Prof. TeknD Timo Weidl
Jan Köllner, M.Sc.
Simon Barth, M.Sc., Andreas Bitter, M.Sc.
FB Mathematik, Universität Stuttgart

Analysis 1 (WS 2019/20) — Blatt 8

Unsere Chancen, die Scheinklausur zu bestehen, stehen 50:50, vielleicht sogar 60:60.
(frei[1] nach Reiner Calmund, ehemaliger Fußballfunktionär)

Aufgaben zur Abgabe am Ende der Vorlesung am 11.12.2019

8.1. Berechnen Sie im Falle ihrer Existenz die folgenden Grenzwerte.

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}\cos\left(\frac{1}{n}\right)$, **(b)** $\lim\limits_{n\to\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}}$,

(c) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{n}{\sqrt{n+1}} - \sqrt{n}\right)$, **(d)** $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{3^n+4^n+5^n}$,

Hinweis: In (d) können Sie 8.2 (iii) ohne Beweis verwenden.

Votieraufgaben

8.2. Einige wichtige Grenzwerte
Weisen Sie die folgenden Identitäten nach. Falls nicht anders angegeben, ist $a \in \mathbb{R}$ und $k \in \mathbb{N}$.

(i) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^k}{a^n} = 0, \quad |a| > 1,$ **(ii)** $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1,$

(iii) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1, \quad a > 0.$ **(iv)** $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} = 0$

8.3. Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge positiver reeller Zahlen, sodass $a := \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ existiert.

(a) Zeigen Sie: ist $a > 1$, so divergiert die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Ist $a < 1$, so ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge. Geben Sie jeweils ein Beispiel einer divergenten und einer konvergenten Folge an mit $a = 1$.

(b) Berechnen Sie im Falle ihrer Existenz die folgenden Grenzwerte und fügen Sie diese der Liste der wichtigen Grenzwerte hinzu.

(i) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!}$, **(ii)** $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^n}{n!}$

8.4. Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge und $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$. Zeigen Sie, dass dann auch die Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$,

$$s_n = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k,$$

konvergent ist und $a = \lim\limits_{n\to\infty} s_n$ gilt. Gilt auch die Umkehrung, d.h. folgt aus der Konvergenz von $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die Konvergenz von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

[1] original: “Unsere Chancen, das Viertelfinale zu erreichen, stehen 50:50, vielleicht sogar 60:60.”

8.5. Welche der folgenden Aussagen sind wahr, welche falsch? Geben Sie jeweils einen Beweis oder ein Gegenbeispiel an.

(a) Gilt $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ und ist $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt, so gilt auch $\lim_{n\to\infty}(a_n b_n) = 0$.

(b) Konvergieren $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, dann auch $(\max\{a_n, b_n\})_{n\in\mathbb{N}}$.

(c) Konvergiert $(|a_n|)_{n\in\mathbb{N}}$, so auch $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(d) Konvergiert $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, so auch $(|a_n|)_{n\in\mathbb{N}}$

(e) Gilt $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = 0$, so gilt $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ oder $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$.

(f) Gilt $\lim_{n\to\infty} a_{n+1} - \frac{1}{2}a_n = 0$, so auch $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Zusatzaufgaben

8.6. Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge nichtnegativer Zahlen. Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegeben durch

$$a_1 = \sqrt{x_1}, \quad a_2 = \sqrt{x_1 + \sqrt{x_2}}, \quad a_3 = \sqrt{x_1 + \sqrt{x_2 + \sqrt{x_3}}}, \quad \ldots$$

(a) Zeigen Sie, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ genau dann konvergiert, wenn ein $M \in \mathbb{R}$ existiert, sodass

$$\sqrt[2^n]{x_n} \leq M \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

(b) Folgern Sie, dass die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ im Fall $x_k = k$ konvergiert, d.h., dass

$$\sqrt{1 + \sqrt{2 + \sqrt{3 + \sqrt{4 + \sqrt{5 + \ldots}}}}}$$

eine reelle Zahl definiert.

(c) Sei $x_n = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen den goldenen Schnitt konvergiert, d.h.

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2} = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \ldots}}}}$$

© weidl@mathematik.uni-stuttgart.de jan.koellner@mathematik.uni-stuttgart.de
simon.barth@mathematik.uni-stuttgart.de andreas.bitter@mathematik.uni-stuttgart.de