Prof. TeknD Timo Weidl
Jan Köllner, M.Sc.
Simon Barth, M.Sc., Andreas Bitter, M.Sc.
FB Mathematik, Universität Stuttgart

Analysis 1 (WS 2019/20) — Blatt 6

Meine Lehre steht felsenfest, jeder gegen sie gerichtete Pfeil wird auf den Schützen selbst zurückschnellen. Woher ich dies weiß? – Weil ich sie nach allen Beziehungen seit vielen Jahren erprobt, alle Einwände, die je gegen die unendlichen Zahlen gemacht worden sind, geprüft habe. (Georg Cantor, Begründer der Mengenlehre; 1845 - 1918)

Aufgaben zur Abgabe am Ende der Vorlesung am 27.11.2019

6.1. **(a)** Seien $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ und gelte $a < b,\ c < d$. Zeigen Sie, dass die Intervalle (a, b) und (c, d) gleichmächtig sind.

(b) Zeigen Sie, dass das Intervall $(-1, 1)$ und $\mathbb{R}$ gleichmächtig sind. Mit **(a)** ist damit jedes nichtleere offene Intervall gleichmächtig zu $\mathbb{R}$.

6.2. Sei $z \in \mathbb{C}$.

(a) Zeigen Sie:

$$\textbf{(i)}\quad \mathrm{Re}(z) = \frac{z+\overline{z}}{2}, \quad \textbf{(ii)}\quad \mathrm{Im}(z) = \frac{z-\overline{z}}{2\mathrm{i}}, \quad \textbf{(iii)}\quad |\mathrm{Re}(z)| \le |z|, \quad \textbf{(iv)}\quad |\mathrm{Im}(z)| \le |z|$$

(b) Zeigen Sie, dass für $\omega \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ gilt:

$$\textbf{(i)}\quad (\overline{\omega})^{-1} = \overline{(\omega^{-1})}, \quad \textbf{(ii)}\quad |\omega^{-1}| = \frac{1}{|\omega|}, \quad \textbf{(iii)}\quad \left|\frac{z}{\omega}\right| = \frac{|z|}{|\omega|}$$

Votieraufgaben

6.3. **(a)** Zeigen Sie: Sind A und B abzählbare Mengen, dann ist auch $A \times B$ abzählbar.

(b) Zeigen Sie: Ist $\mathcal{I}$ eine abzählbare Menge und $\{M_i\}_{i\in\mathcal{I}}$ eine Familie abzählbarer Mengen, dann ist auch $\bigcup_{i\in\mathcal{I}} M_i$ abzählbar. Mit anderen Worten: Die abzählbare Vereinigung abzählbarer Mengen ist abzählbar.

(c) Sei A eine beliebige Menge. Zeigen Sie, dass

$$\mathrm{card}(A) < \mathrm{card}\left(\mathcal{P}(A)\right),$$

wobei $\mathcal{P}(A)$ die Potenzmenge von A bezeichnet.

6.4. **(a)** Zeigen Sie, dass die Mengen $(0, 1)$ und $(0, 1) \times (0, 1)$ gleichmächtig sind.

(b) Vergleichen Sie die Mächtigkeit der Menge $(0, 1)$ mit der Mächtigkeit der Menge aller Funktionen $f : (0, 1) \to (0, 1)$.

6.5. Skizzieren Sie die folgenden Mengen in der komplexen Zahlenebene:

$$A = \{z \in \mathbb{C} \mid 1 < |z - 5\mathrm{i}| < 4\}, \quad B = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z^2) < 0\}, \quad C = \left\{z \in \mathbb{C} \mid \frac{1}{3} \le \frac{|z-1|}{|z+1|} < \frac{1}{2}\right\}$$