Prof. TeknD Timo Weidl
Jan Köllner, M.Sc.
Simon Barth, M.Sc., Andreas Bitter, M.Sc.
FB Mathematik, Universität Stuttgart

Analysis 1 (WS 2019/20) — Blatt 14

Dies ist nicht das Ende. Es ist nicht einmal der Anfang vom Ende.
Aber es ist, vielleicht, das Ende des Anfangs.
(Sir Winston Churchill; 1874-1965)

Votieraufgaben

14.1. **(a)** Sei $n \in \mathbb{N}$. Untersuchen Sie, in welchen Punkten die folgenden Funktionen differenzierbar sind und bestimmen Sie ggf. die Ableitungen. Jede der Funktionen ist als Funktion aus $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ mit maximalem Definitionsbereich zu verstehen.

(i) $f_1(x) = \sin\left(\mathrm{e}^{x^2+2x}\right)$, **(ii)** $f_2(x) = \frac{x+1}{x-1}$, **(iii)** $f_3(x) = x\ln(x) - x$,

(iv) $f_4(x) = \frac{1}{2}(x + |x|)\sqrt{x}$, **(v)** $f_5(x) = x^{x^2}$, **(vi)** $f_6(x) = (\cos(x))^n \sin(nx)$

(b) Nutzen Sie den Satz zur Ableitung impliziter Funktionen, um die Ableitung der folgenden Funktionen zu bestimmen.

(i) $f_1 : (-1,1) \to (0,\pi)$, $f_1(x) = \arccos(x)$,

(ii) $f_2 : (-1,1) \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, $f_2(x) = \arcsin(x)$,

(iii) $f_3 : \mathbb{R} \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, $f_3(x) = \arctan(x)$

14.2. **(a)** Seien $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetige, auf (a,b) differenzierbare Funktionen mit $f(a) \geq g(a)$. Zeigen Sie:

(i) Gilt $f'(x) \geq g'(x)$ für alle $x \in (a,b)$, dann gilt $f(x) \geq g(x)$ für alle $x \in [a,b]$.

(ii) Gilt $f'(x) > g'(x)$ für alle $x \in (a,b)$, dann gilt $f(x) > g(x)$ für alle $x \in (a,b]$.

(b) Zeigen Sie, dass die folgenden Ungleichungen gelten.

(i) $\sin(x) \leq x, \quad x \geq 0,$ **(ii)** $1 - \dfrac{1}{x} < \ln(x) < x - 1, \quad x \in (1,\infty)$

14.3. Berechnen Sie die Ableitungen folgender Funktionen

(a) $f(x) = x^{\frac{1}{x}}, \quad x > 0,$

(b) $f(x) = \ln(\ln(x)), \quad x > 1,$

(c) $f(x) = \sqrt{\mathrm{e}^{\sin\sqrt{x}}}, \quad x > 0,$

(d) $f(x) = \arctan\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right), \quad x \neq 1,$

(e) $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

(f) $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}, \quad x \neq 0$

14.4. Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Angenommen, es existiert ein $\alpha > 1$ und ein $C \in \mathbb{R}$, sodass für alle $x, y \in (a,b)$

$$|f(x) - f(y)| \leq C|x-y|^\alpha$$

gilt. Zeigen Sie, dass f auf $[a,b]$ konstant ist.

14.5. **(a)** Bestimmen Sie das Taylorpolynom dritten Grades an die Funktion $f(x) = \frac{x}{x-1}$ an der Stelle $x_0 = 2$. Skizzieren Sie den Graphen von f sowie das Taylorpolynom dritten Grades.

(b) Bestimmen Sie für alle $n \in \mathbb{N}$ das Taylorpolynom n-ten Grades der Funktion $f(x) = \ln x$ an der Stelle $x_0 = 1$.