Prof. TeknD Timo Weidl
Jan Köllner, M.Sc.
Simon Barth, M.Sc., Andreas Bitter, M.Sc.
FB Mathematik, Universität Stuttgart

Analysis 1 — Vortragsübung 1

Man muss viel gelernt haben, um über das, was man nicht weiß, fragen zu können.
Jean-Jacques Rousseau (1712 - 1778)

1.1. (Pascalsches Dreieck)

Für $k, n \in \mathbb{N}_0$ mit $k \leq n$ ist der *Binomialkoeffizient* aus n und k definiert durch

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

(a) Zeigen Sie, dass für alle $k, n \in \mathbb{N}$ mit $k \leq n$ die Gleichung

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$$

gilt.

(b) Zeigen Sie

$$\binom{n}{k} \in \mathbb{N}, \quad n, k \in \mathbb{N}_0,\ k \leq n.$$

(c) Nutzen Sie Aufgabenteil **(a)**, um

$$\textbf{(i)}\ \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n \qquad \text{und} \qquad \textbf{(ii)}\ \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ zu zeigen.

(d) Betrachten Sie nun das folgende Schema von Zahlen, welche in Dreiecksform angeordnet sind. Es handelt sich um das sogenannte **Pascalsche Dreieck**. Die erste und letzte Zahl jeder Reihe ist die Eins und die übrigen Zahlen erhält man, indem man jeweils die beiden darüberstehenden Zahlen addiert.
In welchem Zusammenhang stehen die Aussagen aus den Aufgabenteilen **(a)** und **(c)** zum Pascalschen Dreieck? Können Sie noch weitere Muster am Pascalschen Dreieck erkennen?

$n=0$:								1							
$n=1$:							1		1						
$n=2$:						1		2		1					
$n=3$:					1		3		3		1				
$n=4$:				1		4		6		4		1			
$n=5$:			1		5		10		10		5		1		
$n=6$:		1		6		15		20		15		6		1	
$n=7$:	1		7		21		35		35		21		7		1
$\vdots$								$\vdots$							

© weidl@mathematik.uni-stuttgart.de jan.koellner@mathematik.uni-stuttgart.de
simon.barth@mathematik.uni-stuttgart.de andreas.bitter@mathematik.uni-stuttgart.de

1.2. (Mengen und Ungleichungen)
Gegeben seien die Mengen

$$A := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : |x| + |y| \leq 1\}, \qquad B := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \sqrt{x^2+y^2} \leq 1\},$$
$$C := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \max\{|x|,|y|\} \leq 1\}$$

(a) Skizzieren Sie die Mengen A, B, C.

(b) Zeigen Sie

$$A \subset B \subset C.$$

1.3. (Relationen)
Untersuchen Sie, ob es sich bei R um eine Äquivalenzrelation auf der Menge M handelt und geben Sie gegebenenfalls die Äquivalenzklassen an.

(a) M ist die Menge aller Menschen auf der Erde und $aRb :\Leftrightarrow a$ hat denselben Vater wie b.

(b) $M := \mathbb{Z}$ und $R := \{(m,-m) \ : \ m \in \mathbb{Z}\}$.

(c) $M := \mathbb{N}$ und $aRb :\Leftrightarrow a+b$ ist gerade.

(d) M ist die Menge aller Funktionen von $\mathbb{N}$ nach $\mathbb{N}$ und $f_1 R f_2 :\Leftrightarrow \ \exists n \in \mathbb{N} : f_1(n) = f_2(n)$.

1.4. (Induktion)
Nutzen Sie das Prinzip der vollständigen Induktion, um folgenden Aussagen zu beweisen.

(a) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sum_{k=1}^{n}(2k-1) = n^2.$$

(b) Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $3^{2n} + 7$ durch 8 teilbar.

(c) Jede natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ besitzt eine eindeutige Primfaktorzerlegung.

1.5. (Abbildungen)

(a) Untersuchen Sie, welche der folgenden Abbildungen injektiv, surjektiv bzw. bijektiv sind.

(i) $f_1 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \ f_1(n) := 2n - 1,$

(ii) $f_2 : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}, \ f_2(m) := (-1)^m \cdot m,$

(iii) $f_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}, \ f_3(x) := \max\{k \in \mathbb{Z} \ : k \leq x\},$

(iv) $f_4 : \mathcal{P}(\{1,2,\ldots,n\}) \to \mathbb{N}_0, \ f_4(A) := \#A,$ wobei $n \in \mathbb{N}$ und $\#A$ die Anzahl der Elemente von $A \in \mathcal{P}(\{1,2,\ldots,n\})$ bezeichnet.

(b) Sei $f : X \to Y$ ein Abbildung. Zeigen Sie

(i)

$$f \text{ ist surjektiv} \iff \forall_{A \subseteq Y} \ f\left(f^{-1}(A)\right) = A,$$

(ii)

$$f \text{ ist injektiv} \iff \forall_{A \subset X} \forall_{B \subset X} \Big(B \subset A \Longrightarrow f(A \backslash B) = f(A) \backslash f(B)\Big).$$

1.6. (Ungleichungen)

(a) Sei $n \in \mathbb{N}$ und $x_i > 0$ für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$ mit $x_1 \cdots x_n = 1$. Zeigen Sie

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n \geq n.$$

Zeigen Sie weiterhin

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_n = n) \Longleftrightarrow (x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 1).$$

(b) Seien $y_i > 0$ für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$. Nutzen Sie Aufgabenteil **(a)**, um

$$\frac{1}{\frac{1}{y_1} + \cdots + \frac{1}{y_n}} \leq \sqrt[n]{y_1 \cdots y_n} \leq \frac{y_1 + \cdots + y_n}{n}$$

zu zeigen.

(c) Nutzen Sie Aufgabenteil **(b)**, um

$$\textbf{(i)}\ n! \leq \left(\frac{n+1}{2}\right)^n \qquad \text{und} \qquad \textbf{(ii)}\ (n!)^2 \leq \left(\frac{(n+1)(2n+1)}{6}\right)^n$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ zu zeigen.