

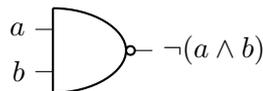
# Analysis I (WS 2018/19) — Zusatzblatt 1

*The riddle does not exist. If a question can be put at all, then it can also be answered.  
(Ludwig Wittgenstein; 1889-1951)*

**Z1.1.** Ein Logikgatter ist ein elektronisches Bauteil, welches logische Operationen wie z.B.  $\wedge$ ,  $\vee$  oder  $\neg$  realisiert. Wir betrachten in dieser Aufgabe ein NAND-Gatter (**Not AND**), welches durch folgende Wahrheitstabelle gegeben ist:

a	b	$a \text{ NAND } b$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Zur Darstellung des entsprechenden Bauteils in Schaltplänen verwenden wir folgendes Symbol:



- (a) Realisieren Sie allein durch Hintereinanderschaltung von NAND-Gattern die logischen Ausdrücke  $\neg a$ ,  $a \wedge b$  und  $a \vee b$ . Dies zeigt bereits, dass sich auch jeder komplexere logische Ausdruck allein mit Hilfe des NAND-Gatters realisieren lässt.
- (b) Realisieren Sie allein unter Verwendung von NAND-Gattern die Ausdrücke  $\neg a \vee b$  und  $(\neg a \vee b) \wedge (\neg b \vee a)$ . Versuchen sie dabei mit möglichst wenigen Bauteilen auszukommen.

*Frei nach Raymond M. Smullyan - Wie heißt dieses Buch?*

**Z1.2.** Auf einer kleinen Insel im weiten Meer gibt es zwei Arten von Einwohnern: einerseits die sogenannten Ritter, die sich von Kindheit an verpflichtet haben, stets die Wahrheit zu sagen, und dieses Gelübde niemals brechen; andererseits die sogenannten Schurken, die zwanghaft lügen und nie die Wahrheit sagen.

(a) Einst traf ein Fremder am Strand die drei Inselbewohner A, B und C. Er fragte sie: „Wie viele Ritter sind unter euch?“ A antwortete, doch sprach dabei sehr undeutlich, sodass man ihn nicht verstehen konnte. Der Fremde stellte B die Frage: „Was hat A gesagt?“ B antwortete: „A meinte, dass einer von uns ein Ritter ist.“ Darauf C: „B lügt, glaub ihm kein Wort!“

Was sind B und C?

(b) Wieder haben wir drei Inselbewohnern A, B und C vor uns. A und B behaupten:

A: „Wir sind alle Schurken.“

B: „Genau einer von uns ist ein Ritter.“

Was sind A, B und C?

(c) Angenommen, A und B sagen stattdessen Folgendes:

A: „Wir sind alle Schurken.“

B: „Genau einer von uns ist ein Schurke.“

Lsst sich herausfinden, was B und C sind?

**Z1.3.** Von nun an sagen wir, dass zwei Inselbewohner *von gleicher Art* sind, falls entweder beide Ritter oder beide Schurken sind.

(a) Wieder geht es um drei Inselbewohner A, B und C. A und B stellen fest:

A: „B ist ein Schurke.“

B: „A und C sind von gleicher Art.“

Was ist C?

(b) Wir haben es noch einmal mit drei Inselbewohnern A, B und C zu tun. A sagt: „B und C sind von gleicher Art.“ Nun fragen wir C: „Sind A und B von gleicher Art?“

Was antwortet C?

**Z1.4.** Auf einer anderen Insel, nicht weit von der bereits erwhten entfernt, gibt es deutlich mehr Einwohner. Neben Rittern und Schurken sind dabei ein beträchtlicher Teil der Leute normal; sie sprechen manchmal die Wahrheit, lügen aber auch manchmal.

(a) Vor uns haben wir drei Personen A, B und C, unter denen ein Ritter, ein Schurke und ein Normaler sind. Sie behaupten:

A: „Ich bin normal.“

B: „Ja, das stimmt.“

C: „Ich bin nicht normal.“

Was sind A, B und C?

(b) Zwei Inselbewohner A und B stellen fest:

A: „B ist ein Ritter.“

B: „A ist kein Ritter.“

Zeigen Sie, dass mindestens einer von ihnen die Wahrheit sagt, aber kein Ritter ist.

(c) Nun machen zwei Bewohner A und B folgende Aussagen:

A: „B ist ein Ritter.“

B: „A ist ein Schurke.“

Zeigen Sie, dass mindestens einer von ihnen die Wahrheit sagt, aber kein Ritter ist, oder dass mindestens einer von ihnen lügt, aber kein Schurke ist.

**Z1.5.** Man kann die Ritter und Schurken zwar nicht äußerlich voneinander unterscheiden, aber wenn sich zwei Leute kennen, wissen sie voneinander, ob sie Ritter oder Schurken sind.

Eine Gruppe von Rittern und Schurken fuhr einmal auf einen Camping-Trip. Nachdem sie ihre Zelte am Ende eines langen Tages aufgeschlagen hatten, fing Thomas (der mit Abstand beste Koch von allen) an, den Eintopf am Lagerfeuer anzurühren, während alle anderen sich im Kreis um das Feuer niederließen und ihm zuschauten. Ihm fiel auf, dass jeder im Kreis die beiden Personen neben sich zu kennen schien. Thomas aber kannte niemanden außer seinem guten Freund Richard.

Um die Runde etwas näher kennenzulernen, fragte er eine Person im Kreis: „Du und die beiden, die neben dir sitzen: ist eine ungerade Zahl von Schurken unter euch?“

Die Person antwortete. Thomas fragte eine andere beliebig gewählte Person und erhielt die gleiche Antwort. Wen er auch fragte, er erhielt immer wieder diese Antwort. Schließlich, nachdem er bereits alle anderen gefragt hatte, wandte er sich mit derselben Frage an Richard. Überraschenderweise war dessen Antwort anders als all die anderen. Thomas hielt einen Moment inne und fragte dann Richard: „Sitzt du zwischen zwei Rittern?“, worauf ihm Richard abermals so antwortete.

Nickend erklärte Thomas: „So, dann sind die Schurken hier in der Überzahl“, und kümmerte sich wieder um das Essen.

Falls  $n$  die Zahl der Leute auf dem Camping-Ausflug ist, wie viele davon sind Ritter bzw. Schurken, und was sind Thomas und Richard? Gibt es Einschränkungen an die möglichen Zahlen  $n$ ?

**Z1.6.** Von zwei natürlichen Zahlen, die beide größer als 1 und voneinander verschieden sind, kennt A die Summe und B das Produkt. Wir hören folgenden Dialog:

A: „Ich kann die beiden Zahlen nicht nennen.“

B: „Ich auch nicht.“

A: „Jetzt kenne ich sie!“

B: „Ich auch!“

Wie lauten die beiden Zahlen?