

# Analysis 1 (WS 2019/20) — Blatt 1

*In der Mathematik gibt es viele Lehrsätze,  
welche sich nur dadurch beweisen lassen, dass man von vorne anfängt.  
- Johann Georg August Galletti (1750-1828)*

## Aufgaben zur Abgabe am Ende der Vorlesung am 23. Oktober

**1.1.** Es seien  $p$ ,  $q$  und  $r$  Aussagen. Gelten dann die folgenden Äquivalenzen? Verifizieren Sie die korrekten Aussagen mit Wahrheitstabellen und widerlegen Sie die falschen.

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} & p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r) \\ \text{(b)} & (p \wedge q) \vee r \Leftrightarrow p \wedge (q \vee r) \\ \text{(c)} & (p \rightarrow q) \Leftrightarrow ((\neg q) \rightarrow (\neg p)) \\ \text{(d)} & \neg(p \vee q) \Leftrightarrow (\neg p) \wedge (\neg q) \end{array}$$

**1.2.** Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Bilden Sie jeweils auch die Negation.

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} & \exists_{n \in \mathbb{N}} \forall_{m \in \mathbb{Z}} m \leq n, \\ \text{(b)} & \forall_{n \in \mathbb{N}} (2|n \vee 2|(n+1)), \\ \text{(c)} & \forall_{x \leq 1} (|x-3| - |x-1| \geq 1), \\ \text{(d)} & \forall_{x \geq 6} \left( (\sqrt{x+2} - \sqrt{x-6} = 2) \rightarrow (x \in \{9, 7\}) \right). \end{array}$$

## Votieraufgaben

**1.3.** Zur Zeit der Renaissance gab es in Florenz zwei Goldschmiede – Bellini und Cellini, die mit ihren Familien wahre Dynastien bildeten. Die Mitglieder des Bellini-Clans gravierten in jedes ihrer Werke einen wahren Spruch, während die Cellinis stets einen falschen Spruch eingravierten. Nun wurden vier Kästchen gefunden, zwei goldene und zwei silberne. Es ist bekannt, dass jedem goldenen Kästchen genau ein silbernes zugeordnet ist und dass alle Kästchen in einer der beiden Goldschmieden hergestellt wurden. Nachfolgend die Gravuren, die auf den Kästchen zu finden sind:

- Kästchen A (gold): Das silberne Kästchen wurde von einem Mitglied der Cellini-Familie hergestellt.
- Kästchen B (gold): Entweder wurde das silberne Kästchen von einem Mitglied der Cellini-Familie hergestellt oder beide Kästchen stammen von Bellini.
- Kästchen C (silber): Das goldene Kästchen wurde von einem Mitglied der Bellini-Familie hergestellt.
- Kästchen D (silber): Das goldene Kästchen wurde von einem Mitglied der Bellini-Familie hergestellt. Mindestens eines der Kästchen stammt von einem Sohn Bellinis oder Cellinis.

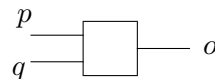
Ordnen Sie die Kästchen einander zu und bestimmen Sie zu jedem Kästchen seinen Hersteller.

**1.4.** Es bezeichne  $\mathbb{N}$  die Menge der natürlichen Zahlen und  $\mathcal{P}$  die Menge aller Primzahlen. Zeigen Sie die folgenden Aussagen. In manchen Fällen ist die indirekte Beweisführung geeigneter.

- (a) Es gibt keine größte Primzahl.
- (b) Sei  $n \in \mathbb{N}$ . Dann ist  $n$  gerade genau dann, wenn  $n^2$  gerade ist.
- (c)  $\forall p \in \mathcal{P} \forall n \in \mathbb{N} (p|n \leftrightarrow p|n^2)$ .

Sie dürfen dabei ohne Beweis verwenden, dass jede natürliche Zahl  $n \geq 2$  eine (bis auf die Reihenfolge der Faktoren) eindeutige Primfaktorzerlegung besitzt.

**1.5.** In der Elektronik werden logische Schaltungen aus sogenannten NOR-Schaltkreisen zusammengestellt. Ein NOR-Schaltkreis besteht aus zwei Eingängen  $p$  und  $q$  sowie einem Ausgang  $o$  und kann schematisch wie folgt dargestellt werden:



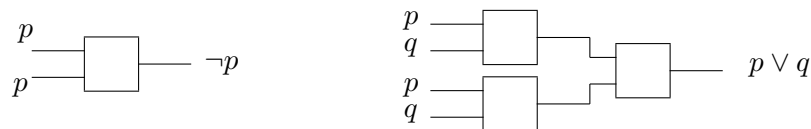
Man schreibt für die jeweiligen Anschlüsse H, falls Spannung anliegt oder N, falls keine Spannung anliegt. Der NOR-Schaltkreis wirkt dann nach folgender Tabelle

$p$	$q$	$o$
N	N	H
H	N	N
N	H	N
H	H	N

und realisiert damit die aussagenlogische Verknüpfung

$$o = \neg(p \vee q),$$

wobei der Zustand H eine wahre Aussage und der Zustand N eine falsche Aussage beschreibt. Alle anderen Aussagen können als geeignete Kombinationen von NOR-Schaltkreisen dargestellt werden, so zum Beispiel



Stellen Sie die folgenden Beziehungen als Kombinationen von NOR-Schaltkreisen dar

- (a)  $o = ((p \wedge q) \rightarrow r)$ ,
- (b)  $o = ((p \rightarrow q) \vee r)$ .