Prof. TeknD Timo Weidl
Jan Köllner, M.Sc.
Simon Barth, M.Sc., Andreas Bitter, M.Sc.
FB Mathematik, Universität Stuttgart

Analysis 1 (WS 2018/19) — Blatt 4

Warum sind Zahlen schön?
– Das ist wie die Frage, warum Beethovens Neunte schön sei. Wenn Sie das nicht selbst erkennen, kann es Ihnen niemand erklären. Ich weiß, dass Zahlen Schönheit besitzen. Wenn sie nicht schön sind, dann ist überhaupt nichts schön.
(Paul Erdös, ungarischer Mathematiker; 1913-1996)

Aufgaben zur Abgabe in der Vorlesung am 14. November

4.1. Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge rationaler Zahlen.

(a) Zeigen Sie: Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge, dann ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt, d.h. es gibt ein $C \in \mathbb{Q}$ sodass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$|a_n| \le C$$

(b) Zeigen Sie: Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge, dann gilt

$$|a_n - a_{n+1}| \to 0 \quad \text{für } n \to \infty. \tag{1}$$

Gilt auch die Umkehrung, d.h. ist jede Folge rationaler Zahlen, die (1) erfüllt, eine Cauchyfolge?

$*$ **(c)** Zeigen Sie: Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge und $N \in \mathbb{N}$ fest, dann gilt

$$|a_n - a_{n+N}| \to 0 \quad \text{für } n \to \infty. \tag{2}$$

$*$ **(d)** Gilt in **(c)** auch die Umkehrung, d.h. ist jede Folge rationaler Zahlen, die (2) erfüllt, eine Cauchyfolge?

Mit $*$ markierte Teilaufgaben sind als Bonus gedacht und geben jeweils einen Zusatzpunkt.

Votieraufgaben

4.2. Es seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folgen rationaler Zahlen mit den Grenzwerten $a \in \mathbb{Q}$ und $b \in \mathbb{Q}$.

(a) Zeigen Sie, dass $(a_n \cdot b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $a \cdot b$ konvergiert.

(b) Zeigen Sie: Gilt $b_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $b \neq 0$, so konvergiert $\left(\frac{1}{b_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $\frac{1}{b}$.

(c) Folgern Sie: Unter den Voraussetzungen in **(b)** konvergiert die Folge $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $\frac{a}{b}$.

(d) Zeigen Sie: Gilt $a_n \le b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so folgt $a \le b$. Gilt die entsprechende Aussage auch für strikte Ungleichungen?

4.3. Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei rekursiv gegeben durch

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{10 + a_n^2}{a_n}$$

(a) Zeigen Sie, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Fundamentalfolge rationaler Zahlen ist.

(b) Zeigen Sie: Falls $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ einen Grenzwert a besitzt, so erfüllt dieser die Gleichung

$$a^2 = 10.$$

(c) Zeigen Sie, dass es keine rationale Zahl a gibt mit $a^2 = 10$ und schließen Sie, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ keinen Grenzwert in $\mathbb{Q}$ besitzt.

© weidl@mathematik.uni-stuttgart.de jan.koellner@mathematik.uni-stuttgart.de
simon.barth@mathematik.uni-stuttgart.de andreas.bitter@mathematik.uni-stuttgart.de

Prof. TeknD Timo Weidl
Jan Köllner, M.Sc.
Simon Barth, M.Sc., Andreas Bitter, M.Sc.
FB Mathematik, Universität Stuttgart

4.4. **(a)** Seien $n \in \mathbb{N}$ und $a \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ beliebig. Zeigen Sie die geometrische Summenformel

$$\sum_{k=0}^{n} a^k = \frac{a^{n+1}-1}{a-1}.$$

(b) Für welche $a \in \mathbb{Q}$ konvergiert die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = a^n$?

(c) Untersuchen Sie, für welche $a \in \mathbb{Q}$ der Grenzwert

$$\sum_{k=0}^{\infty} a^k := \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a^k.$$

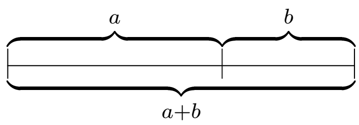
existiert.

Zusatzaufgaben

4.5. Gegeben sei eine Strecke der Länge $a+b$, wobei $a, b > 0$. Gilt

$$\frac{a}{b} = \frac{a+b}{a},$$

so ist die Strecke im **goldenen Schnitt** geteilt und wir nennen die Zahl $\Phi = \frac{a}{b}$ **goldenen Schnitt** von $a+b$. Φ beschreibt das Teilungsverhältnis einer Strecke der Länge $a+b$ in zwei Teilstrecken, bei dem das Verhältnis der gesamten Strecke zur größeren Teilstrecke dem Verhltnis der größeren zur kleineren Teilstrecke entspricht (vgl. Skizze).



(a) Zeigen Sie, dass Φ nicht von a und b abhängt, der Gleichung

$$\Phi = 1 + \frac{1}{\Phi}$$

genügt und irrational ist.

(b) Die Folge der **Fibonacci-Zahlen** $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist rekursiv gegeben durch

$$f_1 = 1 = f_2,\ f_n = f_{n-1} + f_{n-2},\ \text{falls } n > 2.$$

Zeigen Sie: Falls die Folge $\left(\frac{f_{n+1}}{f_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ der Quotienten aufeinander folgender Fibonacci-Zahlen konvergiert, dann gegen den goldenen Schnitt.

(c) Nutzen Sie die starke Form der vollständigen Induktion, um zu zeigen, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ die Gleichheit

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\Phi^n - (-\Phi)^{-n}\right)$$

gilt.

© weidl@mathematik.uni-stuttgart.de jan.koellner@mathematik.uni-stuttgart.de
simon.barth@mathematik.uni-stuttgart.de andreas.bitter@mathematik.uni-stuttgart.de