Prof. TeknD Timo Weidl
Jan Köllner, M.Sc.
Simon Barth, M.Sc., Andreas Bitter, M.Sc.
FB Mathematik, Universität Stuttgart

Analysis 1 (WS 2018/19) — Blatt 1

Seit man begonnen hat, die einfachsten Behauptungen zu beweisen,
erwiesen sich viele von ihnen als falsch.
- Bertrand Russel (1872-1970)

Aufgaben zur Abgabe am Ende der Vorlesung am 24. Oktober

1.1. Es seien p, q und r Aussagen. Gelten dann die folgenden Äquivalenzen? Verifizieren Sie die korrekten Aussagen mit Wahrheitstabellen und widerlegen Sie die falschen.

(a) $p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ **(b)** $(p \wedge q) \vee r \Leftrightarrow p \wedge (q \vee r)$

(c) $(p \to q) \Leftrightarrow ((\neg q) \to (\neg p))$ **(d)** $\neg(p \vee q) \Leftrightarrow (\neg p) \wedge (\neg q)$

1.2. Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Bilden Sie jeweils auch die Negation.

(a) $\exists_{n\in\mathbb{N}} \forall_{m\in\mathbb{Z}}\ m \leq n,$ **(b)** $\forall_{n\in\mathbb{N}}\ (2|n\ \vee\ 2|(n+1))\,,$

(c) $\forall_{x\leq 1}\ \big(|x-3| - |x-1| \geq 1\big),$ **(d)** $\forall_{x\geq 6}\Big(\big(\sqrt{x+2} - \sqrt{x-6} = 2\big) \to \big(x \in \{9,7\}\big)\Big).$

Votieraufgaben

1.3. Es bezeichne $\mathbb{N}$ die Menge der natürlichen Zahlen und $\mathcal{P}$ die Menge aller Primzahlen. Zeigen Sie die folgenden Aussagen. In manchen Fällen ist die indirekte Beweisführung geeigneter.

(a) Es gibt keine größte Primzahl.

(b) Sei $n \in \mathbb{N}$. Dann ist n gerade genau dann, wenn n^2 gerade ist.

(c) $\forall_{p\in\mathcal{P}} \forall_{n\in\mathbb{N}}\ \big(p|n\ \leftrightarrow\ p|n^2\big)\,.$

Sie dürfen dabei ohne Beweis verwenden, dass jede natürliche Zahl $n \geq 2$ eine (bis auf die Reihenfolge der Faktoren) eindeutige Primfaktorzerlegung besitzt.

1.4. Es seien A, B, K, M Mengen und $\{A_\kappa\}_{\kappa\in K}$ sei eine Familie von Mengen mit der Indexvariablen $\kappa \in K$. Zeigen Sie unter Verwendung der entsprechenden Regeln der Aussagenlogik

(a) die Distributivgesetze

$$A \cap \left(\bigcup_{\kappa\in K} A_\kappa\right) = \bigcup_{\kappa\in K} (A \cap A_\kappa)\,, \quad A \cup \left(\bigcap_{\kappa\in K} A_\kappa\right) = \bigcap_{\kappa\in K} (A \cup A_\kappa)\,,$$

(b) die de Morganschen Gesetze

$$(A \cup B)^c_M = A^c_M \cap B^c_M, \quad \left(\bigcup_{\kappa\in K} A_\kappa\right)^c_M = \bigcap_{\kappa\in K} (A_\kappa)^c_M.$$

 weidl@mathematik.uni-stuttgart.de jan.koellner@mathematik.uni-stuttgart.de
simon.barth@mathematik.uni-stuttgart.de andreas.bitter@mathematik.uni-stuttgart.de

1.5. Nachfolgende Aussagen sind falsch. Wo genau liegt der Fehler in ihrem 'Beweis'?

Satz. *Die größte natürliche Zahl ist* 1.

Beweis. Sei n die größte natürliche Zahl. Angenommen, $n > 1$. Dann wäre $n^2 > n$ aber größer. Widerspruch! Also gilt $n = 1$. □

Satz. $5 = 0$

Beweis. Sei $x \in \mathbb{R}$ eine Lösung der Gleichung $x^2 + 2x + 2 = 0$. Weil $x = 0$ keine Lösung dieser Gleichung ist, können wir diese mit x multiplizieren. Dies führt zu $x^3 + 2x^2 + 2x = 0$ bzw. äquivalent $x^3 + 2x^2 + 2x + 2 = 2$. Also muss $x^3 + x^2 = 2$ gelten, woraus $x = 1$ folgt, da $x \in \mathbb{R}$. Setzen wir $x = 1$ in die ursprüngliche Gleichung ein, so sehen wir $0 = 1^2 + 2 \cdot 1 + 2 = 5$. □

Zusatzaufgaben

1.6. Auf einem Planeten befinden sich Roboter mit folgenden Eigenschaften: i) Sie können sich gegenseitig sehen, aber nicht miteinander kommunizieren. ii) Sie denken logisch. iii) Wenn ein Roboter erkannt hat, dass er einen Makel besitzt – und nur dann – schaltet er sich zu Beginn des folgenden Tages ab.

Eines Tages erscheint ein Raumschiff auf dem Planeten, beobachtet die Roboter und teilt den Robotern mit, dass es Roboter mit defekten Stellen auf ihrem Rücken gibt. Das Raumschiff fliegt wieder davon. Nach 400 Tagen schalten sich plötzlich alle Roboter ab. Wieviele Roboter waren auf dem Planeten, wenn der Tag der Ankunft des Raumschiffs als Tag Null gesehen wird?