Prof. TeknD Timo Weidl
Jan Köllner, M.Sc.
Simon Barth, M.Sc., Andreas Bitter, M.Sc.
FB Mathematik, Universität Stuttgart

Analysis 1 (WS 2018/19) — Blatt 12

Es ist nicht das Wissen, sondern das Lernen, es ist nicht das Besitzen, sondern das Erwerben, es ist nicht das Dasein, sondern das Hinkommen, was den großen Genuss gewährt.
(Carl Friedrich Gauß, deutscher Mathematiker; 1777-1855)

Aufgaben zur Abgabe am Ende der Vorlesung am 23.1.2018

12.1. Untersuchen Sie die folgenden Mengen M_k auf Kompaktheit, jeweils als Teilmenge des angegebenen metrischen Raums (M, d).

(a) $M_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ mit $(M,d) = \left(\mathbb{R}^2, d_{|\cdot|}\right)$,

(b) $M_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - y^2 = 1\}$ mit $(M,d) = \left(\mathbb{R}^2, d_{|\cdot|}\right)$,

(c) $M_3 = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right]$ mit $(M,d) = \left(\mathbb{R}, d_{|\cdot|}\right)$,

(d) $M_4 = \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{x_0\}$ mit $(M,d) = \left(\mathbb{R}, d_{|\cdot|}\right)$, wobei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen mit Grenzwert x_0 sei.

12.2. Für $n \in \mathbb{N}$ sei $a_n = n \cdot \cos\left(n\frac{\pi}{2}\right)$.

(a) Skizzieren Sie die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(b) Bestimmen Sie zu jeder der folgenden Eigenschaften eine Teilfolge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, die

(i) streng monoton wächst, **(ii)** konvergiert,

(iii) $\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = +\infty$ erfüllt bzw. **(iv)** $\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = \infty$ und $\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} \neq \pm\infty$ erfüllt.

(c) Bestimmen Sie die Menge aller Verdichtungspunkte von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und die Menge aller Häufungspunkte von $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Votieraufgaben

12.3. Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ und sei $f : [a,b] \to [a,b]$ eine stetige Funktion.

(a) Zeigen Sie, dass dann ein $x \in [a,b]$ mit $f(x) = x$ existiert. Stimmt die Aussage auch, wenn das abgeschlossene Intervall $[a,b]$ durch das offene Intervall (a,b) ersetzt wird?

(b) Angenommen, es gilt $f(a) = f(b)$. Zeigen Sie, dass dann ein $c \in [a, \frac{b+a}{2}]$ mit $f(c) = f\left(c + \frac{b-a}{2}\right)$ existiert.

12.4. Beweisen Sie nachfolgende Additionstheoreme und Vielfachenformeln für die **komplexen** Winkel- und Hyperbelfunktionen. Dabei sei jeweils $z, w \in \mathbb{C}$. Die beiden mit $*$ markierten Teilaufgaben geben zusammengenommen einen Zusatzpunkt.

(a) $(\sin(z))^2 + (\cos(z))^2 = 1$,

(b) $(\cosh(z))^2 - (\sinh(z))^2 = 1$,

(c) $\cos(z+w) = \cos(z)\cos(w) - \sin(z)\sin(w)$ und $\sin(z+w) = \sin(z)\cos(w) + \cos(z)\sin(w)$

$*$ **(d)** $\cos(5x) = 16(\cos(x))^5 - 20(\cos(x))^3 + 5\cos(x), \quad x \in \mathbb{R}$

$*$ **(e)** Ist $\cos\left(\frac{\pi}{10}\right)$ rational oder irrational?
Hinweis: Nutzen Sie **(d)**, um den Wert von $\cos\left(\frac{\pi}{10}\right)$ zu berechnen.

12.5. **(a)** Zeigen Sie, dass für $l, n \in \mathbb{N}$ mit $1 \leq l \leq \frac{n}{2}$ die folgende Ungleichungskette gilt:

$$n! \geq 2!(n-1)! \geq \cdots \geq l!(n-l+1)! \geq \cdots \geq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor! \left(n - \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right)!$$

(b) Nutzen Sie **(a)**, um für $p, q \in \mathbb{Z}$ mit $0 \leq p, q \leq n$ und $p + q \geq n + 1$ die Ungleichung

$$p!q! \geq \left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor !\right)^2$$

zu zeigen.

(c) Zeigen Sie: Für $C \in \mathbb{R}$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} n(n+1)C^{2n} \left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor !\right)^{-2} = 0.$$

Zusatzaufgaben

12.6. Zeigen Sie, dass es keine stetige reelle Funktion f auf $[0, 1]$ gibt, die jeden ihrer Funktionswerte genau zwei mal annimmt.