Analysis 1 (WS 2018/19) — Blatt 6

Die Erweiterung des Zahlenbegriffes auf das Irrationale und das Imaginäre ist der größte Fortschritt, den die reine Mathematik jemals gemacht hat.
(Hermann Hankel, deutscher Mathematiker; 1839-1873)

Aufgaben zur Abgabe am Ende der Vorlesung am 28.11.2018

6.1. **(a)** Zeigen Sie ausgehend von den Rechenvorschriften die Distributivität der Addition und Multiplikation in den komplexen Zahlen.

(b) Zeigen Sie die Eindeutigkeit des neutralen Elements der Addition und des neutralen Elements der Multiplikation auf $\mathbb{C}$. Zeigen Sie für $z \in \mathbb{C}$ die Eindeutigkeit des inversen Elements $-z$ der Addition. Zeigen Sie dies auf zwei Arten: Nutzen Sie

(i) die Körpereigenschaften **(ii)** die Rechenvorschriften

von $\mathbb{C}$.

Votieraufgaben

6.2. Bestimmen Sie Betrag, Real- und Imaginärteil folgender komplexer Zahlen

$$\textbf{(a)}\quad \frac{1+2\mathrm{i}}{3-4\mathrm{i}} + \frac{2-\mathrm{i}}{5\mathrm{i}}, \quad \textbf{(b)}\quad \left(\frac{1-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}\right)^{2018}, \quad \textbf{(c)}\quad \sqrt{\mathrm{i}}, \quad \textbf{(d)}\quad \cos(\mathrm{i}), \quad \textbf{(e)}\quad \mathrm{Ln}(\mathrm{i}), \quad \textbf{(f)}\quad \mathrm{i}^{\mathrm{i}}.$$

6.3. Skizzieren Sie die folgenden Mengen in der komplexen Zahlenebene:

$$A = \{z \in \mathbb{C} \mid 1 < |z - 5\mathrm{i}| < 4\}, \quad B = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z^2) < 0\}, \quad C = \left\{z \in \mathbb{C} \mid \frac{1}{3} \leq \frac{|z-1|}{|z+1|} < \frac{1}{2}\right\}$$

6.4. **(a)** Zeigen Sie, dass für $p, q \in \mathbb{C}$ die Lösungen der quadratischen Gleichung $z^2 - 2pz + q = 0$ durch

$$z = p + \sqrt{p^2 - q}$$

gegeben sind. Hierbei bezeichnet $\sqrt{z}$ die (mehrwertige) komplexe Quadratwurzel einer komplexen Zahl z.

(b) Bestimmen Sie jeweils die Menge aller komplexen Lösungen der Gleichungen

$$\textbf{(i)}\quad (z+2)^2 + 1 = 0, \quad \textbf{(ii)}\quad z^4 = -81, \quad \textbf{(iii)}\quad a|z|^2 + \bar{b}z + b\bar{z} + c = 0$$

für $a, c \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{C}$ und veranschaulichen Sie diese jeweils geometrisch.

(c) Bestimmen Sie alle $z \in \mathbb{C}$, welche der Gleichung $\cos(z) = 2$ genügen.

bitte wenden!

6.5. Sei $z \in \mathbb{C}$.

(a) Zeigen Sie:

$$\textbf{(i)} \quad \mathrm{Re}(z) = \frac{z + \overline{z}}{2}, \quad \textbf{(ii)} \quad \mathrm{Im}(z) = \frac{z - \overline{z}}{2\mathrm{i}}, \quad \textbf{(iii)} \quad |\mathrm{Re}(z)| \leq |z|, \quad \textbf{(iv)} \quad |\mathrm{Im}(z)| \leq |z|$$

(b) Zeigen Sie, dass für $\omega \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ gilt:

$$\textbf{(i)} \quad (\overline{\omega})^{-1} = \overline{(\omega^{-1})}, \quad \textbf{(ii)} \quad |\omega^{-1}| = \frac{1}{|\omega|}, \quad \textbf{(iii)} \quad \left|\frac{z}{\omega}\right| = \frac{|z|}{|\omega|}$$

Zusatzaufgaben

6.6. Zeigen Sie, dass für beliebige komplexe Zahlen $\omega, z \in \mathbb{C}$ die Gleichungen

$$\textbf{(i)} \quad |1 - \overline{\omega} z|^2 - |\omega - z|^2 = (1 - |\omega|^2)(1 - |z|^2), \quad \textbf{(ii)} \quad |\omega + z|^2 + |\omega - z|^2 = 2|\omega|^2 + 2|z|^2$$

gelten.

© weidl@mathematik.uni-stuttgart.de jan.koellner@mathematik.uni-stuttgart.de
simon.barth@mathematik.uni-stuttgart.de andreas.bitter@mathematik.uni-stuttgart.de