Prof. TeknD Timo Weidl
Jan Köllner, M.Sc.
Simon Barth, M.Sc., Andreas Bitter, M.Sc.
FB Mathematik, Universität Stuttgart

Analysis 1 (WS 2018/19) — Blatt 5

Bitte vergiss alles, was du auf der Schule gelernt hast, denn du hast es nicht gelernt.
(Edmund Landau, deutscher Mathematiker; 1877 -1938)

Aufgaben zur Abgabe in den Übungen am 22./23. November

5.1. Untersuchen Sie die durch

(a) $a_n = \dfrac{n^2}{2n^2+n}$, **(b)** $b_n = \dfrac{2^n - 3^n}{2^n + 3^n}$, **(c)** $c_1 = c_2 = 1,\ c_{n+1} = c_n + c_{n-1},\ n \geq 3$

gegebenen Folgen auf Konvergenz für $n \to \infty$ gegen eine rationale Zahl und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert. Argumentieren Sie dabei sorgfältig und verwenden Sie nur die Definition sowie in der Vorlesung oder den Übungen behandelte Sätze.

5.2. **(a)** Zeigen Sie die Korrektheit der Definition der Multiplikation zweier reeller Zahlen x und y, d.h., dass für Fundamentalfolgen $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}, (\tilde{r}_n)_{n\in\mathbb{N}} \in x$, und $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}, (\tilde{s}_n)_{n\in\mathbb{N}} \in y$ auch $(r_n \cdot s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Fundamentalfolge ist und dass $(r_n \cdot s_n)_{n\in\mathbb{N}} \sim (\tilde{r}_n \cdot \tilde{s}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gilt.

(b) Zeigen Sie, dass die Multiplikation reeller Zahlen assoziativ ist, d.h. für $x, y, z \in \mathbb{R}$ gilt

$$(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z).$$

(c) Zeigen Sie das Distributivgesetz der Addition und Multiplikation in $\mathbb{R}$, d.h., dass für $x, y, z \in \mathbb{R}$

$$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$$

gilt.

Votieraufgaben

5.3. Seien $x, y \in \mathbb{R}$.

(a) Zeigen Sie durch Fallunterscheidung:

$$|x| \geq 0 \quad \text{sowie} \quad x = 0 \ \Leftrightarrow\ |x| = 0$$

(b) Zeigen Sie ausgehend von der Definition:

(i) $(x, y \geq 0 \ \vee\ x, y \leq 0) \Rightarrow\ x{\cdot}y \geq 0$, **(ii)** $\big((x \geq 0 \wedge y \leq 0) \vee (x \leq 0 \wedge y \geq 0)\big) \Rightarrow x{\cdot}y \leq 0$

(c) Zeigen Sie mit Hilfe von **(b)** und einer Fallunterscheidung, dass der Betrag multiplikativ ist, d.h

$$|x \cdot y| = |x| \cdot |y|.$$

(d) Beweisen Sie die *Parallelogrammgleichung*

$$|x + y|^2 + |x - y|^2 = 2|x|^2 + 2|y|^2.$$

© weidl@mathematik.uni-stuttgart.de jan.koellner@mathematik.uni-stuttgart.de
simon.barth@mathematik.uni-stuttgart.de andreas.bitter@mathematik.uni-stuttgart.de

5.4. **(a)** Beweisen Sie für $r, s \in \mathbb{Q}$ die *Dreiecksungleichung*

$$|r+s| \leq |r| + |s|$$

sowie die *umgekehrte Dreiecksungleichung*

$$\big||r| - |s|\big| \leq |r \pm s|.$$

(b) Sei $(r_n)_{n\in\mathbb{N}} \in x$ eine Fundamentalfolge. Zeigen Sie unter Verwendung der umgekehrten Dreiecksungleichung: $(|r_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Cauchyfolge und $(|r_n|)_{n\in\mathbb{N}} \in |x|$.

(c) Folgern Sie, dass die Dreiecksungleichung und die umgekehrte Dreiecksungleichung für beliebige reelle Zahlen $x, y \in \mathbb{R}$ gelten.
Hinweis: Nehmen Sie an, die Ungleichungen gelten nicht und führen Sie diese Annahme mit Hilfe von **(a)** auf einen Widerspruch.

5.5. **(a)** Seien $a, b, c \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie

$$\big(\forall_{x\in\mathbb{R}} \quad ax^2 + bx + c \geq 0\big) \iff \big(a > 0 \quad \wedge \quad b^2 \leq 4ac\big) \quad \vee \quad \big(a = b = 0 \quad \wedge \quad c \geq 0\big)$$

(b) Zeigen Sie, dass für reelle Zahlen $a_k, b_k \in \mathbb{R}$ die folgende Ungleichung gilt:

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right)$$

Hinweis: Wenden Sie dazu **(a)** an auf $\sum\limits_{k=1}^{n} (a_k x + b_k)^2$.

5.6. **(a)** Seien $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ und gelte $a < b,\ c < d$. Zeigen Sie, dass die Intervalle (a, b) und (c, d) gleichmächtig sind.

(b) Zeigen Sie, dass das Intervall $(-1, 1)$ und $\mathbb{R}$ gleichmächtig sind. Mit **(a)** ist damit jedes nichtleere offene Intervall gleichmächtig zu $\mathbb{R}$.

(c) Sind $(0, 1)$ und $(0, 1) \times (0, 1)$ gleichmächtig?

Zusatzaufgaben

5.7. **(a)** Zeigen Sie, dass die Menge

$$M := \{S \subset \mathbb{N} \mid S \text{ endlich oder } \mathbb{N} \setminus S \text{ endlich}\}$$

abzählbar ist.

(b) Zeigen Sie, dass die Potenzmenge

$$\mathcal{P}(\mathbb{N}) = \{M \subset \mathbb{N}\}$$

nicht abzählbar ist.

© weidl@mathematik.uni-stuttgart.de jan.koellner@mathematik.uni-stuttgart.de
simon.barth@mathematik.uni-stuttgart.de andreas.bitter@mathematik.uni-stuttgart.de