Analysis 1 (WS19/20) – Vortragsübung 2

Jetzt wird es knifflig, du musst imaginäre Zahlen benutzen, so wie Zwölfzehn.
–Bill Watterson

2.1. Bestimmen Sie jeweils den Real- und Imaginärteil.

(a) $\dfrac{2+\mathrm{i}}{1+2\mathrm{i}}$ **(b)** $(1-\mathrm{i})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$ **(c)** $\left(\sqrt{5}+\mathrm{i}\sqrt{15}\right)^{2019}$ **(d)** $\sqrt{\mathrm{i}+\sqrt{3}}$

2.2. Skizzieren Sie die folgenden Mengen in der komplexen Zahlenebene.

(a) $M_1 = \{z \in \mathbb{C} : \ |z| - \operatorname{Im}(z) = 1\}$

(b) $M_2 = \left\{z \in \mathbb{C}\backslash\{1\} : \ \operatorname{Re}\left(\frac{z+1}{z-1}\right) \geq 2\right\}$

(c) $M_3 = \{z \in \mathbb{C} : \ |z+1| \leq |z-2|\}$

2.3. Berechnen Sie alle Lösungen folgender Gleichungen in $\mathbb{C}$.

(a) $z(z+4) = -5$ **(b)** $z^3 - 3z^2 + (3-2\mathrm{i})z - 1 + 2\mathrm{i} = 0$

2.4. **(a)** Sei $z = x + \mathrm{i}y \in \mathbb{C}$. Zeigen Sie

$$\overline{\cos(z)} = \cos(\overline{z}) \qquad \text{und} \qquad \overline{\sin(z)} = \sin(\overline{z}).$$

(b) Für $x \in \mathbb{R}$ definieren wir

$$\cosh(x) := \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2} \qquad \text{und} \qquad \sinh(x) := \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}.$$

Zeigen Sie

$$|\cos(z)|^2 = \sinh(y)^2 + \cos(x)^2 = \cosh(y)^2 - \sin^2(x).$$

(c) Folgern Sie aus Aufgabenteil **(b)**, dass

$$|\sinh(y)| \leq |\cos(z)| \leq \cosh(y).$$

(d) Geben Sie jeweils eine Folge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{C}$ an, so dass

(i) $\lim\limits_{n\to\infty} |\cos(z_n)| = \infty,$ **(ii)** $\lim\limits_{n\to\infty} |\sin(z_n)| = \infty.$

weidl@mathematik.uni-stuttgart.de
simon.barth@mathematik.uni-stuttgart.de andreas.bitter@mathematik.uni-stuttgart.de