Prof. TeknD Timo Weidl
Jan Köllner, M.Sc.
Simon Barth, M.Sc., Andreas Bitter, M.Sc.
FB Mathematik, Universität Stuttgart

Analysis 1 (WS 2019/20) — Blatt 12

Es ist nicht das Wissen, sondern das Lernen, es ist nicht das Besitzen, sondern das Erwerben, es ist nicht das Dasein, sondern das Hinkommen, was den großen Genuss gewährt.
(Carl Friedrich Gauß, deutscher Mathematiker; 1777-1855)

Aufgaben zur Abgabe am Ende der Vorlesung am 22.1.2020

12.1. Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ und sei $f : [a, b] \to [a, b]$ eine stetige Funktion.

(a) Zeigen Sie, dass dann ein $x \in [a, b]$ mit $f(x) = x$ existiert. Stimmt die Aussage auch, wenn das abgeschlossene Intervall $[a, b]$ durch das offene Intervall (a, b) ersetzt wird?

(b) Angenommen, es gilt $f(a) = f(b)$. Zeigen Sie, dass dann ein $c \in [a, \frac{b+a}{2}]$ mit $f(c) = f\left(c + \frac{b-a}{2}\right)$ existiert.

12.2. Für $n \in \mathbb{N}$ sei $a_n = n \cdot \cos\left(n\frac{\pi}{2}\right)$.

(a) Skizzieren Sie die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(b) Bestimmen Sie zu jeder der folgenden Eigenschaften eine Teilfolge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, die

(i) streng monoton wächst, **(ii)** konvergiert,

(iii) $\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = +\infty$ erfüllt bzw. **(iv)** $\varlimsup\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = \infty$ und $\varliminf\limits_{k\to\infty} a_{n_k} \neq \pm\infty$ erfüllt.

(c) Bestimmen Sie die Menge aller Verdichtungspunkte von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und die Menge aller Häufungspunkte von $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Votieraufgaben

12.3. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine monotone Funktion. Zeigen Sie, dass f höchstens abzählbar viele Unstetigkeitsstellen besitzt und diese, falls sie existieren, von erster Art sind.

12.4. Beweisen Sie nachfolgende Additionstheoreme und Vielfachenformeln für die **komplexen** Winkel- und Hyperbelfunktionen. Dabei sei jeweils $z, w \in \mathbb{C}$. Die beiden mit $*$ markierten Teilaufgaben geben zusammengenommen einen Zusatzpunkt.

(a) $(\sin(z))^2 + (\cos(z))^2 = 1$,

(b) $(\cosh(z))^2 - (\sinh(z))^2 = 1$,

(c) $\cos(z+w) = \cos(z)\cos(w) - \sin(z)\sin(w)$ und $\sin(z+w) = \sin(z)\cos(w) + \cos(z)\sin(w)$

$*$ **(d)** $\cos(5x) = 16(\cos(x))^5 - 20(\cos(x))^3 + 5\cos(x), \quad x \in \mathbb{R}$

$*$ **(e)** Ist $\cos\left(\frac{\pi}{10}\right)$ rational oder irrational?
Hinweis: Nutzen Sie **(d)**, um den Wert von $\cos\left(\frac{\pi}{10}\right)$ zu berechnen.

12.5. In dieser Aufgabe sollen die technischen Details des Beweises von Satz 2 aus der Vorlesung ausgearbeitet werden.

(a) Zeigen Sie, dass für $l, n \in \mathbb{N}$ mit $1 \leq l \leq \frac{n}{2}$ die folgende Ungleichungskette gilt:

$$n! \geq 2!(n-1)! \geq \cdots \geq l!(n-l+1)! \geq \cdots \geq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor! \left(n - \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right)!$$

(b) Nutzen Sie **(a)**, um für $p, q \in \mathbb{N}$ mit $0 \leq p, q \leq n$ und $p + q \geq n + 1$ die Ungleichung

$$p!q! \geq \left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor ! \right)^2$$

zu zeigen.

(c) Zeigen Sie: Für $C \in \mathbb{R}$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} n(n+1)C^{2n} \left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor ! \right)^{-2} = 0.$$

Zusatzaufgaben

12.6. Zeigen Sie, dass es keine stetige reelle Funktion f auf $[0, 1]$ gibt, die jeden ihrer Funktionswerte genau zwei mal annimmt.

12.7. Vervollständigen Sie den Beweis von Satz 4 aus der Vorlesung, d.h. zeigen Sie, dass

$$\arg\left(\exp(iy)\right) = y \qquad \mod 2\pi$$

für alle $y \in \mathbb{R}$ gilt.