Prof. TeknD Timo Weidl
Jan Köllner, M.Sc.
Simon Barth, M.Sc., Andreas Bitter, M.Sc.
FB Mathematik, Universität Stuttgart

Analysis 1 (WS 2018/19) — Blatt 7

Vergesst nicht: Wenn ihr schwimmen lernen wollt, dann geht mutig ins Wasser;
wenn ihr lernen wollt, Aufgaben zu lösen, dann löst sie.
(George Polya, ungarischer Mathematiker; 1887-1985)

Aufgaben zur Abgabe am Ende der Vorlesung am 5.12.2018

7.1. Auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ sei die Relation R gegeben durch

$$zR\omega \Leftrightarrow z \text{ und } \omega \text{ liegen auf einer Geraden durch den Ursprung}$$

Zeigen Sie, dass R eine Äquivalenzrelation ist und besimmen Sie für $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ die Äquivalenzklasse $[z]$.

7.2. Sei (M, d) ein metrischer Raum.

(a) Zeigen Sie für $x, y, w, z \in M$ die Ungleichungen

$$\textbf{(i)} \quad |d(x,z) - d(y,z)| \leq d(x,y), \qquad \textbf{(ii)} \quad |d(x,y) - d(z,w)| \leq d(x,z) + d(w,y).$$

(b) Zeigen Sie, dass durch

$$\textbf{(i)} \quad d_1(x,y) = \min\{1, d(x,y)\} \qquad \textbf{(ii)} \quad d_2(x,y) = \frac{d(x,y)}{1 + d(x,y)},$$

ebenfalls Metriken auf M definiert werden.

Votieraufgaben

7.3. **(a)** Sei $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ und p ein komplexes Polynom n-ten Grades von der Form

$$p(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + a_{n-2}z^{n-2} + \cdots + a_1 z + a_0.$$

Seien $z_1, z_2, \ldots, z_k$ die Nullstellen von p mit Vielfachheiten $p_1, p_2, \ldots, p_k$. Zeigen Sie, dass dann folgende Gleichungen gelten:

$$\textbf{(i)} \quad a_{n-1} = -(p_1 \cdot z_1 + p_2 \cdot z_2 + \cdots + p_k \cdot z_k), \qquad \textbf{(ii)} \quad a_0 = (-1)^n z_1^{p_1} \cdot z_2^{p_2} \cdots z_k^{p_k}$$

Diese Aussage ist Teil des *Satzes von Vieta*.

(b) Schreiben Sie folgende Polynome jeweils als Produkt von Polynomen ersten Grades.

$$\textbf{(i)} \quad p(z) = z^3 + 3z^2 + 7z + 5, \qquad \textbf{(ii)} \quad p(z) = z^3 + (1+i)z^2 + (2+i)z + 2$$

Hinweis: Sie können eine Nullstelle erraten und anschließend eine Polynomdivision durchführen.

7.4. Wichtige Grenzwerte I

Weisen Sie nach, dass folgende Identitäten gelten. Wenn nicht anders angegeben, ist $a \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$.

$$\textbf{(a)} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{n^k}{a^n} = 0, \quad |a| > 1, \qquad \textbf{(b)} \quad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1, \qquad \textbf{(c)} \quad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1, \quad a > 0.$$

Hinweis: Für **(a)** können Sie z.B. zeigen und verwenden, dass $(1+x)^n \geq n^{k+1}\frac{x^{k+1}}{2^k(k+1)!}$ für $n > 2k$ und $x > 0$. Der Grenzwert in **(b)** kann durch geschickte Anwendung von **(a)** bestimmt werden.

Mehr davon auf dem nächsten Blatt...

7.5. **(a)** Welche der folgenden Funktionen bilden eine Metrik auf $\mathbb{R}$? Begründen Sie Ihre Antwort.

$$\textbf{(i)} \quad d_1(x,y) = \begin{cases} 0, & x = y, \\ 1, & x \neq y, \end{cases} \qquad \textbf{(ii)} \quad d_2(x,y) = \begin{cases} 1, & x > y, \\ |x-y|, & \text{sonst}, \end{cases}$$

$$\textbf{(iii)} \quad d_3(x,y) = |x-y|, \qquad \textbf{(iv)} \quad d_4(x,y) = |x-y| + (x-y)^2$$

(b) Bestimmen und skizzieren Sie $U_\varepsilon(0) = \{x \in \mathbb{R} \mid d(x,0) < \varepsilon\}$ für $\varepsilon = 1$ bzw. $\varepsilon = 2$ für jede der Funktionen d aus **(a)**, welche eine Metrik ist.

(c) Finden Sie ein nichttriviales notwendiges und hinreichendes Kriterium dafür, dass eine Folge im Raum $(\mathbb{R}, d_1)$ konvergiert.

Zusatzaufgaben

7.6. Sei $\mathbb{N}^\mathbb{N}$ die Menge aller Funktionen $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Für $f \neq g$ setzen wir

$$m(f,g) = \min\{n \in \mathbb{N} \mid f(n) \neq g(n)\}.$$

Zeigen Sie, dass durch

$$d(f,g) = \begin{cases} 0, & \text{falls } f = g, \\ 2^{-m(f,g)}, & \text{sonst} \end{cases}$$

eine Metrik auf $\mathbb{N}^\mathbb{N}$ definiert wird.