Das *Folgern aus der Behauptung* kann man als besondere Art des Vorwärtsarbeitens ansehen. Praktisch spielt diese Strategie nur bei der Lösung einfacher Ungleichungen eine Rolle, soll hier aber nicht unerwähnt bleiben. Beim Folgern aus der Behauptung nimmt man die gegebene Ungleichung und formt beide Seiten so lange um, bis man eine offensichtlich wahre oder bereits bewiesene Ungleichung erhält. Dabei ist jedoch zu beachten, dass man nur Äquivalenzumformungen verwendet, sich jeder Schritt also tatsächlich auch umkehren lässt. Andernfalls muss man ggf. Fallunterscheidungen treffen.

Beispiel 4.2. Es ist die Ungleichung

$$x + \frac{1}{x} \geq 2$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $x > 0$ zu zeigen. Hierfür formen wir die Ungleichung so lange um, bis wir eine offensichtlich wahre Ungleichung erhalten. Konkret ist

$$\begin{aligned} & x + \frac{1}{x} \geq 2 \\ \overset{\cdot x}{\Rightarrow} \quad & x^2 + 1 \geq 2x \\ \overset{-2x}{\Rightarrow} & x^2 - 2x + 1 \geq 0. \end{aligned}$$

Der letzte Audruck lässt sich mit Hilfe der Binomischen Formel umschreiben, es ist

$$x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2 \geq 0.$$

Damit haben wir aus der gegebenen Ungleichung eine wahre Aussage gefolgert, mit dem Beweis der Ungleichung sind wir damit aber keineswegs fertig. Betrachten wir unsere Rechenschritte also noch einmal genauer: Der erste Schritt war eine Multiplikation mit $x \neq 0$, dieser Schritt ist umkehrbar, man kann einfach durch $x \neq 0$ dividieren. Im zweiten Schritt wurden auf beiden Seiten $2x$ abgezogen. Auch dieser Schritt ist umkehrbar, man kann einfach auf beiden Seiten $2x$ addieren. Der letzte Schritt war nur eine Umformung mit Hilfe der Binomischen Formel. Wir haben nun einen Lösungsweg gefunden, den wir niederschreiben können. Dabei achten wir nun darauf, die Argumentation in der richtigen Reihenfolge aufzuschreiben:

Musterlösung: Für alle $x \in \mathbb{R}$ ist $(x-1)^2 \geq 0$. Daraus erhalten wir

$$\begin{aligned} & (x-1)^2 = x^2 - 2x + 1 \geq 0 \\ \overset{+2x}{\Leftrightarrow} \quad & x^2 + 1 \geq 2x \\ \overset{\cdot 1/x}{\Leftrightarrow} \quad & x + \frac{1}{x} \geq 2. \end{aligned}$$

Wie folgendes Beispiel zeigt, lassen sich aber nicht alle Ungleichungen mit dieser Methode behandeln. Manchmal ist es hilfreich weitere Abschätzungen vorzunehmen.

Beispiel 4.3. Es ist die Ungleichung

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + xz + yz$$

für alle $x, y, z \in \mathbb{R}$ zu zeigen. Die Methode des Folgerns aus der Behauptung führt hier nicht zum Ziel, davon kann man sich leicht selbst überzeugen. Wir müssen also nach einem anderen Lösungsweg suchen. Auf den ersten Blick erkennt man, dass die beiden Terme in der Ungleichung symmetrisch bzgl. Vertauschung von x, y, z sind, wir sehen aber nicht, wie wir diese Information hier verwerten sollen. In einem solchen Fall ist es hilfreich zunächst *Spezialfälle* der Ungleichung zu betrachten. Setzen wir z.B. $z = 0$, so erhalten wir die Ungleichung

$$x^2 + y^2 \geq xy.$$

Diese Ungleichung ist richtig, da sogar

$$x^2 + y^2 \geq 2xy \qquad \Leftrightarrow \qquad x^2 - 2xy + y^2 = (x-y)^2 \geq 0$$

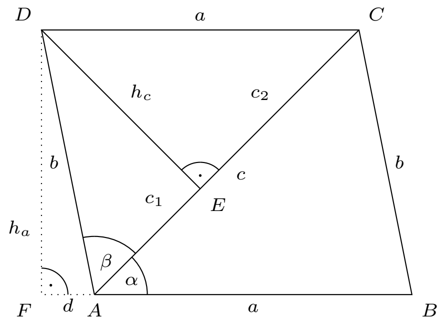

Abbildung 7: Skizze für die Aufgabe aus Beispiel 4.4.

gilt. Analog (bzw. durch Ausnutzung der Symmetrie) erhalten wir zwei weitere Ungleichungen, d.h. es gelten jeweils

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &\geq 2xy, \\ x^2 + z^2 &\geq 2xz, \\ y^2 + z^2 &\geq 2yz. \end{aligned}$$

Schreibt man sich diese drei Ungleichungen so untereinander auf, so erkennt man, dass die gesuchte Ungleichung gerade aus der Summe dieser drei Ungleichungen hervorgeht, d.h.

$$2(x^2 + y^2 + z^2) = (x^2 + y^2) + (x^2 + z^2) + (y^2 + z^2) \geq 2xy + 2xz + 2yz = 2(xy + xz + yz).$$

Wir haben damit einen Lösungsweg gefunden.

4.3 Suche nach Gleichungen

Eine andere Strategie ist die *Suche nach Gleichungen*. Wir sprechen hier von einer anderen Strategie, da sie sich nur schwer in ein Vorwärts-/Rückwärtschema einordnen lässt und sich die entstandenen Lösungswege nicht leicht in einem Graphen veranschaulichen lassen. Nichtsdestotrotz ist die Suche nach Gleichungen für viele Aufgaben ein wertvolles Hilfsmittel.
Nach dem Lesen einer Aufgabe versucht man die gegebenen Voraussetzungen in Gleichungen oder Ungleichungen zu überführen. Oftmals muss man hierfür selbst geeignete (Hilfs-)Variablen einführen. Innerhalb des entstandenen Systems von Gleichungen versucht man nun nacheinander überflüssige Variablen zu eliminieren, bis letztendlich nur die gesuchten Größen übrig sind. Eine unvorteilhafte Wahl der Variablen zu Beginn erhöht hier nur den Aufwand bei der Elimination überflüssiger Variablen. Umwege sind dabei keine Seltenheit, hat man daher einmal einen Lösungsweg gefunden, so sollte man versuchen diesen Weg zu optimieren und weitere, kürzere Lösungswege zu finden.

Beispiel 4.4. Wir betrachten die folgende Aufgabe:

Man beweise das Additionstheorem $\sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta)$ *für positive Winkel* α, β *mit* $\alpha + \beta \in [0, \pi]$. *Verwenden Sie dafür die Skizze in Abbildung 7.*

Wir wollen hier versuchen die Lösung mittels der Suche nach Gleichungen zu finden. Der Einfachheit halber sind bereits alle wichtigen Punkte, Winkel und Kanten in der Skizze beschriftet, wäre dies nicht der Fall, so müssten wir selbst Variablen einführen. Beginnen wir nun zunächst damit alle denkbaren Gleichungen aufzulisten: Im Dreick ECD haben wir z.B.

$$h_c^2 + c_2^2 = a^2, \qquad \sin(\alpha) = \frac{h_c}{a}, \qquad \cos(\alpha) = \frac{c_2}{a},$$

im Dreieck AED sind

$$h_c^2 + c_1^2 = b^2, \qquad \sin(\beta) = \frac{h_c}{b}, \qquad \cos(\beta) = \frac{c_1}{b}$$

und im Dreieck FAD sind

$$h_a^2 + d^2 = b^2, \qquad \sin(\pi - (\alpha+\beta)) = \frac{h_a}{b}, \qquad \cos(\pi - (\alpha+\beta)) = \frac{d}{b}.$$

Desweiteren ist

$$c = c_1 + c_2.$$

Bisher haben wir noch keine Gleichung für das Parallelogramm gefunden, hier fällt auf den ersten Blick nur auf, dass wir dessen Flächeninhalt $\mathcal{A}$ auf zwei verschiedene Arten berechnen können, es sind

$$\mathcal{A} = a \cdot h_a \qquad \text{und} \qquad \mathcal{A} = c \cdot h_c.$$

Man beachte, dass wir gerade so viele Winkel eingeführt haben wie die Aussage, welche wir zeigen wollen, beinhaltet, überschüssige Bezeichnungen müsten wir im anderen Fall wieder eliminieren. Versuchen wir nun die Gleichungen, falls möglich, zu vereinfachen. Beispielsweise kann man die Symmetrieeigenschaft $\sin(\pi - \varphi) = \sin\varphi$ verwenden und erhält

$$\sin(\alpha+\beta) = \frac{h_a}{b}.$$

Um Übersicht zu gewinnen überlegen wir, welche Gleichungen uns mehr oder weniger weiterhelfen können. Beispielsweise kommt der Term $\cos(\alpha+\beta)$ in unserer Behauptung nicht vor. Desweiteren helfen die Gleichungen mit den Quadraten aus dem Satz des Pythagoras auf den ersten Blick nicht weiter. Legen wir sie für den Moment beiseite und beschränken wir uns auf das System

$$\begin{aligned}
&\mathcal{A} = a \cdot h_a, \qquad \mathcal{A} = c \cdot h_c \\
&\sin(\alpha) = \frac{h_c}{a}, \qquad \cos(\alpha) = \frac{c_2}{a}, \qquad \sin(\beta) = \frac{h_c}{b}, \qquad \cos(\beta) = \frac{c_1}{b}, \qquad \sin(\alpha+\beta) = \frac{h_a}{b}, \\
&c = c_1 + c_2.
\end{aligned}$$

Versucht man in diesem System nun h_c zu eliminieren, so haben wir dabei zwei Möglichkeiten: Es ist einerseits $h_c = a \cdot \sin(\alpha)$ und andererseits $h_c = b \cdot \sin(\beta)$. Für welche dieser beiden möglichen Substitutionen sollen wir uns entscheiden? Wir wissen es jetzt nicht und verwerfen diese Idee zunächst wieder. Am einfachsten lässt sich wahrscheinlich die Variable c mit $c = c_1 + c_2$ eliminieren. Dies führt auf

$$\begin{aligned}
&\mathcal{A} = a \cdot h_a, \qquad \mathcal{A} = (c_1 + c_2) \cdot h_c \\
&\sin(\alpha) = \frac{h_c}{a}, \qquad \cos(\alpha) = \frac{c_2}{a}, \qquad \sin(\beta) = \frac{h_c}{b}, \qquad \cos(\beta) = \frac{c_1}{b}, \qquad \sin(\alpha+\beta) = \frac{h_a}{b}.
\end{aligned}$$

Die beiden Variablen c_1 und c_2 lassen sich ebenfalls leicht eliminieren, wir erhalten mit $c_1 = b \cdot \cos(\beta)$ und $c_2 = a \cdot \cos(\alpha)$, dass

$$\begin{aligned}
&\mathcal{A} = a \cdot h_a, \qquad \mathcal{A} = (b \cdot \cos(\beta) + a \cdot \cos(\alpha)) \cdot h_c = ah_c \cdot \cos(\alpha) + bh_c \cdot \cos(\beta) \\
&\sin(\alpha) = \frac{h_c}{a}, \qquad \sin(\beta) = \frac{h_c}{b} \qquad \sin(\alpha+\beta) = \frac{h_a}{b}.
\end{aligned}$$

Der letzte Term auf der rechten Seite in der ersten Zeile ähnelt nun bereits der rechten Seite in der Behauptung. Vergleicht man beide Terme genauer, so sieht man, wie man h_c eliminieren muss: Das h_c vor dem Faktor $\cos(\alpha)$ ersetzen wir mit $h_c = b \cdot \sin(\beta)$, das h_c vor dem Faktor $\cos(\beta)$ ersetzen wir mit $h_c = a \cdot \sin(\alpha)$. Gleichzeitig eliminieren wir noch h_a mit $h_a = b \cdot \sin(\alpha+\beta)$ und erhalten

$$\mathcal{A} = ab \cdot \sin(\alpha+\beta), \qquad \mathcal{A} = ab \cdot \cos(\alpha)\sin(\beta) + ab \cdot \sin(\alpha)\cos(\beta).$$

Die Behauptung folgt nun, wenn wir die beiden Flächeninhalte miteinander gleichsetzen und den Faktor ab auf beiden Seiten kürzen.
Auf diese Weise haben wir nun einen Lösungsweg gefunden, den wir niederschreiben können. Dieser Schritt ist nun wichtig! Auf diese Weise reduziert man nicht nur seine Lösung auf das Wesentliche, vielmehr ist es nun wichtig die Lösung so darzustellen, dass sie von einem anderen Mathematiker gelesen und vor allem verstanden werden kann. Insbesondere spielen eventuelle Fehlwege in dieser Lösung keine Rolle mehr. Eine Möglichkeit wäre:

Musterlösung: Der Flächeninhalt $\mathcal{A}$ des Parallelograms aus Abbildung 7 kann auf zwei Arten berechnet werden: Es ist

$$\mathcal{A} = a \cdot h_a \qquad \text{und} \qquad \mathcal{A} = c \cdot h_c = (c_1 + c_2) \cdot h_c.$$

Aus dem Dreieck FAD erhalten wir, dass

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin(\pi - (\alpha + \beta)) = \frac{h_a}{b},$$

dabei haben wir im ersten Schritt die Symmetrieeigenschaft $\sin(\pi - \varphi) = \sin \varphi$ für alle $\varphi \in \mathbb{R}$ verwendet. Eingesetzt in die erste Gleichung für den Flächeninhalt $\mathcal{A}$ liefert dies

$$\mathcal{A} = ab \cdot \sin(\alpha + \beta).$$

Aus den beiden Dreiecken ECD und AED erhalten wir, dass

$$\sin(\alpha) = \frac{h_c}{a}, \qquad \cos(\alpha) = \frac{c_2}{a}, \qquad \sin(\beta) = \frac{h_c}{b}, \qquad \cos(\beta) = \frac{c_1}{b}.$$

Damit ist

$$c_1 \cdot h_c = ab \cdot \sin(\alpha)\cos(\beta) \qquad \text{und} \qquad c_2 \cdot h_c = ab \cdot \sin(\beta)\cos(\alpha)$$

(in einer handschriftlichen Lösung könnte man diesen Schritt optisch noch schöner hervorheben). Eingesetzt in die zweite Gleichung für den Flächeninhalt $\mathcal{A}$ liefert dies

$$\mathcal{A} = ab \cdot \sin(\alpha)\cos(\beta) + ab \cdot \cos(\alpha)\sin(\beta).$$

Die Behauptung folgt nun durch Gleichsetzen der beiden letzten Ausdrücke für $\mathcal{A}$ und Division durch ab auf beiden Seiten.

5 Wie geht man nun an eine Aufgabe heran?

Wir haben in den vorangegangenen Abschnitten einige heuristische Prinzipien kennengelernt. Jetzt soll aufgezeigt werden, wie man diese einsetzt um eine Aufgabe vollständig zu bearbeiten. Jede Aufgabe, welche Sie in den kommenden Semestern auf Ihren Übungsblättern finden, hat das Ziel Ihnen etwas zu vermitteln, sei es einen Satz aus der Vorlesung weiter zu vertiefen, ein häufig wiederkehrendes Argumentationschema zu vermitteln oder gängige Rechnungen zu üben. Damit dies gelingen kann, ist es notwendig eine Aufgabe nicht nur so weit zu bearbeiten, dass man z.B. eine schriftliche Lösung abgeben kann, sondern auch die gefundene Lösung und den Weg dorthin immer wieder zu reflektieren. Das meinen wir, wenn oben die Vollständigkeit einer Aufgabenbearbeitung betont wird. Oftmals kann man dabei dem einfachen Schema

1. Aufgabe lesen und verstehen
2. Auffinden eines Lösungsplans
3. Ausführen des Lösungsplans und Darstellen der Lösung
4. Kontrolle und Auswertung
5. Rückblick und weiterführende Untersuchungen

folgen. Typischerweise durchläuft man diese Phasen aber nicht unbedingt in linearer Reihenfolge, oft wird man beispielsweise in 2) feststellen, dass man in 1) die Aufgabe doch nur teilweise verstanden hat, dann ist es zweckmäßig mit der in 2) gemachten Erfahrungen Phase 1) nochmals zu durchlaufen. Genauso muss man nochmals zu 2) zurückkehren, wenn der Lösungsplan in 3) nicht durchführbar ist. Oftmals gehen die Phasen 2) und 3) auch miteinander einher, prinzipiell sollte man es aber vermeiden, wenn man einen Teil des Lösungsplans gefunden hat, diesen sofort abzuarbeiten. Einerseits macht man sich damit eventuell sehr viel mehr Arbeit, da man Dinge bearbeitet, welche man eigentlich nicht braucht, andererseits kann man dabei leicht den Überblick verlieren, was dann zu Lücken in den Lösungen führen kann.
Hat man nun seine Lösung gefunden, so sollte eine Phase der Kontrolle und Auswertung folgen, d.h. man sollte seine Lösung kritisch hinterfragen:

- Wurde jeder Lösungsschritt hinreichend begründet?
- Wurden alle gegebenen Voraussetzungen, Größen oder Bedingungen für die Lösung verwendet?

Ist dies nicht der Fall, so ist die Lösung eventuell falsch, zumindest aber lückenhaft oder die gegebene Aufgabe lässt sich weiter verallgemeinern. Im ersten Fall sollte man seine Lösung überdenken. Dabei kann es auch hilfreich sein, sie einem Komilitonen zu erklären, ein anderer Blickwinkel ermöglicht es oft Fehler schneller zu identifizieren.
Abschließend folgt ein Rückblick. Wurden nicht alle Voraussetzungen benötigt, so lässt sich die Aufgabe weiter verallgemeinern und es ist hilfreich diese verallgemeinerte Aufgabe selber zu formulieren. Bei Beweisen kann man nach der Umkehrung der Aussage fragen oder nach weiteren Verallgemeinerungen des Satzes suchen.

Beispiel 5.1. Wir betrachten die folgende Aufgabe:

Sei $p > 3$ eine Primzahl. Was kann man über $p^2 - 1$ aussagen?

Diese Frage ist sehr offen gestellt, sodass wir zunächst nicht wissen, wonach wir suchen sollen. Trotzdem ist der Arbeitsauftrag klar, wir suchen nach besonderen Eigenschaften oder Gemeinsamkeiten aller Zahlen $p^2 - 1$ unter den genannten Voraussetzungen. Am einfachsten ist es zu bemerken, dass p als Primzahl mit $p > 3$ nur ungerade sein kann, d.h. p^2 ist ebenfalls ungerade und $p^2 - 1$ damit gerade. Technisch gesehen haben wir die Aufgabe in ihrem Wortlaut damit gelöst, der Lerneffekt hält sich aber noch in Grenzen.
Versuchen wir also obige Techniken und Strategien einzusetzen. Sucht man nach Gleichungen, so wird man sich vielleicht an den Binomischen Lehrsatz erinnern und bemerken, dass

$$p^2 - 1 = (p-1)(p+1) \tag{1}$$

gilt. Diese Erkenntnis ist mit Sicherheit wichtig, wir sehen aber nicht direkt, wie sie uns weiterhilft, behalten sie aber einmal im Hinterkopf. Noch wissen wir nicht, wonach wir konkret suchen sollen. Betrachten wir also zunächst ein paar Beispiele und fassen diese in einer Tabelle zusammen:

$p > 3$	5	7	11	13	17	19	23	...
$p^2 - 1$	24	48	120	168	288	360	528	...

Wie bereits geagt, sind alle Werte von $p^2 - 1$ gerade. Gibt es aber noch größere gemeinsame Teiler? Suchen wie weiter, so stellen wir fest, dass alle Zahlen in der unteren Tabellenzeile sogar durch 24 geteilt werden können. Noch größere Teiler kann es dabei nicht geben, da 24 bereits der erste Wert in der unteren Zeile der Tabelle ist. Wir formulieren daher die Vermutung:

Für jede Primzahl $p > 3$ ist 24 ein Teiler von $p^2 - 1$,

und betrachten es als unsere neue Aufgabe diese zu beweisen.
Beginnen wir also mit der Ausarbeitung eines Lösungsplans: Aus der Tatsache, dass $p > 3$ eine Primzahl ist, können wir zunächst nur schließen, dass p keine weiteren Teiler außer 1 und sich selbst hat. Ein hilfreiches Teilziel ist damit aber noch nicht auszumachen. Versuchen wir also rückwärts vorzugehen. Wie lässt sich zeigen, dass $p^2 - 1$ durch 24 teilbar ist? Da $24 = 3 \cdot 8$ gilt, würde es genügen zu zeigen, dass $p^2 - 1$ sowohl durch 3 als auch durch 8 geteilt werden kann. Unsere Aufgabe hat sich dadurch bereits etwas vereinfacht. Verwenden wir also die beiden Aussagen $3|(p^2 - 1)$ und $8|(p^2 - 1)$ also als Teilziele um $24|(p^2 - 1)$ zu zeigen. Das verwendete Hilfsmittel ist dabei die Aussage

$$H_1: \qquad a|c \text{ und } b|c \text{ und } a, b \text{ teilerfremd} \quad \Rightarrow \quad (ab)|c.$$

Wie lässt sich nun zeigen, dass $p^2 - 1$ durch 8 geteilt werden kann? Ganz zu Beginn haben wir bemerkt, dass $p^2 - 1$ nur gerade sein kann. Da $8 = 2^3$ eine Potenz von 2 ist, ähneln sich beide Probleme vielleicht etwas, versuchen wir also die gleiche Idee wie vorher zu verwenden. Gleichzeitig müssen wir aber auch die gefundene Gleichung (1) einbauen. Was können wir also daraus schließen? Als Primzahl mit $p > 3$ ist p ungerade, d.h. $p - 1$ und $p + 1$ sind beide gerade. Genauer sind sie zwei aufeinanderfolgende gerade Zahlen, d.h. eine der beiden Zahlen ist nicht nur durch 2, sondern sogar durch 4 teilbar. Einer der beiden Fälle

$$(2|(p-1) \text{ und } 4|(p+1)) \qquad \text{oder} \qquad (4|(p-1) \text{ und } 2|(p+1))$$

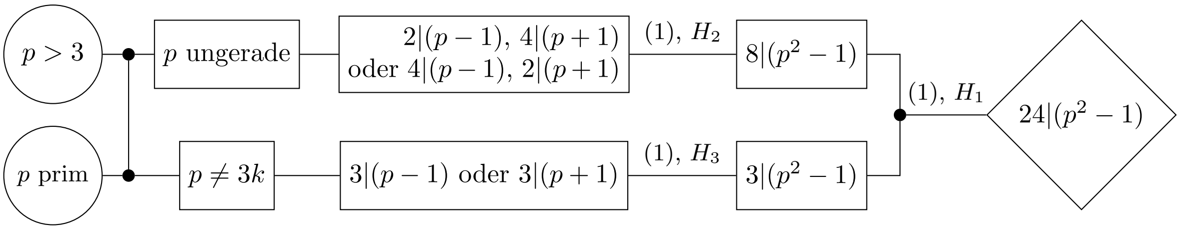

Abbildung 8: Lösungsgraph für die Aufgabe aus 5.1.

muss also eintreten. Zusammengenommen heißt dies, dass

$$8|(p-1)(p+1) \qquad \text{bzw.} \qquad 8|(p^2-1).$$

Als Hilfsmittel haben wir dabei neben (1) die Aussage

$$H_2: \qquad a|b \text{ und } c|d \quad \Rightarrow \quad (ac)|(bd)$$

verwendet.
Es bleibt also noch zu zeigen, dass p^2-1 durch 3 geteilt werden kann. Die Idee ist dabei wieder dieselbe: Da $p > 3$ eine Primzahl ist, ist p auch nicht durch 3 teilbar. Nun folgen die Zahlen $p-1$, p, $p+1$ aber aufeinander, d.h. eine der drei Zahlen muss durch 3 teilbar sein, d.h. einer der beiden Fälle

$$3|(p-1) \text{ oder } 3|(p+1)$$

muss eintreten. Mit der Aussage

$$H_3: \qquad a|b \text{ oder } a|c \quad \Rightarrow a|(bc),$$

folgt damit, dass $3|(p^2-1)$.
Durch kombiniertes Vorwärts- und Rückwärtsarbeiten haben wir uns auf diese Weise einen Lösungsplan (vgl. Abbildung 8) erarbeitet und können nun eine schriftliche Lösung der ursprünglichen Aufgabe formulieren:

Musterlösung: Ist $p > 3$ eine Primzahl, so zeigen wir, dass alle Zahlen p^2-1 durch 24 teilbar sind: Da p eine Primzahl und $p \neq 2$ ist, ist p insbesondere ungerade, bzw. $p-1$ und $p+1$ sind gerade. Genauer sind $p-1$ und $p+1$ aufeinanderfolgende gerade Zahlen und eine der beiden Zahlen daher auch durch 4 teilbar. D.h. es gilt

$$(2|(p-1) \text{ und } 4|(p+1)) \qquad \text{oder} \qquad (4|(p-1) \text{ und } 2|(p+1)).$$

Wgen

$$a|b \text{ und } c|d \quad \Rightarrow \quad (ac)|(bd)$$

folgt

$$8|(p-1)(p+1) \qquad \text{bzw.} \qquad 8|(p^2-1)$$

da $(p-1)(p+1) = p^2-1$ ist.
Als Primzahl, welche größer als 3 ist, ist p aber auch kein Vielfaches von 3. Nun muss aber eine der drei aufeinanderfolgenden Zahlen $p-1$, p, $p+1$ durch 3 teilbar sein. Es folgt daher, dass

$$3|(p-1) \qquad \text{oder} \qquad 3|(p+1).$$

Zusammengenommen erhalten wir, dass

$$3|(p-1)(p+1) \qquad \text{bzw.} \qquad 3|(p^2-1)$$

da

$$a|b \text{ oder } a|c \quad \Rightarrow \quad a|(bc).$$

Aus $8|(p^2-1)$ und $3|(p^2-1)$ erhalten wir also, dass $24|(p^2-1)$, da 3 und 8 keine gemeinsamen Teiler besitzen und allgemein

$$a|c \text{ und } b|c \quad \Rightarrow \quad (ab)|c$$

gilt.

Zur Kontrolle und Auswertung: In der Musterlösung begründen wir jeden Schritt dadurch, dass wir eine allgemeine Regel zitieren. Fehler in der Argumentation werden dadurch ausgeschlossen. Bei der Frage, ob wir alle Voraussetzungen verwendet haben, fällt jedoch auf, dass dies hier nicht der Fall zu sein scheint. Eigentlich haben wir für p doch nur die Aussagen, dass p ungerade und $p \neq 3k$ ist gebraucht, nicht aber, dass p eine Primzahl ist. Beide Kriterien werden z.B. von 25, die keine Primzahl ist, erfüllt und tatsächlich ist

$$25^2 - 1 = 624 = 24 \cdot 26.$$

Die in der Lösung gefundene Aussage lässt sich also weiter verallgemeinern:

Sei p ungerade und nicht durch 3 teilbar, dann ist $p^2 - 1$ durch 24 teilbar.

Weitere Untersuchungen: Ausgehend von dieser Erkenntnis kann man sich z.B. weitere Fragen stellen. Schränkt man z.B. die erlaubten Teiler von p weiter ein, so wird $p^2 - 1$ zwar nicht zwangsläufig höhere Teiler haben (vgl. auch obigen Kommentar), man kann sich aber fragen was mit dem Term

$$(p-2)(p-1)(p+1)(p+2)$$

passiert.

Literatur

[1] Daniel Grieser, *Mathematisches Problemlösen und Beweisen: Eine Entdeckungsreise in die Mathematik*, Springer Spektrum, Wiesbaden, 2013.

[2] Paul R. Halmos, *I want to be a mathematician: an automathography*, Springer, New York,NY; Berlin; Heidelberg [u.a.], 1985.

[3] Helmut König, *Heuristik beim Lösen problemhafter Aufgaben aus dem außerunterrichtlichen Bereich*, Bezirkskomitee Chemnitz zur Förderung math.-nat. begabter und interessierter Schüler.

[4] George Pólya, *How to solve it: a new aspect of mathematical method*, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ; Oxford, 2014.

[5] Horst Sewerin, *Mathematische Schülerwettbewerbe*, Manz Verlag, München, 1982.