Analysis 1 (WS19/20) – Vortragsübung 1

Man sieht oft etwas hundert Mal, tausend Mal, ehe man es zum allerersten Mal wirklich sieht.
(Christian Morgenstern; 1871-1914)

1.1. (Mengen und Ungleichungen)

Gegeben seien die Mengen

$$A := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| \leq 1\}, \qquad B := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{x^2+y^2} \leq 1\},$$
$$C := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \max\{|x|,|y|\} \leq 1\}.$$

(a) Skizzieren Sie A, B und C.

(b) Zeigen Sie
$$A \subset B \subset C.$$

1.2. (Vollständige Induktion)

(a) Zeigen Sie, dass

$$\textbf{(i)} \sum_{k=1}^{n} (4k-1) = 2n^2 + n, \qquad \textbf{(ii)} \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{k+n}\right) = 2 - \frac{1}{n+1},$$

für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt.

(b) Zeigen Sie, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Zahl $3^{2n} + 7$ durch 8 teilbar ist.

1.3. (Rationale Folgen)

(a) Zeigen Sie ausgehend von der Definition, dass die rationalen Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergieren und bestimmen Sie jeweils den entsprechenden Grenzwert.

$$\textbf{(i)}\ a_n = \frac{4}{n^4+1} \qquad \textbf{(ii)}\ b_n = \frac{n^2+2n-1}{n^2+1} \qquad \textbf{(iii)}\ c_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{2}{(2k+1)(2k+3)}$$

(b) Gegeben sei die rekursiv definierte Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$a_1 := 1, \qquad a_{n+1} := \frac{1}{1+a_n}, \ n \in \mathbb{N}.$$

(i) Zeigen Sie, dass
$$|a_{n+m} - a_n| \leq \left(\frac{4}{9}\right)^{n-1} |a_{m+1} - 1|$$
für alle $m, n \in \mathbb{N}$ gilt.

(ii) Zeigen Sie, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge ist.

(iii) Untersuchen Sie, ob $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ als rationale Folge in $\mathbb{Q}$ konvergiert.

weidl@mathematik.uni-stuttgart.de
simon.barth@mathematik.uni-stuttgart.de andreas.bitter@mathematik.uni-stuttgart.de