Prof. TeknD Timo Weidl
Jan Köllner, M.Sc.
Simon Barth, M.Sc., Andreas Bitter, M.Sc.
FB Mathematik, Universität Stuttgart

Analysis 1 (WS 2019/20) — Blatt 7

Vergesst nicht: Wenn ihr schwimmen lernen wollt, dann geht mutig ins Wasser;
wenn ihr lernen wollt, Aufgaben zu lösen, dann löst sie.
(George Polya, ungarischer Mathematiker; 1887-1985)

Aufgaben zur Abgabe am Ende der Vorlesung am 4.12.2019

7.1. Sei (M, d) ein metrischer Raum.

(a) Zeigen Sie für $x, y, w, z \in M$ die Ungleichungen

$$\textbf{(i)} \quad |d(x,z) - d(y,z)| \leq d(x,y), \qquad \textbf{(ii)} \quad |d(x,y) - d(z,w)| \leq d(x,z) + d(w,y).$$

(b) Zeigen Sie, dass durch die folgenden Funktionen ebenfalls eine Metrik definiert wird.

$$\textbf{(i)} \quad d_1(x,y) = \min\{1, d(x,y)\} \qquad \textbf{(ii)} \quad d_2(x,y) = \frac{d(x,y)}{1 + d(x,y)}$$

Votieraufgaben

7.2. Bestimmen Sie Betrag, Real- und Imaginärteil folgender komplexer Zahlen

$$\textbf{(a)} \quad \frac{1+2\mathrm{i}}{3-4\mathrm{i}} + \frac{2-\mathrm{i}}{5\mathrm{i}}, \quad \textbf{(b)} \quad \left(\frac{1-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}\right)^{2019}, \quad \textbf{(c)} \quad \sqrt{\mathrm{i}}, \quad \textbf{(d)} \quad \cos(\mathrm{i}), \quad \textbf{(e)} \quad \mathrm{Ln}(\mathrm{i}), \quad \textbf{(f)} \quad \mathrm{i}^{\mathrm{i}}.$$

Skizzieren Sie diese in der komplexen Zahlenebene.

7.3. (a) Zeigen Sie, dass für $p, q \in \mathbb{C}$ die Lösungen der quadratischen Gleichung $z^2 - 2pz + q = 0$ durch

$$z = p + \sqrt{p^2 - q}$$

gegeben sind. Hierbei bezeichnet $\sqrt{z}$ die (mehrwertige) komplexe Quadratwurzel einer komplexen Zahl z.

(b) Bestimmen Sie jeweils die Menge aller komplexen Lösungen der Gleichungen

$$\textbf{(i)} \quad (z+2)^2 + 1 = 0, \quad \textbf{(ii)} \quad z^4 = -81, \quad \textbf{(iii)} \quad a|z|^2 + \overline{b}z + b\overline{z} + c = 0$$

für $a, c \in \mathbb{R},\ b \in \mathbb{C}$ und veranschaulichen Sie diese jeweils geometrisch.

(c) Bestimmen Sie alle $z \in \mathbb{C}$, welche der Gleichung $\cos(z) = 2$ genügen.

7.4. (a) Sei $n \in \mathbb{N},\ n \geq 2$ und p ein komplexes Polynom n-ten Grades von der Form

$$p(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + a_{n-2}z^{n-2} + \cdots + a_1 z + a_0.$$

Seien $z_1, z_2, \ldots, z_k$ die Nullstellen von p mit Vielfachheiten $p_1, p_2, \ldots, p_k$. Zeigen Sie, dass dann folgende Gleichungen gelten:

$$\textbf{(i)} \quad a_{n-1} = -(p_1 \cdot z_1 + p_2 \cdot z_2 + \cdots + p_k \cdot z_k), \qquad \textbf{(ii)} \quad a_0 = (-1)^n z_1^{p_1} \cdot z_2^{p_2} \cdots z_k^{p_k}$$

Diese Aussage ist Teil des *Satzes von Vieta.*

(b) Schreiben Sie folgende Polynome jeweils als Produkt von Polynomen ersten Grades.

(i) $p(z) = z^3 + 3z^2 + 7z + 5,$ **(ii)** $p(z) = z^3 + (1+i)z^2 + (2+i)z + 2$

Hinweis: Sie können eine Nullstelle erraten und anschließend eine Polynomdivision durchführen.

7.5. **(a)** Welche der folgenden Funktionen bilden eine Metrik auf $\mathbb{R}$? Begründen Sie Ihre Antwort.

(i) $d_1(x,y) = \begin{cases} 0, & x = y, \\ 1, & x \neq y \end{cases}$ **(ii)** $d_2(x,y) = \begin{cases} 1, & x > y, \\ |x-y|, & \text{sonst} \end{cases}$

(iii) $d_3(x,y) = |x-y|$ **(iv)** $d_4(x,y) = |x-y| + (x-y)^2$

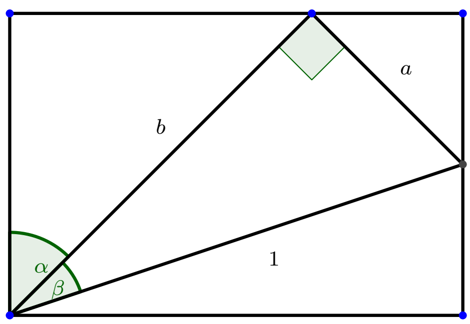
(b) Bestimmen und skizzieren Sie $U_\varepsilon(0) = \{x \in \mathbb{R} \mid d(x,0) < \varepsilon\}$ für $\varepsilon = 1$ bzw. $\varepsilon = 2$ für jede der Funktionen d aus **(a)**, welche eine Metrik ist.

(c) Finden Sie ein nichttriviales notwendiges und hinreichendes Kriterium dafür, dass eine Folge im Raum $(\mathbb{R}, d_1)$ konvergiert.

Zusatzaufgaben

Zusatzaufgaben

7.6. Nutzen Sie die Skizze



und elementargeometrische Argumente, um die Additionstheoreme

(a) $\sin^2(\beta) + \cos^2(\beta) = 1$

(b) $\sin(\alpha+\beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta),$

(c) $\cos(\alpha+\beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta),$

für $\alpha, \beta > 0$ mit $\alpha + \beta < \pi/2$ zu beweisen. Nutzen Sie dazu die geometrische Definition am rechtwinkligen Dreieck für Sinus und Cosinus.
Gelten die Additionstheoreme in dieser Form für beliebige komplexe Zahlen α, $\beta \in \mathbb{C}$?

© weidl@mathematik.uni-stuttgart.de jan.koellner@mathematik.uni-stuttgart.de
simon.barth@mathematik.uni-stuttgart.de andreas.bitter@mathematik.uni-stuttgart.de