Prof. TeknD Timo Weidl
Jan Köllner, M.Sc.
Simon Barth, M.Sc., Andreas Bitter, M.Sc.
FB Mathematik, Universität Stuttgart

Analysis 1 (WS 2019/20) — Blatt 4

Warum sind Zahlen schön?
– Das ist wie die Frage, warum Beethovens Neunte schön sei. Wenn Sie das nicht selbst erkennen, kann es Ihnen niemand erklären. Ich weiß, dass Zahlen Schönheit besitzen.
Wenn sie nicht schön sind, dann ist überhaupt nichts schön.
(Paul Erdös, ungarischer Mathematiker; 1913-1996)

Aufgaben zur Abgabe am Ende der Vorlesung am 13. November

4.1. Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge rationaler Zahlen.

(a) Zeigen Sie: Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge, dann ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt, d.h. es gibt ein $C \in \mathbb{Q}$ sodass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$|a_n| \leq C$$

(b) Zeigen Sie: Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge, dann gilt

$$|a_n - a_{n+1}| \to 0 \quad \text{für } n \to \infty. \tag{1}$$

Gilt auch die Umkehrung, d.h. ist jede Folge rationaler Zahlen, die (1) erfüllt, eine Cauchyfolge?

$*$ **(c)** Zeigen Sie: Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge und $N \in \mathbb{N}$ fest, dann gilt

$$|a_n - a_{n+N}| \to 0 \quad \text{für } n \to \infty. \tag{2}$$

$*$ **(d)** Gilt in **(c)** auch die Umkehrung, d.h. ist jede Folge rationaler Zahlen, die (2) erfüllt, eine Cauchyfolge?

Mit $*$ markierte Teilaufgaben sind als Bonus gedacht und geben jeweils einen Zusatzpunkt.

Votieraufgaben

4.2. **(a)** Zeigen Sie mit vollständiger Induktion das Distributivgesetz der Multiplikation auf der Menge der natürlichen Zahlen, d.h.

$$\forall_{k,m,n\in\mathbb{N}} \; [n \cdot (m+k) = n \cdot m + n \cdot k]$$

(b) Zeigen Sie mit Hilfe vollständiger Induktion, dass sich jede natürliche Zahl $n \geq 2$ als Produkt von Primzahlen schreiben lässt.

(c) Zeigen Sie mit vollständiger Induktion, dass jede endliche Teilmenge von $\mathbb{Q}$ ein größtes und ein kleinstes Element besitzt.

(d) Zeigen Sie, dass für alle $p, q \in \mathbb{Q}$ die Ungleichungen

$$\textbf{(i)} \quad |p+q| \leq |p| + |q| \qquad \textbf{(ii)} \quad \big||p| - |q|\big| \leq |p \pm q|$$

gelten. Diese werden als *Dreiecksungleichung* bzw. *umgekehrte Dreiecksungleichung* bezeichnet.

4.3. Es seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folgen rationaler Zahlen mit den Grenzwerten $a \in \mathbb{Q}$ und $b \in \mathbb{Q}$.

(a) Zeigen Sie, dass $(a_n \cdot b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $a \cdot b$ konvergiert.

(b) Zeigen Sie: Gilt $b_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $b \neq 0$, so konvergiert $\left(\frac{1}{b_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $\frac{1}{b}$.

(c) Folgern Sie: Unter den Voraussetzungen in **(b)** konvergiert die Folge $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $\frac{a}{b}$.

(d) Sei nun $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge rationaler Zahlen, d.h. es gibt ein $C \in \mathbb{Q}$, sodass $|c_n| \leq C$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Zeigen Sie: Gilt $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, so auch $\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot c_n) = 0$.

4.4. **(a)** Seien $n \in \mathbb{N}$ und $a \in \mathbb{Q} \setminus \{1\}$ beliebig. Zeigen Sie die geometrische Summenformel

$$\sum_{k=0}^{n} a^k = \frac{a^{n+1}-1}{a-1}.$$

(b) Für welche $a \in \mathbb{Q}$ konvergiert die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = a^n$?

(c) Untersuchen Sie, für welche $a \in \mathbb{Q}$ der Grenzwert

$$\sum_{k=0}^{\infty} a^k := \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a^k.$$

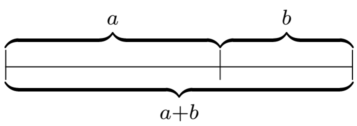
existiert.

Zusatzaufgaben

4.5. Gegeben sei eine Strecke der Länge $a+b$, wobei $a, b > 0$. Gilt

$$\frac{a}{b} = \frac{a+b}{a},$$

so ist die Strecke im **goldenen Schnitt** geteilt und wir nennen die Zahl $\Phi = \frac{a}{b}$ **goldenen Schnitt** von $a+b$. Φ beschreibt das Teilungsverhältnis einer Strecke der Länge $a+b$ in zwei Teilstrecken, bei dem das Verhältnis der gesamten Strecke zur größeren Teilstrecke dem Verhltnis der größeren zur kleineren Teilstrecke entspricht (vgl. Skizze).



(a) Zeigen Sie, dass Φ nicht von a und b abhängt, der Gleichung

$$\Phi = 1 + \frac{1}{\Phi}$$

genügt und irrational ist.

(b) Die Folge der **Fibonacci-Zahlen** $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist rekursiv gegeben durch

$$f_1 = 1 = f_2,\ f_n = f_{n-1} + f_{n-2},\ \text{falls } n > 2.$$

Zeigen Sie: Falls die Folge $\left(\frac{f_{n+1}}{f_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ der Quotienten aufeinander folgender Fibonacci-Zahlen konvergiert, dann gegen den goldenen Schnitt.

(c) Nutzen Sie die starke Form der vollständigen Induktion, um zu zeigen, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ die Gleichheit

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\Phi^n - (-\Phi)^{-n}\right)$$

gilt.