Prof. T. Weidl
Jan Köllner, M.Sc.
Paul Schwahn, B.Sc.
FB Mathematik, Universität Stuttgart

Woche: 19. - 25. November 2018

Analysis I (WS 2018/19) — Zusatzblatt 4

Die ganzen Zahlen hat der liebe Gott gemacht, alles andere ist Menschenwerk.
(Leopold Kronecker; 1823-1891)

Z4.1. Sind die folgenden Mengen abzählbar?

(a) $\mathbb{Q}^n$ für $n \in \mathbb{N}$.

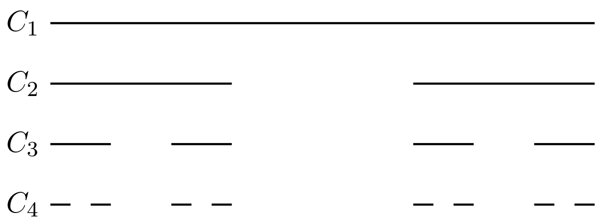
(b) Die Menge $\mathbb{Q}[X]$ aller Polynome mit rationalen Koeffizienten.

(c) Die Menge $\mathbb{A} = \{x \in \mathbb{C} \mid \exists p \in \mathbb{Q}[X] : p(x) = 0\}$ der *algebraischen Zahlen*.

(d) Die Menge $\mathbb{T} = \mathbb{C} \setminus \mathbb{A}$ der *transzendenten Zahlen*.

(e) Die Menge $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ aller Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\forall n \in \mathbb{N} : a_n \in \{0,1\}$.

Z4.2. Wir definieren die *Cantormenge* C folgendermaßen: Sei $C_1 := [0,1]$. Um C_2 zu erhalten, entfernen wir das mittlere offene Drittel des Intervalls, sodass $C_2 = [0,1/3] \cup [2/3,1]$ übrig bleibt. Aus jedem der beiden Teilintervalle von C_2 entfernen wir wiederum das mittlere offene Drittel und erhalten so C_3. Dies setzen wir unendlich fort, d. h. für $n \in \mathbb{N}$ erhalten wir C_{n+1}, indem wir aus jedem der Teilintervalle von C_n das mittlere offene Drittel entfernen.



Schließlich setzen wir

$$C := \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n.$$

Ist C abzählbar?
Hinweis: Überlegen Sie sich eine Bijektion $\{0,1\}^{\mathbb{N}} \to C$.

Z4.3. Seien X und Y Mengen sowie $f : X \to Y$ und $g : X \to Y$ injektive Abbildungen. Wir wollen zeigen, dass $|X| = |Y|$. Dazu konstruieren wir uns eine Abbildung $h : X \to Y$ auf die folgende Art und Weise:

$$\begin{aligned} Z_1 &:= X \setminus g(Y) \\ Z_{n+1} &:= g(f(Z_n)) \text{ für } n \in \mathbb{N} \\ Z &:= \bigcup_{n=1}^{\infty} Z_n \\ h(x) &:= \begin{cases} f(x), & x \in Z \\ g^{-1}(x), & x \notin Z \end{cases} \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass h wohldefiniert und bijektiv ist. Dieses Resultat ist auch bekannt als *Äquivalenzsatz* oder *Satz von Cantor-Bernstein*.

 jan.koellner@mathematik.uni-stuttgart.de weidl@mathematik.uni-stuttgart.de
ana1.paul.schwahn@gmail.com

Z4.4. Paul sitzt in der Tutorenbesprechung und langweilt sich. Während Jan das neue Übungsblatt durchgeht, stellt Paul fest, dass er zusammen mit den beiden anderen Tutoren Ztefan und Zedric (Namen geändert) an einem runden Tisch mit Radius 1 sitzt. In Gedanken versunken stellt er sich ein Koordinatensystem mit reeller und imaginärer Achse vor, sodass der Ursprung in der Mitte der Tisches liegt. Dabei sitzt Ztefan an der Stelle einer komplexen Zahl z, wohingegen Zedric an der Position $z+1$ sitzt. Auf einmal erwacht Paul aus seinem Tagtraum und ruft: „Ihr beide seid sechste Einheitswurzeln!“

(a) Kann das sein (von der Surrealität der Situation mal abgesehen)?

(b) Angenommen, Paul sitzt direkt gegenüber von Ztefan und Zedric, sodass er von beiden gleich weit entfernt ist. Ist die Position von Paul (sowie oben beschriebenes Szenario)

- reell,
- rein imaginär oder
- nichts davon, d. h. echt komplex?