Prof. TeknD Timo Weidl
Jan Köllner, M.Sc.
Simon Barth, M.Sc., Andreas Bitter, M.Sc.
FB Mathematik, Universität Stuttgart

Analysis 1 (WS 2018/19) — Blatt 13

Von allen, die bis jetzt nach Wahrheit forschten, haben die Mathematiker allein eine Anzahl Beweise finden können, woraus folgt, dass ihr Gegenstand der allerleichteste gewesen sein müsse.
(René Descartes, frz. Philosoph und Mathematiker; 1596-1650)

Aufgaben zur Abgabe am Ende der Vorlesung am 30.1.2018

13.1. Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Wir bezeichnen mit $C([a,b];\mathbb{R})$ die Menge aller stetigen Funktionen $f : [a,b] \to \mathbb{R}$.

(a) Zeigen Sie, dass $C([a,b];\mathbb{R})$ ein Vektorraum ist.

(b) Für $f \in C([a,b];\mathbb{R})$ definieren wir

$$\|f\| = \max_{x\in[a,b]} |f(x)|.$$

Zeigen Sie, dass durch $\|\cdot\|$ eine Norm auf $C([a,b];\mathbb{R})$ definiert wird.

(c) Zeigen Sie, dass $\|\cdot\|$ nicht von einem Skalarprodukt induziert wird, d.h. dass es kein Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle : C([a,b];\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ gibt mit $\|\cdot\| = \sqrt{\langle\cdot,\cdot\rangle}$.
Hinweis: Parallelogrammidentität, Aufgabe 9.4

13.2. Untersuchen Sie die folgenden Funktionen auf Stetigkeit und gleichmäßige Stetigkeit.

(a) $f : [0,\infty) \to \mathbb{R},\ f(x) = \sqrt{x}$, **(b)** $f : [0,5) \to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{x-1}{x+1}$,
(c) $f : (0,1) \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x}$, **(d)** $f : [a,\infty) \to \mathbb{R},\ f(x) = \ln(x),\ a > 0$

Votieraufgaben

13.3. Sei $X \subset \mathbb{C}$ offen und $f : X \to \mathbb{R}$. Zeigen Sie: Ist f im Punkt $z_0 \in X$ komplex differenzierbar, so gilt $f'(z_0) = 0$.

13.4. Untersuchen Sie, in welchen Punkten die folgenden Funktionen differenzierbar sind und bestimmen Sie ausgehend von der Definition jeweils die Ableitung in diesen Punkten.

(i) $f_1 : \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ f_1(z) = z^n,\quad n \in \mathbb{N}$, **(ii)** $f_2 : [0,\infty) \to \mathbb{R},\ f_2(x) = \sqrt{x}$,
(iii) $f_3 : \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ f_3(z) = \overline{z}$, **(iv)** $f_4 : \mathbb{C} \to \mathbb{R},\ f_4(z) = |z|^2$

Untersuchen Sie dabei im Fall einer komplexen Variable sowohl auf komplexe als auch auf reelle Differenzierbarkeit (d.h., ob $f_k|_{\mathbb{R}}$ differenzierbar ist).

© weidl@mathematik.uni-stuttgart.de jan.koellner@mathematik.uni-stuttgart.de
simon.barth@mathematik.uni-stuttgart.de andreas.bitter@mathematik.uni-stuttgart.de

13.5. **(a)** Sei $n \in \mathbb{N}$. Untersuchen Sie, in welchen Punkten die folgenden Funktionen differenzierbar sind und bestimmen Sie ggf. die Ableitungen. Jede der Funktionen ist als Funktion aus $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ mit maximalem Definitionsbereich zu verstehen.

(i) $f_1(x) = \sin\left(\mathrm{e}^{x^2+2x}\right)$, **(ii)** $f_2(x) = \frac{x+1}{x-1}$, **(iii)** $f_3(x) = x\ln(x) - x$,
(iv) $f_4(x) = \frac{1}{2}(x + |x|)\sqrt{x}$, **(v)** $f_5(x) = x^{x^2}$, **(vi)** $f_6(x) = (\cos(x))^n \sin(nx)$

(b) Nutzen Sie den Satz zur Ableitung impliziter Funktionen, um die Ableitung der folgenden Funktionen zu bestimmen.

(i) $f_1 : (-1,1) \to (0,\pi)$, $f_1(x) = \arccos(x)$,
(ii) $f_2 : (-1,1) \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, $f_2(x) = \arcsin(x)$,
(iii) $f_3 : \mathbb{R} \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, $f_3(x) = \arctan(x)$

13.6. Sei (M,d) ein metrischer Raum, $X \subset M$ und $x_0 \in \operatorname{acc}(X)$. Seien $f,g,h : X \to \mathbb{R}$ Funktionen.

(a) Wir schreiben $f \overset{x\to x_0}{=} g \cdot o(h)$, falls eine Funktion $\Psi : X \to \mathbb{R}$ existiert, sodass

$$f = g \cdot \Psi \quad \text{und} \quad \Psi \overset{x\to x_0}{=} o(h)$$

Zeigen Sie:

$f \overset{x\to x_0}{=} o(g) \quad \Leftrightarrow \quad f \overset{x\to x_0}{=} g \cdot o(1)$, **(ii)** $f \overset{x\to x_0}{=} o(h),\ g \overset{x\to x_0}{=} o(h) \Rightarrow f + g \overset{x\to x_0}{=} o(h)$

(b) Zeigen Sie: Ist $f \overset{x\to 0}{=} O(x)$, so gilt $f \overset{x\to 0}{=} o(1)$. Geben Sie außerdem ein Beispiel einer Funktion f mit $f \overset{x\to 0}{=} o(1)$ und $f \overset{x\to 0}{\neq} O(x)$ an.

(c) Seien $f_k : X_k \to \mathbb{R}$ Funktionen, wobei $X_k \subset \mathbb{R}$ den maximalen Definitionsbereich von f_k bezeichne. Weiter sei $n \in \mathbb{N}$ und $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ein beliebiges Polynom. Zeigen Sie:

(i) $f_1(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow f_1 \overset{x\to 0}{=} o\left(\frac{1}{x^2}\right)$, **(ii)** $f_2(x) = x\cos(x) \Rightarrow f_2 \overset{x\to 0}{=} o(1)$,
(iii) $f_3(x) = x^n \mathrm{e}^{-x} \Rightarrow f_3 \overset{x\to +\infty}{=} o(1)$, **(iv)** $p(x) \overset{x\to +\infty}{=} o(\mathrm{e}^x)$

Zusatzaufgaben

13.7. Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen.

(a) Zeigen Sie: Jeder Häufungspunkt der Menge $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ ist ein Verdichtungspunkt der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(b) Sei $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine bijektive Funktion. Zeigen Sie: Konvergiert $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $a \in \mathbb{R}$, dann konvergiert auch $(a_{\sigma(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ gegen a.