Analysis 1 (WS 2018/19) — Blatt 14

Dies ist nicht das Ende. Es ist nicht einmal der Anfang vom Ende.
Aber es ist, vielleicht, das Ende des Anfangs.
(Sir Winston Churchill; 1874-1965)

Votieraufgaben

14.1. Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Angenommen, es existiert ein $\alpha > 1$ und ein $C \in \mathbb{R}$, sodass für alle $x, y \in (a, b)$

$$|f(x) - f(y)| \leq C|x - y|^\alpha$$

gilt. Zeigen Sie, dass f auf $[a, b]$ konstant ist.

14.2. **(a)** Seien $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetige, auf (a, b) differenzierbare Funktionen mit $f(a) \geq g(a)$. Zeigen Sie:

(i) Gilt $f'(x) \geq g'(x)$ für alle $x \in (a, b)$, dann gilt $f(x) \geq g(x)$ für alle $x \in [a, b]$.

(ii) Gilt $f'(x) > g'(x)$ für alle $x \in (a, b)$, dann gilt $f(x) > g(x)$ für alle $x \in (a, b]$.

(b) Zeigen Sie, dass die folgenden Ungleichungen gelten.

$$\textbf{(i)} \quad \sin(x) \leq x, \quad x \geq 0, \qquad \textbf{(ii)} \quad 1 - \frac{1}{x} < \ln(x) < x - 1, \quad x \in (1, \infty)$$

14.3. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 7$.

(a) Bestimmen Sie die lokalen Maxima und Minima von f.

(b) Zeigen Sie mit Hilfe von **(a)**, dass f drei reelle Nullstellen besitzt.

14.4. **(a)** Bestimmen Sie das Taylorpolynom dritten Grades an die Funktion $f(x) = \frac{x}{x-1}$ an der Stelle $x_0 = 2$. Skizzieren Sie den Graphen von f sowie das Taylorpolynom dritten Grades.

(b) Bestimmen Sie für alle $n \in \mathbb{N}$ das Taylorpolynom n-ten Grades der Funktion $f(x) = \ln x$ an der Stelle $x_0 = 1$.

14.5. Geben Sie jeweils ein (begründetes) Beispiel einer Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ an, welche nachfolgende Eigenschaft besitzt:

(a) f ist überall differenzierbar, ihre Ableitung f' besitzt aber eine Unstetigkeit.

(b) f ist in genau einem Punkt differenzierbar.

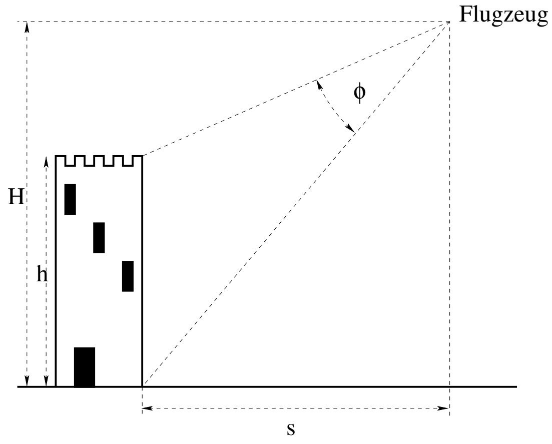
(c) f ist überall differenzierbar, es gilt $f'(0) > 0$ und jede Umgebung von 0 enthält ein Intervall, in dem f monoton fällt.

© weidl@mathematik.uni-stuttgart.de jan.koellner@mathematik.uni-stuttgart.de
simon.barth@mathematik.uni-stuttgart.de andreas.bitter@mathematik.uni-stuttgart.de

Zusatzaufgaben

14.6. Ein Flugzeug fliegt geradlinig und waagerecht in der Höhe H über dem Erdboden.
In welcher Entfernung s von einem Turm der Großen Chinesischen Mauer mit Höhe $h < H$ sieht der Pilot den Turm unter maximalem Blickwinkel ϕ?

<u>Hinweis:</u> Satz von Fermat in Verbindung mit dem Cosinussatz.



14.7. Sei $X \subset \mathbb{R}$ offen und $x_0 \in X$. Weiter seien $g : X \to \mathbb{R}$, $f : X \to \mathbb{R}^n$ im Punkt x_0 m-fach differenzierbare Funktionen. Zeigen Sie durch vollständige Induktion, dass dann auch $h = f \cdot g$ im Punkt x_0 m-fach differenzierbar ist und dass

$$h^{(m)}(x_0) = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} g^{(k)}(x_0) \cdot f^{(m-k)}(x_0)$$

gilt.

14.8. Berechnen Sie die Ableitungen folgender Funktionen

(a) $f(x) = x^{\frac{1}{x}}, \qquad x > 0,$

(b) $f(x) = \ln(\ln(x)), \qquad x > 1,$

(c) $f(x) = \sqrt{\mathrm{e}^{\sin\sqrt{x}}}, \qquad x > 0,$

(d) $f(x) = \arctan\left(\frac{1+x}{1-x}\right), \qquad x \neq 1,$

(e) $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

(f) $f(x) = \frac{\sin x}{x}, \qquad x \neq 0$

14.9. Sei $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, $X, Y \subset \mathbb{K}$ offen und $x_0 \in X$, $y_0 \in Y$. Weiter seien $\Psi : Y \to \mathbb{K}$ und $f : X \to \mathbb{K}^n$ in y_0 bzw. x_0 differenzierbare Funktionen und es gelte $x_0 = \Psi(y_0)$. Sei $k(h) = \Psi(y_0+h) - \Psi(y_0)$. In der Vorlesung haben Sie im Beweis der Kettenregel gesehen, dass

$$f\left(\Psi(y_0+h) - \Psi(y_0)\right) \overset{h\to 0}{=} f'(x_0) \cdot \Psi'(y_0) + o(h) + o\big(k(h)\big)$$

Vervollständigen Sie den Beweis, indem Sie $o\big(k(h)\big) \subset o(h)$ für $h \to 0$ (d.h. aus $\phi \overset{h\to 0}{=} o\big(k(h)\big)$ folgt $\phi \overset{h\to 0}{=} o(h)$) zeigen. Gehen Sie dazu wie folgt vor.

(a) Zeigen Sie: Ist $\phi \overset{k(h)\to 0}{=} o\big(k(h)\big)$, so gilt $\phi \overset{h\to 0}{=} k(h)o(1)$.

(b) Nutzen Sie $k(h) = h\Psi'(y_0) + o(h)$ und die Rechenregeln für die Landausymbole, um aus **(a)** $o\big(k(h)\big) \subset o(h)$ für $h \to 0$ zu schließen.