Analysis I (WS 2018/19) — Zusatzblatt 6

Die Mathematik ist eine Art Spielzeug, welches die Natur uns zuwarf zum Troste und zur Unterhaltung in der Finsternis.
(Jean-Baptist le Rond D'Alembert; 1717-1783)

Z6.1. Sei $S^2 := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ die *2-Sphäre* in $\mathbb{R}^3$ und $N := (0, 0, 1) \in S^2$ ihr Nordpol. Die *stereografische Projektion* $P : S^2 \backslash \{N\} \to \mathbb{C}$ ist definiert durch

$$P(x_1, x_2, x_3) = \frac{x_1}{1 - x_3} + \mathrm{i}\, \frac{x_2}{1 - x_3}.$$

Zeigen Sie:

(a) $P : S^2 \backslash \{N\} \to \mathbb{C}$ ist bijektiv.

(b) Ein (verallgemeinerter) Kreis in $\mathbb{C}$, der durch

$$a|z|^2 + bz + \bar{b}\bar{z} + c = 0$$

für $a, b, c \in \mathbb{C}$ mit $ac < |b|^2$ gegeben ist, ist das Bild unter P eines Kreises.

Z6.2. Wir definieren die *Riemannsche Zahlenkugel* formal als

$$\hat{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\},$$

wobei wir $\infty \notin \mathbb{C}$ den *unendlich fernen Punkt* nennen. Auf ihr definieren wir $d : \hat{\mathbb{C}} \times \hat{\mathbb{C}} \to \mathbb{R}$ durch

$$\begin{aligned} d(z_1, z_2) &= \frac{2|z_1 - z_2|}{\sqrt{1 + |z_1|^2}\sqrt{1 + |z_2|^2}} \text{ für } z_1, z_2 \in \mathbb{C}, \\ d(z, \infty) = d(\infty, z) &= \frac{2}{\sqrt{1 + |z|^2}} \text{ für } z \in \mathbb{C}, \\ d(\infty, \infty) &= 0. \end{aligned}$$

(a) Zeigen Sie, dass $(\mathbb{C}_\infty, d)$ ein metrischer Raum ist. Entweder bestätigen Sie dazu direkt die Axiome eines metrischen Raums oder Sie zeigen, dass

$$d(z_1, z_2) = \|P^{-1}(z_1) - P^{-1}(z_2)\| \tag{1}$$

(wobei wir P zu einer Abbildung $S^2 \to \hat{\mathbb{C}}$ erweitern, indem wir $P(N) := \infty$ setzen) und sehen ein, dass die euklidische Metrik von $\mathbb{R}^3$ damit auf $\hat{\mathbb{C}}$ eine Metrik induziert.

(b) Folgern Sie aus (1), dass die Einschränkung $d\big|_{\mathbb{C}\times\mathbb{C}}$ zur Betragsmetrik auf $\mathbb{C}$ topologisch äquivalent ist, d. h. eine Folge $(z_n) \subset \mathbb{C}$ konvergiert genau dann bzgl. $d(\cdot, \cdot)$, wenn sie auch bzgl. $|\cdot|$ konvergiert.

© jan.koellner@mathematik.uni-stuttgart.de weidl@mathematik.uni-stuttgart.de
ana1.paul.schwahn@gmail.com

Um auf der Riemannschen Zahlenkugel rechnen zu können, treffen wir folgende Konventionen:

$$z \pm \infty = \pm\infty + z = \infty, \ \frac{z}{\infty} = 0$$

für alle $z \in \mathbb{C}$,

$$z \cdot \infty = \infty \cdot z = \infty, \ \frac{z}{0} = \infty$$

für alle $z \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ sowie

$$\infty + \infty = \infty \cdot \infty = \overline{\infty} = \infty.$$

Man beachte, dass Ausdrücke der Form $\infty - \infty$ und ∞/∞ undefiniert bleiben.

Z6.3. Eine *gebrochen lineare Transformation* ist eine Abbildung

$$f : \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}, \ z \mapsto \frac{az+b}{cz+d},$$

wobei $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ und $ad - bc \neq 0$. Zeigen Sie:

(a) Jede gebrochen lineare Transformation ist bijektiv.

(b) Unter einer gebrochen linearen Transformation werden verallgemeinerte Kreise auf verallgemeinerte Kreise abgebildet.

(c) Die gebrochen lineare Transformation, welche ein gegebenes Tripel (z_1, z_2, z_3) mit $z_1, z_2, z_3 \in \hat{\mathbb{C}}$ auf das Tripel $(0, 1, \infty)$ abbildet, ist eindeutig gegeben durch

$$z \mapsto \frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_1} \frac{z - z_1}{z - z_3}.$$

(d) Für je zwei solche Tripel (z_1, z_2, z_3) und (w_1, w_2, w_3) gibt es eine eindeutige gebrochen lineare Transformation, die (z_1, z_2, z_3) auf (w_1, w_2, w_3) abbildet.