Analysis 1 (WS 2019/20) — Blatt 2

Each thing in the world has names or unnamed relations to everything else.
Relations are infinite in number and kind. To be is to be related.
It is evident that the understanding of relations is a major concern of all men and women.
Are relations a concern of mathematics?
They are so much its concern that mathematics is sometimes defined to be the science of relations.
- Cassius Jackson Keyser (1862-1947)

Aufgaben zur Abgabe am Ende der Vorlesung am 30. Oktober

2.1. Es seien A, B, K, M Mengen und $\{A_\kappa\}_{\kappa\in K}$ sei eine Familie von Mengen mit der Indexvariablen $\kappa \in K$. Zeigen Sie unter Verwendung der entsprechenden Regeln der Aussagenlogik

(a) die Distributivgesetze

$$A \cap \left(\bigcup_{\kappa\in K} A_\kappa\right) = \bigcup_{\kappa\in K} (A \cap A_\kappa)\,, \quad A \cup \left(\bigcap_{\kappa\in K} A_\kappa\right) = \bigcap_{\kappa\in K} (A \cup A_\kappa)\,,$$

(b) die de Morganschen Gesetze

$$(A \cup B)^c_M = A^c_M \cap B^c_M, \quad \left(\bigcup_{\kappa\in K} A_\kappa\right)^c_M = \bigcap_{\kappa\in K} (A_\kappa)^c_M.$$

2.2. Bestimmen Sie für die folgenden Relationen jeweils Vor- und Nachbereich. Überprüfen Sie jeweils, ob es sich um eine Funktion handelt und falls ja, ob diese injektiv/surjektiv/bijektiv zwischen A und B ist.

(a) $R_1 = \{(1,2),(1,3),(1,4),(2,2)\}\,,\quad A = \{1,2\},\quad B = \{1,2,3,4,5\},$

(b) $R_2 = \{(1,2),(2,3),(3,4)\}\,,\quad A = \{1,2,3\},\quad B = \{2,3,4\},$

(c) $R_3 = \{(n,n+1) : n \in \mathbb{N}\}\,,\quad A = B = \mathbb{N},$

(d) $R_4 = \big\{(n,m) : n,m \in \mathbb{Z},\ n = m^2\big\}\,,\quad A = B = \mathbb{Z}.$

2.3. Überprüfen Sie jeweils, ob es sich bei folgenden Relationen um Äquivalenzrelationen handelt und bestimmen Sie ggf. die Äquivalenzklassen.

(a) $R_1 = \{(n,m) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \ :\ 7 \text{ teilt } n-m\}$

(b) $R_2 = \{(n,m) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N} \ :\ m \le n\}$

(c) $R_3 = \Big\{\Big((n_1,m_1),(n_2,m_2)\Big) \in (\mathbb{Z}\times\mathbb{N})\times(\mathbb{Z}\times\mathbb{N}) : n_1 m_2 = n_2 m_1\Big\}$

(d) $R_4 = \big\{(n,m) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N} \ : \exists a,b \in \mathbb{N}\ n = a\cdot m^b\big\}$

© weidl@mathematik.uni-stuttgart.de jan.koellner@mathematik.uni-stuttgart.de
simon.barth@mathematik.uni-stuttgart.de andreas.bitter@mathematik.uni-stuttgart.de

Die beiden folgenden Aufgaben wurden im Jahr 1976 als Teil der Abschlussprüfung an Realschulen in Baden-Württemberg gestellt. [1]

2.4. **(a)** In einer arithmetischen Folge beträgt die Summe aus dem zweiten und dem fünften Glied 112 und die Summe aus dem dritten und achten Glied 144. Berechnen Sie das Anfangsglied, die Differenz und die Summe der ersten zehn Glieder dieser Folge.

(b) In einer arithmetischen Folge mit $a_1 = 36$ und $d = 8$ ist die Summe der ersten n Glieder fünfmal so groß wie das n-te Glied. Bestimmen Sie n, a_n und s_n dieser Folge.

(c) Addiert man zu jedem Glied einer arithmetischen Folge, in der $a_1 = 36$ und $d = 8$ ist, eine Zahl c, so entsteht eine neue arithmetische Folge mit $b_1 = a_1 + c$, $b_2 = a_2 + c$, $b_3 = a_3 + c$ usw. Ermitteln Sie, für welches c die Beziehung $b_8 = 2b_2$ gilt.

2.5. Von einem Dreieck sind die Winkel $\alpha = 35°$ und $\beta = 75°$, sowie die Seite $\overline{AC} = b = 8{,}2\,\text{cm}$ gegeben.

(a) Konstruieren Sie das Dreieck ABC und den Umkreismittelpunkt M. Berechnen Sie anschließend die Seiten $\overline{AB} = c$ und $\overline{BC} = a$, sowie die Länge des Umkreisradius r.

(b) Außerhalb des Dreiecks ABC liegt ein Punkt D mit $\overline{AD} = \overline{CD} = d = 6\,\text{cm}$. Berechnen Sie die Strecke $\overline{BD} = e$.

(c) Die Gerade $\overline{DM}$ schneidet $\overline{AB}$ in E. Begründen Sie, weshalb D und M auf der Mittelsenkrechten von $\overline{AC}$ liegen, und berechnen Sie sowohl Umfang als auch Inhalt des Dreiecks ADE.

Sollten spezielle trigonometrische Beziehungen am Dreieck benötigt werden, sollen diese entsprechend begründet oder hergeleitet werden.

[1] Aus: Mathematische Aufgabensammlung Realabschlußprüfung Baden-Württemberg 1971-1977, bearbeitet von Hermann-Dietrich Hornschuh