

## Analysis 1 (WS 2018/19) — Blatt 2

*Each thing in the world has names or unnamed relations to everything else. Relations are infinite in number and kind. To be is to be related. It is evident that the understanding of relations is a major concern of all men and women. Are relations a concern of mathematics? They are so much its concern that mathematics is sometimes defined to be the science of relations.*

*- Cassius Jackson Keyser (1862-1947)*

### Aufgaben zur Abgabe am Ende der Vorlesung am 31. Oktober

**2.1.** Überprüfen Sie jeweils, ob es sich bei folgenden Relationen um Funktionen handelt und falls ja, ob diese injektiv/surjektiv/bijektiv zwischen  $A$  und  $B$  sind.

- (a)  $R_1 = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 2)\}$ ,  $A = \{1, 2\}$ ,  $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ,  
(b)  $R_2 = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4)\}$ ,  $A = \{1, 2, 3\}$ ,  $B = \{2, 3, 4\}$ ,  
(c)  $R_3 = \{(n, n + 1) : n \in \mathbb{N}\}$ ,  $A = B = \mathbb{N}$ ,  
(d)  $R_4 = \{(n, m) : n = m^2\}$ ,  $A = B = \mathbb{Z}$ .

**2.2.** (a) Seien  $A, B, C, D$  Mengen und seien  $f, g, h$  Funktionen zwischen  $A$  und  $B$ ,  $B$  und  $C$  bzw.  $C$  und  $D$ . Beweisen Sie, dass die Komposition von Funktionen assoziativ ist, d.h.

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$

Zeigen Sie insbesondere, dass die Definitionsbereiche von  $h \circ (g \circ f)$  und  $(h \circ g) \circ f$  übereinstimmen.

(b) Es sei  $f$  eine bijektive Funktion von  $A$  auf  $B$ , welche der Relation  $R_f$  entspricht. Zeigen Sie, dass die inverse Relation  $R_f^{-1}$  ebenfalls eine Funktion  $f^{-1}$  definiert, welche ihrerseits bijektiv ist und für die  $(f^{-1})^{-1} = f$  gilt.

**2.3.** (a) Beweisen Sie mit vollständiger Induktion die Bernoullische Ungleichung

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx$$

für alle  $n \in \mathbb{N}$  und alle  $x \in \mathbb{R}$ ,  $x > -1$ .

(b) Sei  $p > 0$  und  $x_n = p^{\frac{1}{n}} - 1$  für  $n \in \mathbb{N}$ . Folgern Sie aus der Bernoullischen Ungleichung:

$$\forall_{n \in \mathbb{N}} \quad x_n \leq \frac{p - 1}{n}$$

**2.4.** (a) Nutzen Sie das Prinzip der vollständigen Induktion, um folgende Aussagen zu zeigen

$$(i) \quad \forall_{n \in \mathbb{N}} \quad \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1), \quad (ii) \quad \forall_{n \in \mathbb{N}} \quad \sum_{k=1}^{2^n-1} \frac{1}{k} \geq \frac{n}{2}.$$

(b) Sei  $n \in \mathbb{N}$  beliebig. Finden und beweisen Sie eine geschlossene Formel für

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)}.$$