Ana-1 1

Ws 2017/18 20.10.17

1 Es bezeichne $p \triangledown q$ die ausschließende oder-Verknüpfung zweier Aussagen. Geben Sie die zugehörige Wahrheitstafel an und stellen sie $p \triangledown q$ durch logische Ausdrücke mit $\neg, \wedge, \vee$ dar.

2 Die folgende Wahrheitstafel umfasst mögliche Alternativen zur Definition der *wenn-dann*-Verknüpfung:

p	q	$p \rightarrow q$	$p \rightarrowtail q$	$p \twoheadrightarrow q$	$p \hookrightarrow q$
1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0
0	0	1	0	1	0

Diskutieren sie die logische Bedeutung jeder dieser Verknüpfungen, und warum diese keine gute Wahl einer Definition von $p \rightarrow q$ wären.

3 In einem Zoologiebuch aus Gallusien heißt es: »Jede ungebrochselte Kalupe ist dorig, und jede foberante Kalupe ist dorig. In Gallusien gibt es sowohl dorige wie undorige Kalupen«. — Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Aussagen, die *nicht ableitbar* sind, sind dabei als *falsch* zu bewerten. Das Präfix *un-* ist gleichbedeutend mit der logischen Negation.

a. Es gibt gebrochselte Kalupen.
b. Es gibt sowohl gebrochselte wie ungebrochselte Kalupen.
c. Alle undorigen Kalupen sind gebrochselt.
d. Einige gebrochselte Kalupen sind unfoberant.

Schriftliche Aufgaben

4 Zeigen Sie: $\neg(p \rightarrow q) \quad \Leftrightarrow \quad p \wedge \neg q\,.$

5 Die logische Verknüpfung *nicht-und*, englisch *nand*, wird definiert durch

$$p \sqcap q \quad \Leftrightarrow \quad \neg(p \wedge q).$$

a. Stellen sie die Wahrheitstafel für $\sqcap$ auf.
b. Zeigen sie, dass $\neg p \quad \Leftrightarrow \quad p \sqcap p\,.$
c. Stellen sie $p \wedge q$ und $p \vee q$ ausschließlich durch die *nand*-Verknüpfung dar.

"You gotta help me, Mom. ...
This assignment is due tomorrow, and
Gramps doesn't understand the new tricks."

6 Seien A und B beliebige Teilmengen einer nichtleeren Grundmenge M. Stellen sie die Indikatorfunktionen von A^{c}, $A \cup B$, $A \cap B$ und $A \setminus B$ durch die Indikatorfunktionen von A und B dar.

7 Ist $\mathbb{R}$ mit den beiden Operationen

$$a \oplus b \coloneqq a + b, \qquad a \odot b \coloneqq ab/2$$

ein Körper?

8 Sei $\mathbb{K}$ ein Körper und $c \in \mathbb{K}$. Untersuchen sie die Abbildung

$$\tau_c : \mathbb{K} \to \mathbb{K}, \quad \tau_c(a) = a - c$$

auf Injektivität, Surjektivität und Bijektivität.

Schriftliche Aufgaben

9 Für eine Abbildung $f : M \to N$ sind folgende Aussagen äquivalent.
a. f ist injektiv.
b. $f^{-1}(f(A)) = A$ für jede Teilmenge $A \subset M$.
c. $f(A_1 \cap A_2) = f(A_1) \cap f(A_2)$ für alle $A_1, A_2 \subset M$.

10 Sei $g : M \to M$ eine konstante Abbildung – also eine Abbildung, die überall denselben Wert annimmt. Für welche Abbildungen $f : M \to M$ gilt dann $f \circ g = g \circ f$?

Zusatzaufgabe

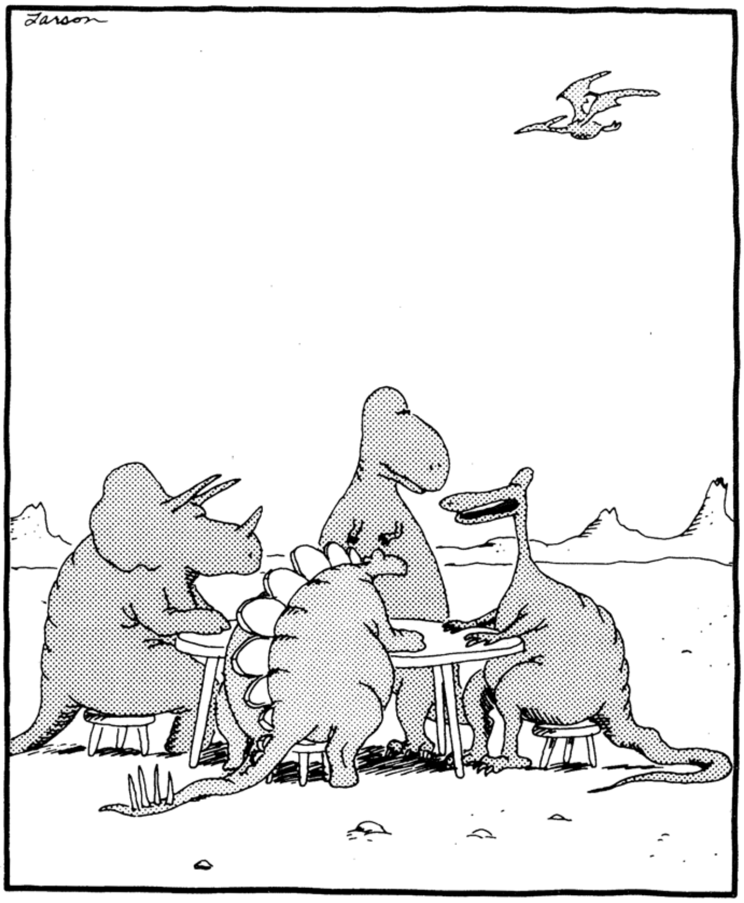
11 Sei $*$ eine kommutative Operation und $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf X. Gilt

$$a \sim b \ \Rightarrow \ a * c \sim b * c, \qquad a, b, c \in X,$$

so ist

$$[a] \circledast [b] \coloneqq [a * b]$$

eine wohldefinierte, kommutative Operation auf $X/{\sim}$.



"Well, time for our weekly
brain-stem-storming session."

12 Es sei $M \subset \mathbb{R}$ nicht leer und $\inf M > 0$. Dann ist die Menge

$$\tilde{M} \coloneqq \{1/x : x \in M\}$$

nach oben beschränkt ist, und es gilt $\sup \tilde{M} = 1/\inf M$.

13 *Cauchyungleichung* Für reelle Zahlen a, b und $\varepsilon > 0$ gilt

$$2ab \leqslant \varepsilon a^2 + b^2/\varepsilon.$$

14 Zeigen sie, dass die Wurzelfunktion das Intervall $[0, \infty)$ bijektiv auf sich selbst abbildet und streng monoton steigt:

$$0 \leqslant a < b \quad \Rightarrow \quad \sqrt{a} < \sqrt{b}.$$

Schriftliche Aufgaben

15 Für jedes $x \in \mathbb{R}$ gilt $x = \sup\{t \in \mathbb{R} : t < x\}$.

16 *Ungleichung vom arithmetischen und geometrischen Mittel* Für $a, b \geqslant 0$ gilt

$$\sqrt{ab} \leqslant \frac{a+b}{2}.$$

Zusatzaufgabe

17 Eine Teilmenge P eines Körpers $\mathbb{K}$ heißt *Positivbereich*, wenn gilt:

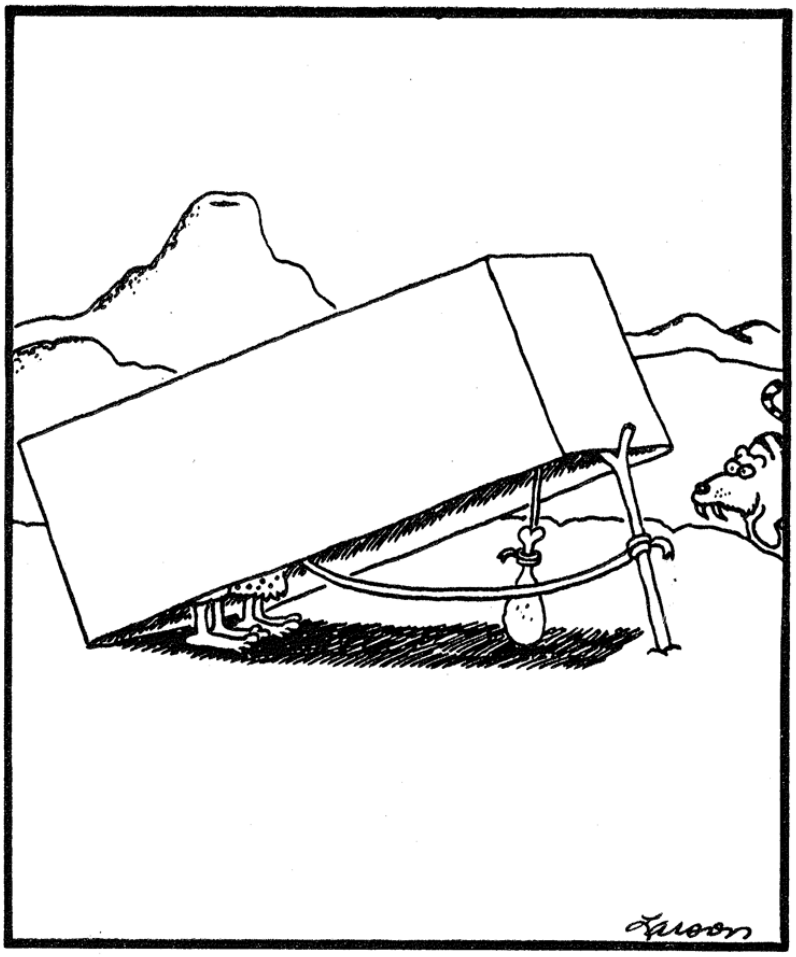
(P-1) Für jedes $a \in \mathbb{K}$ gilt genau eine der drei Aussagen $a \in P$, $a = 0$, $-a \in P$.

(P-2) Mit $a, b \in P$ ist auch $a + b \in P$ und $ab \in P$.

Man zeige: Ist $P \subset \mathbb{K}$ ein Positivbereich, so wird $\mathbb{K}$ durch

$$a < b \quad :\Leftrightarrow \quad b - a \in P$$

total geordnet. Ist umgekehrt $\mathbb{K}$ total geordnet, so ist $P \coloneqq \{a \in \mathbb{K} : a > 0\}$ ein Positivbereich.



"Shhhh, Zog! . . . Here come one now!"

18 Zeigen Sie:

a. $\sum_{k=1}^{n} k^2 = n(n+1)(2n+1)/6$ *b.* $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2$ *c.* $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \geqslant \sqrt{n}$

Eine Menge heißt abzählbar, wenn sie endlich oder gleichmächtig wie $\mathbb{N}$ *ist.*

19 Ist die Menge $\mathcal{P}_0(\mathbb{N})$ aller *endlichen* Teilmengen von $\mathbb{N}$ abzählbar? Mit Begründung natürlich.

20 Die Vereinigung abzählbar vieler abzählbarer Mengen ist wieder abzählbar.

Schriftliche Aufgaben

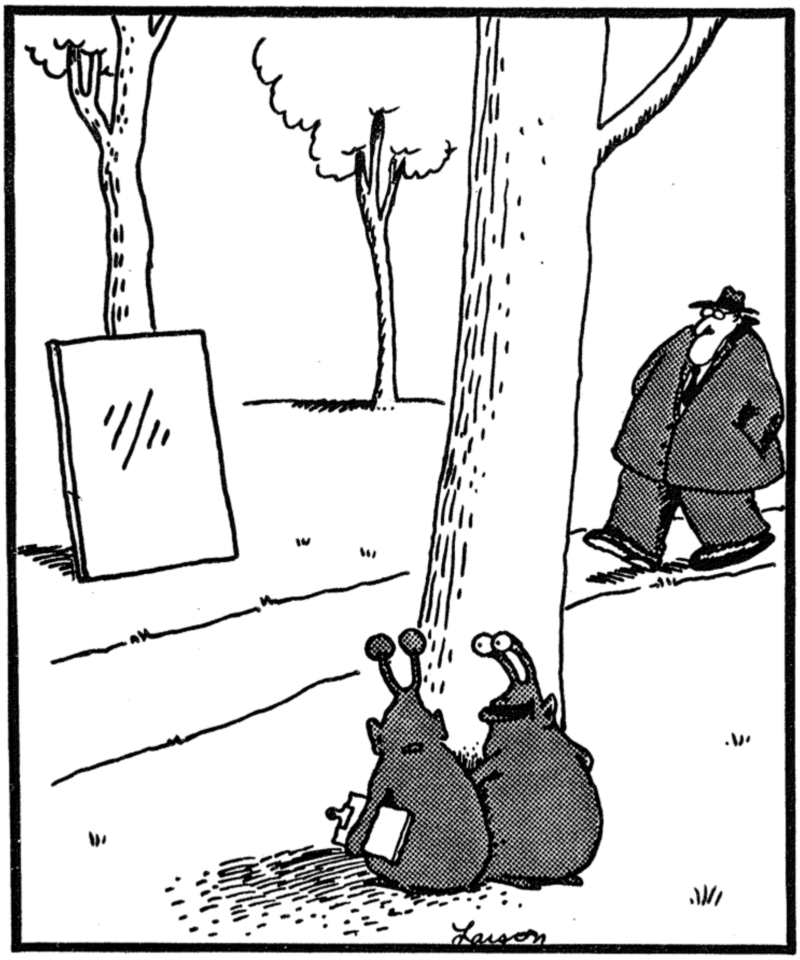
21 Für alle $a, b \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$a^{n+1} - b^{n+1} = (a-b)(a^n + a^{n-1}b + .. + ab^{n-1} + b^n).$$

22 Man zeige:
a. $[0,1)$ und $[0,\infty)$ sind gleichmächtig.
b. $[0,1]$ und $[0,1)$ sind gleichmächtig.
Hinweis: Teil b ist schwerer als Teil a ...

Zusatzaufgabe

23 Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist $1 + 2^{2^n} + 2^{2^{n+1}}$ durch 7 teilbar.



"And now we'll see if it attacks its own reflection."

24 *Algebraische Zahlen* Eine reelle Zahl r heißt *algebraisch*, wenn sie Nullstelle eines Polynoms mit ganzzahligen Koeffizienten ist, wenn es also ganze Zahlen $a_0, .., a_n$ mit $a_n \neq 0$ gibt, so dass $a_n r^n + .. + a_1 r + a_0 = 0$. Jede rationale Zahl $r = p/q$ ist zum Beispiel algebraisch, denn $qr - p = 0$. Man zeige, dass die Menge aller algebraischen Zahlen abzählbar ist.

25 *Transzendente Zahlen* Jede nicht-algebraische reelle Zahl wird *transzendent* genannt. Man zeige, dass jedes nichtentartete Intervall abzählbar viele algebraische und überabzählbar viele transzendente Zahlen enthält.

26 Man beweise die *umgekehrte Dreiecksungleichung*,

$$|z + w| \geqslant \big| |z| - |w| \big|$$

und die *Parallelogrammgleichung*,

$$|z + w|^2 + |z - w|^2 = 2\,|z|^2 + 2\,|w|^2 .$$

Schriftliche Aufgaben

27 Bringen sie die folgenden komplexen Zahlen in die Form $u + v\mathrm{i}$.

a. $\dfrac{1 + \mathrm{i}}{1 - \mathrm{i}}$ *b.* $\left|\dfrac{2 - 3\mathrm{i}}{3 + 4\mathrm{i}}\right|$ *c.* $(2 + 3\mathrm{i})^3$ *d.* $\displaystyle\sum_{n=1}^{77} i^n$

28 Beweisen sie ausführlich den *Satz über den Koeffizientenvergleich:*
Zwei reelle Polynome sind als Funktionen auf $\mathbb{R}$ *gleich genau dann, wenn ihre entsprechenden Koeffizienten gleich sind.*
Hinweis I: Beweisen Sie per Induktion zuerst folgende Hilfsaussage: *Ein reelles Polynom* p *ist identisch* 0 *dann und nur dann, wenn alle seine Koeffizienten* 0 *sind. Hinweis II:* Sie können dafür folgende Tatsache verwenden: Gilt $p(x) = 0$ für alle $0 \neq x \in \mathbb{R}$, so gilt auch $p(0) = 0$.

29 Prüfungsanmeldungsnachweis beilegen.

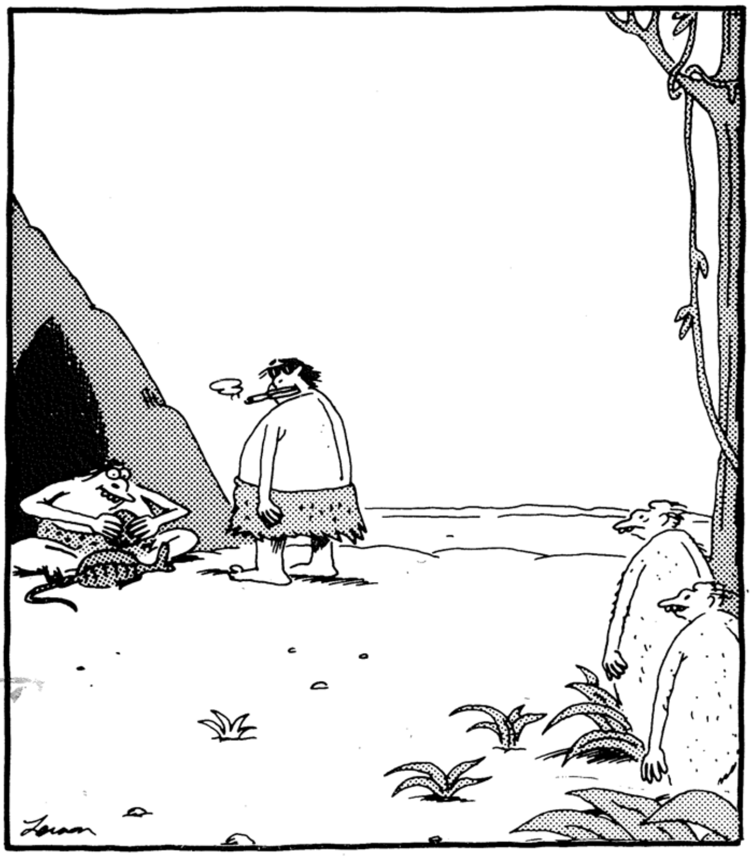
Zusatzaufgabe

30 *Hauptteil der Wurzel* Zu jedem $z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ gibt es genau ein $w \in \mathbb{C}$ mit

$$w^2 = z, \qquad \operatorname{Re} w > 0.$$

Und zwar ist

$$w = \sqrt{\frac{|z| + \operatorname{Re} z}{2}} + \mathrm{i}\sigma\sqrt{\frac{|z| - \operatorname{Re} z}{2}}, \qquad \sigma = \operatorname{sgn}(\operatorname{Im} z).$$



Drawn by the pulsating sound of a rock thumping on a dead armadillo, two Australopithecines stood at the forest edge. Instantly, Thag's agent knew they had a crossover hit.

31 Jede Abzählung von $\mathbb{Q} \cap [0,1]$ ist divergent.

32 *a.* Sei $A \subset \mathbb{R}$ nicht leer und beschränkt. Konstruieren sie eine Folge (a_n) in A, die gegen $\sup A$ konvergiert.
b. Konstruieren sie zu einer beliebigen Zahl $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ eine Folge (a_n) in $\mathbb{Q}$, die gegen x konvergiert.

33 Es gelte $a_n \to a$ und $b_n \to b$. Dann gilt auch $\max\{a_n, b_n\} \to \max\{a, b\}$.

34 *Einschliessungssatz* Seien (a_n), (b_n), (c_n) reelle Zahlenfolgen mit $a_n \leqslant b_n \leqslant c_n$ für alle $n \geqslant 1$. Konvergieren (a_n) und (c_n) mit demselben Grenzwert b, so konvergiert auch (b_n) gegen b.

Schriftliche Aufgabe

35 Sei (a_n) eine konvergente Folge. Existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ wenigstens ein n mit $0 < a_n < \varepsilon$, so ist $\lim a_n = 0$.

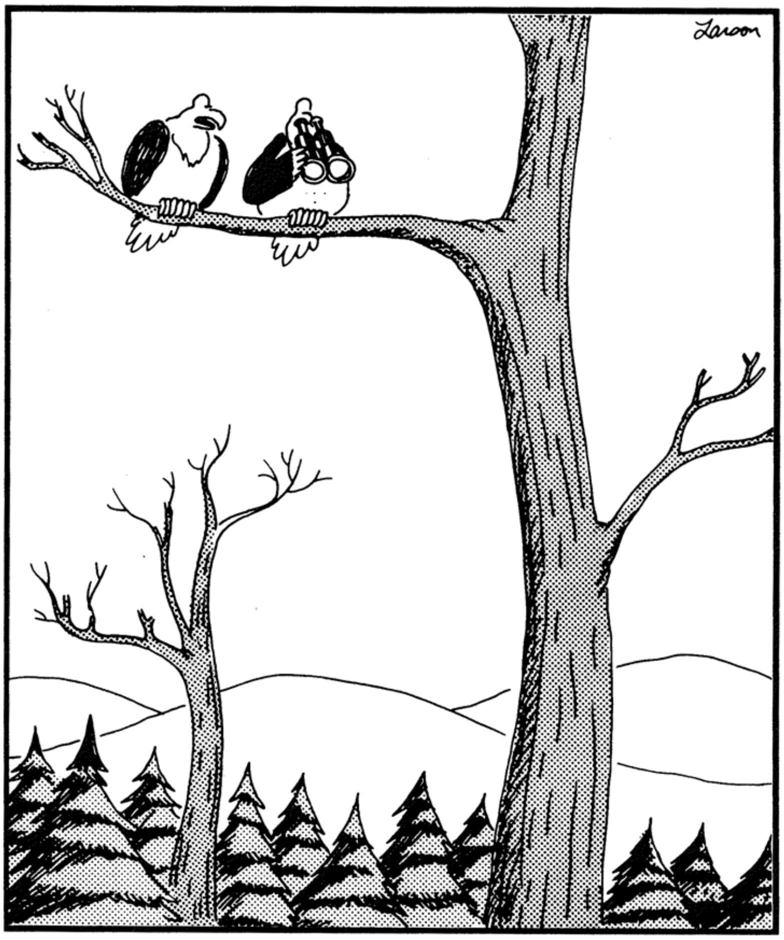
36 Zu einer beliebigen reellen Zahl $a > 1$ definiere man drei Folgen (a_n), (b_n), (c_n) durch

$$a_n = \sqrt{n+a} - \sqrt{n}, \qquad b_n = \sqrt{n + \sqrt{n}} - \sqrt{n}, \qquad c_n = \sqrt{n + n/a} - \sqrt{n}.$$

Dann gilt $a_n > b_n > c_n$ für $n < a^2$, aber $a_n \to 0$, $b_n \to 1/2$ und $c_n \to \infty$.

Zusatzaufgabe

37 Von der Folge (a_n) konvergieren die Teilfolgen (a_{2n}), (a_{2n+1}) und (a_{3n}). Konvergiert dann auch (a_n)? Mit Beweis oder Gegenbeispiel!



"You're cheating, Ned."

38 Untersuchen sie die Konvergenz der Folge (a_n) mit

$$a_n = \frac{bn^k}{cn^l + d}$$

in Abhängigkeit von $k, l \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$. Dabei seien $b, c, d > 0$.

39 Sei $a > 1$. Zeigen sie, dass die Folge

$$a_1 = a, \qquad a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{a}{a_n}\right), \qquad n \geqslant 1.$$

monoton fallend gegen $\sqrt{a}$ konvergiert. Wieso ist dies ein Gegenbeispiel zum Satz von der monotonen Konvergenz in $\mathbb{Q}$?

40 Angenommen, es existiert der Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = a.$$

Wie kann man dann

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{2}{n}\right)^n = b, \qquad \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = c$$

durch a ausdrücken? Dabei können Sie annehmen, dass diese Grenzwerte existieren.

41 Eine reelle Folge ist konvergent genau dann, wenn sie beschränkt ist und genau einen Häufungswert hat.

Schriftliche Aufgaben

42 Bestimmen sie die Grenzwerte der Folgen mit Gliedern

a. $\sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ *b.* $\sqrt{n^2+n} - n$ *c.* $\sqrt[n]{n^p}$, $p \geqslant 1$.

d. $\dfrac{n!}{n^n}$ *e.* $\dfrac{n + (-1)^n}{n - (-1)^n}$ *f.* $\sqrt[n]{2^n + 3^n + 4^n}$

43 Seien a und b beliebige reelle Zahlen und die Folge (a_n) rekursiv definiert durch

$$a_0 \coloneqq a, \quad a_1 \coloneqq b, \quad a_{n+1} \coloneqq \frac{a_n + a_{n-1}}{2}, \quad n \geqslant 1.$$

Zeigen sie, dass (a_n) konvergiert, und bestimmen sie den Grenzwert.

Zusatzaufgabe

44 Ist (q_n) eine Abzählung der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$, so ist die Menge ihrer Häufungswerte genau die Menge $\mathbb{R}$ aller reellen Zahlen.

The Zeonions came with the answers to many secrets of the universe. Vern, regrettably, came with thick glasses and his deer rifle.

45 Gibt es eine *divergente* komplexe Folge (z_n) derart, dass sowohl $(|z_n|)$ als auch $(\operatorname{Re} z_n)$ *konvergieren?*

46 Gibt es eine Folge $(a_n)_{n\geqslant 1}$ in $[0,1]$,

a. die abzählbar unendlich viele Häufungswerte hat?
b. die überabzählbar viele Häufungswerte hat?
c. deren Häufungswerte genau die rationalen Zahlen in $[0,1]$ sind?
d. mit $|a_m - a_n| \geqslant \varepsilon/n$ für alle $m > n \geqslant 1$ und irgendeinem $\varepsilon > 0$?

47 Von der Folge (a_n) konvergieren die Teilfolgen (a_{2n}) und (a_{2n+1}). Dann hat (a_n) genau die beiden Häufungswerte $\lim a_{2n}$ und $\lim a_{2n+1}$.

48 Zeigen Sie für

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \qquad b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}, \qquad n \geqslant 1 :$$

a. $(a_n)_{n\geqslant 1}$ ist monoton steigend.
b. $(b_n)_{n\geqslant 1}$ ist monoton fallend.
c. Beide Folgen sind konvergent und haben denselben Grenzwert.
d. Wie kann man

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{m}{n}\right)^n, \qquad \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{m}{n}\right)^n, \qquad m \in \mathbb{N},$$

durch diesen Grenzwert ausdrücken?

Schriftliche Aufgaben

49 Bestimmen sie alle Häufungswerte der Folgen mit Gliedern

a. $\dfrac{(-1)^n n}{n+1}$ *b.* $\dfrac{(-1)^n n}{n^2+1}$ *c.* $\dfrac{(-2)^n}{n^2+1}$ *d.* $(1 + (-1)^n)\dfrac{n+1}{n} + (-1)^n$

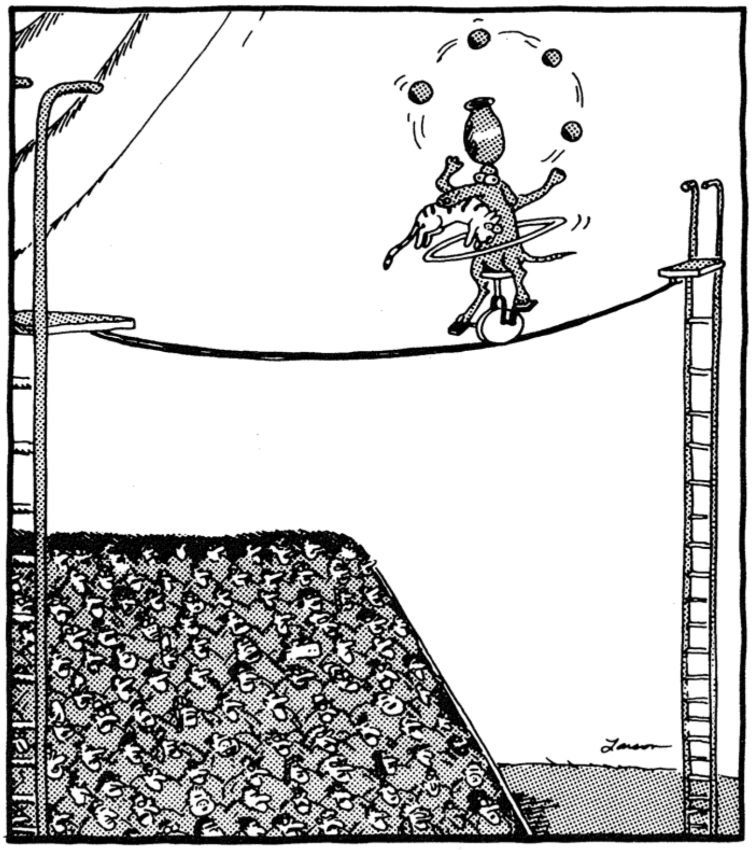
50 Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Mit Begrüdung natürlich.

a. Es gibt eine unbeschränkte reelle Folge mit genau drei Häufungswerten.
b. Eine reelle Folge mit genau einem Häufungswert ist konvergent.
c. Eine unbeschränkte Folge hat keinen Häufungswert.
d. Eine monotone Zahlenfolge ist entweder konvergent oder unbeschränkt.
e. Eine divergente Zahlenfolge hat keinen Häufungswert.
f. Eine divergente Folge hat mindestens zwei Häufungswerte.

Zusatzaufgabe

51 Ist p_n/q_n eine konvergente Folge rationaler Zahlen mit irrationalem Grenzwert, so gilt

$$|p_n| \to \infty, \qquad q_n \to \infty.$$



High above the hushed crowd, Rex tried to remain focused. Still, he couldn't shake one nagging thought: He was an old dog and this was a new trick.

52 *Abelsche partielle Summation* Sei $\sum_k a_k b_k$ eine Zahlenreihe. Mit $B_n = \sum_{1 \leqslant k \leqslant n} b_k$ gilt dann

$$\sum_{n<k\leqslant m} a_k b_k = a_m B_m - a_{n+1} B_n + \sum_{n<k<m} (a_k - a_{k+1}) B_k, \qquad n < m.$$

Hinweis: Schreiben sie $b_k = B_k - B_{k-1}$.

53 *Abelsches Konvergenzkriterium* Ist (a_n) monoton und beschränkt und konvergiert die Reihe $\sum b_n$, so konvergiert auch $\sum a_n b_n$. *Hinweis:* Aufgabe **??**.

54 Die Reihe $\sum_n a_n$ habe positive Glieder und sei divergent. Was kann man über die folgenden Reihen aussagen?

a. $\sum_n \dfrac{a_n}{1+a_n}$ *b.* $\sum_n \dfrac{a_n}{1+n^2 a_n}$ *c.* $\sum_n \dfrac{a_n}{1+a_n^2}$

55 Sei (a_n) monoton fallend und $\sum_{n\geqslant 1} a_n = s$ endlich. Dann gilt $0 \leqslant a_n \leqslant s/n$ für $n \geqslant 1$ und $n a_n \to 0$.

Schriftliche Aufgabe

56 Untersuchen sie die folgenden Reihen auf Konvergenz.

a. $\sum \dfrac{n+4}{n^2-3n+1}$ *b.* $\sum \dfrac{n!}{n^n}$ *c.* $\sum \dfrac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n}}$

d. $\sum (-1)^n \left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$ *e.* $\sum \dfrac{(-1)^n}{n\pi - (-1)^n n}$

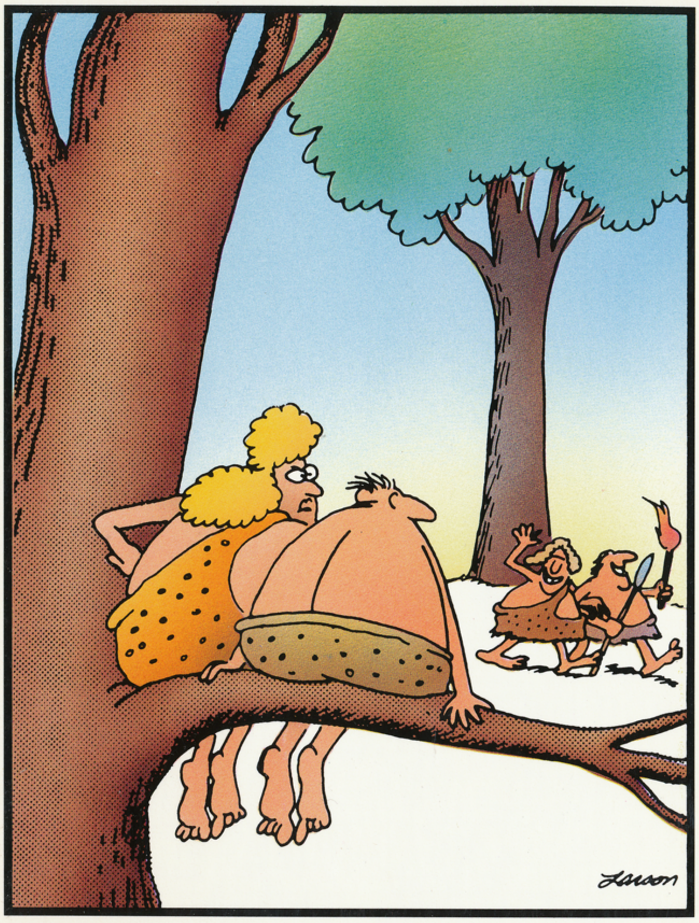
f. $\sum \left(1 - \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)^n$ *g.* $\sum \dfrac{n!}{3\cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n+1)}$

Zusatzaufgabe

57 *Raabesches Konvergenzkriterium* Eine Reihe $\sum_n a_n$ mit positiven Gliedern ist konvergent, wenn es ein $\alpha > 1$ gibt, so dass für fast alle n

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant 1 - \frac{\alpha}{n}.$$

Hinweis: Es gibt eine Majorante mit Folgenglied c/n^α.



"And now there go the Wilsons! . . . Seems like everyone's evolving except us!"

58 Die *Thomaefunktion*

$$\tau: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \tau(x) \coloneqq \begin{cases} 0, & x \notin \mathbb{Q} \\ 1/q, & x = p/q \text{ mit teilerfremden } p, q \text{ und } q > 0. \end{cases}$$

– eine Art *modifizierte Dirichletfunktion* – ist in jedem rationalen Punkt unstetig und sonst stetig.

59 Sei I ein offenes Intervall und $f: I \to \mathbb{R}$ im Punkt $a \in I$ stetig. Dann existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$, so dass

$$|f(x)| \geqslant (1-\varepsilon)\,|f(a)|, \qquad x \in U_\delta(a).$$

Gilt entsprechend auch $|f(x)| \leqslant (1+\varepsilon)\,|f(a)|$?

60 Es gibt keine stetige Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die jeden Wert ihres Wertebereiches $f(\mathbb{R})$ genau zweimal annimmt.

Schriftliche Aufgaben

61 Zeigen sie, dass die Funktion

$$h: \mathbb{R} \to (-1, 1), \quad t \mapsto \frac{t}{1+|t|}$$

bijektiv ist, und dass h und h^{-1} stetig sind.

62 Ist die Funktion

$$f: \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}, \quad x \mapsto \begin{cases} 0, & x < \sqrt{2}, \\ 1, & x > \sqrt{2} \end{cases}$$

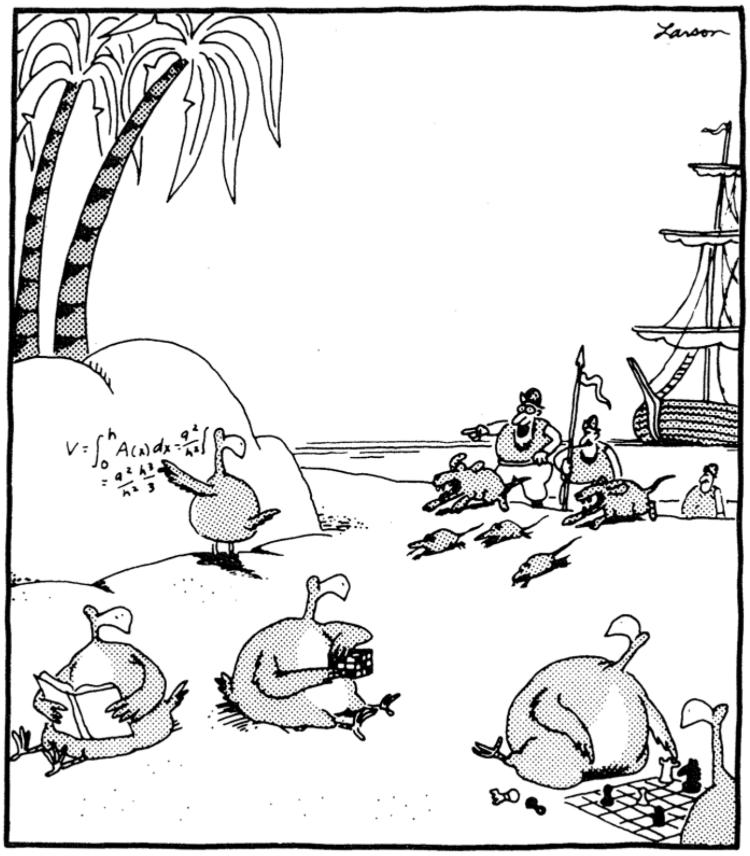
stetig? Gilt der Zwischenwertsatz?

Zusatzaufgabe

63 Sei $(E, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum und $M \subset E$ nichtleer. Dann ist die *Abstandsfunktion*

$$d_M: E \to \mathbb{R}, \qquad d_M(x) \coloneqq \inf_{m \in M} \|x - m\|$$

1-lipschitz.



Unbeknownst to most ornithologists, the dodo was actually a very advanced species, living alone quite peacefully until, in the 17th century, it was annihilated by men, rats, and dogs. As usual.

64 Man bestimme die uneigentlichen Grenzwerte

a. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{4x^2+2x-1}-2x\right)$ *b.* $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{x}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)$

c. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{8x^3+2x^2+1}{2x^3+7x}$ *d.* $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(-1)^{[x]}}{x}$

65 Kann das Produkt fg oder die Komposition $f\circ g$ zweier Funktionen in einem Punkt stetig sein, auch wenn beide Funktionen in den entsprechenden Punkten unstetig sind?

66 Sei $f\colon I\to\mathbb{R}$ im Punkt $a\in I$ stetig. Gibt es eine affine Funktion $\lambda\colon t\mapsto m(t-a)+b$ mit

$$\lim_{t\to a}\frac{|f(t)-\lambda(t)|}{|t-a|}=0,$$

so ist diese eindeutig bestimmt, und es ist $b=f(a)$ und $m=f'(a)$.

Schriftliche Aufgaben

67 Man bestimme die Grenzwerte

a. $\lim\limits_{t\to 1}\dfrac{t^3+t^2-t-1}{t+1}$ *b.* $\lim\limits_{t\to 1}\dfrac{t^3+t^2-t-1}{t-1}$ *c.* $\lim\limits_{t\to 1}\dfrac{t^3+t^2-t-1}{t^2-1}$

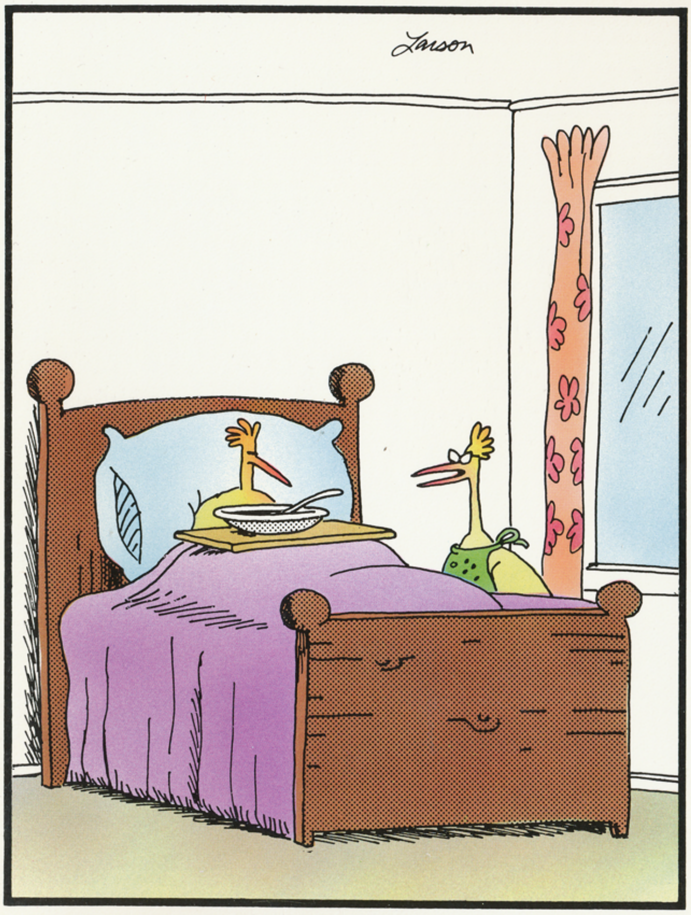
d. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{1-x^2}}{x^2}$ *e.* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{|x|}$.

68 Die Funktionen f,g seien in einer Umgebung des Punktes $c\in\mathbb{R}$ erklärt, im Punkt c seien f differenzierbar, g stetig, und $f(c)=0$. Dann ist auch fg in c differenzierbar.

Zusatzaufgaben

69 Zu jeder Tageszeit gibt es antipodale Punkte auf dem Äquator mit derselben Temperatur.

70 Ein quadratischer Tisch mit gleichlangen Beinen an allen vier Ecken lässt sich auf jedem stetigen, aber beliebig unebenen Untergrund so platzieren, dass er nicht wackelt.



"Quit complaining and eat it! . . . Number one, chicken soup is good for the flu — and number two, it's nobody we know."

Votieraufgaben

71 Ist f auf $[a,b]$ differenzierbar und f' monoton, so ist f sogar stetig differenzierbar.

72 Gilt für eine Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die Ungleichung

$$|f(u) - f(v)| \leqslant |u - v|^2, \qquad u, v \in \mathbb{R},$$

so ist f konstant.

73 Sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig, auf (a,b) stetig differenzierbar, und f' sei auf $[a,b]$ stetig fortsetzbar. Dann ist f in a und b ebenfalls differenzierbar.

Schriftliche Aufgaben

74 Bestimmen sie die Linearisierungen in $a = 0$ der Funktionen f mit Funktionsterm
a. $\sqrt{1+t}$ *b.* $\dfrac{1}{1-t}$ *c.* $(1+t)^n$ *d.* $\sqrt[n]{1+t}$.

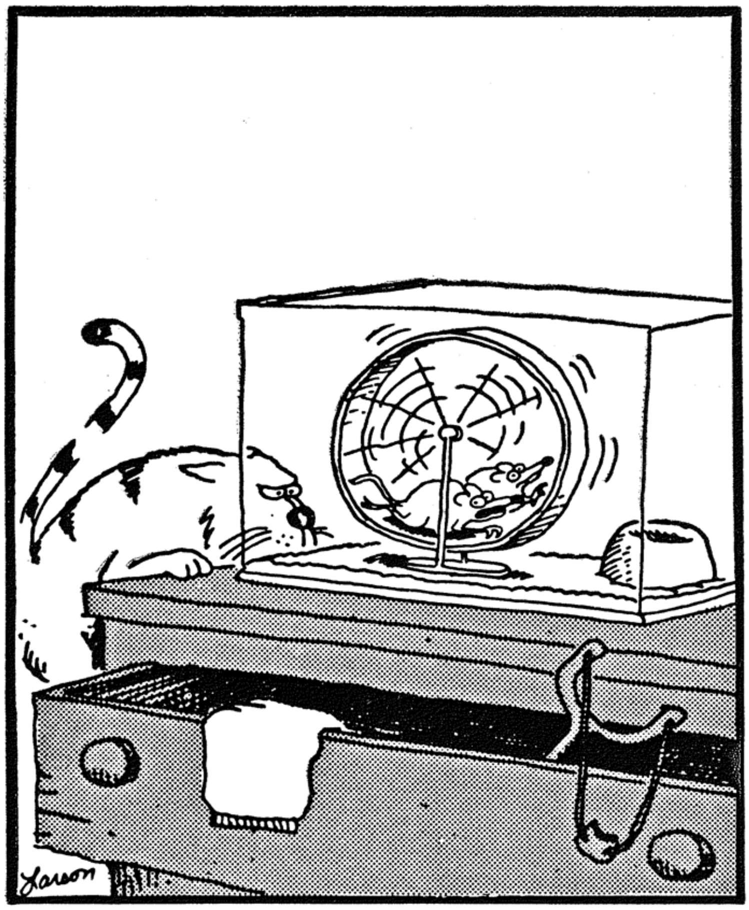
75 Die Funktion f sei auf $[0,b]$ stetig, auf $(0,b)$ differenzierbar, und es sei $f(0) = 0$. Ist f' (streng) monoton wachsend, so ist auch f/t (streng) monoton wachsend.

Zusatzaufgaben

76 *Verbesserter Schrankensatz* Sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und auf (a,b) differenzierbar. Dann ist f lipschitzstetig auf $[a,b]$ *genau dann*, wenn f' auf (a,b) beschränkt ist. Die bestmögliche Lipschitzkonstante ist in diesem Fall

$$L = \sup_{a<t<b} |f'(t)|.$$

77 *Zwischenwertsatz für die erste Ableitung* Sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und auf (a,b) differenzierbar. Dann nimmt f' jeden Wert zwischen $\inf_{(a,b)} f'$ und $\sup_{(a,b)} f'$ an. *Hinweis:* Es ist nicht erforderlich, dass f' stetig ist.



"Faster! He's still there!"

Votieraufgaben

78 Sei $I = (-1,1)$, die Funktion $f\colon I \to \mathbb{R}$ sei im Punkt 0 differenzierbar, und $(u_n), (v_n)$ seien zwei gegen 0 konvergierende Folgen in I. Dann gilt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(u_n) - f(v_n)}{u_n - v_n} = f'(0),$$

wenn eine der drei folgenden Bedingungen erfüllt ist:

(i) $u_n < 0 < v_n$ für alle n.
(ii) $0 < u_n < v_n$ für alle n und $v_n/(v_n - u_n)$ ist beschränkt.
(iii) Es ist $f \in C^1(I)$.

79 Die *Legendreschen Polynome* P_n sind definiert durch

$$P_n(t) \coloneqq \frac{1}{2^n n!}\partial^n (t^2-1)^n, \qquad n \geqslant 0.$$

a. Bestimmen sie P_n für $0 \leqslant n \leqslant 5$.
b. Jedes P_n ist ein Polynom vom Grad n mit genau n Nullstellen in $(-1,1)$.

80 Sei I ein abgeschlossenes Intervall, $f \in C^{n+1}(I)$ und $a \in I$ ein beliebiger Punkt. Gilt für ein Polynom p_n vom Grad n die Abschätzung

$$|f(t) - p_n(t)| \leqslant M\,|t-a|^{n+1}, \qquad t \in I,$$

so ist $p_n = T_a^n f$.

Schriftliche Aufgaben

81 Für $f \in C^n(I)$ gilt $\partial^n(tf(t)) = t\partial^n f(t) + n\partial^{n-1} f(t)$.

82 *Verallgemeinerter Satz von Rolle* Die Funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ sei $n-1$-mal stetig differenzierbar und auf (a,b) n-mal differenzierbar, wobei $n \geqslant 1$. Besitzt f Nullstellen $a_0 < a_1 < .. < a_n$ in $[a,b]$, so gibt es einen Punkt $c \in (a_0, a_n)$ mit $f^{(n)}(c) = 0$.

Zusatzaufgaben

83 Sei I ein offenes Intervall. Eine Funktion $f \in C^2(I)$ heiße *konvex*, wenn $f'' \geqslant 0$ auf ganz I. Man zeige:

a. Für alle $a \in I$ gilt

$$f(t) \geqslant T_a^1 f(t), \qquad t \in I.$$

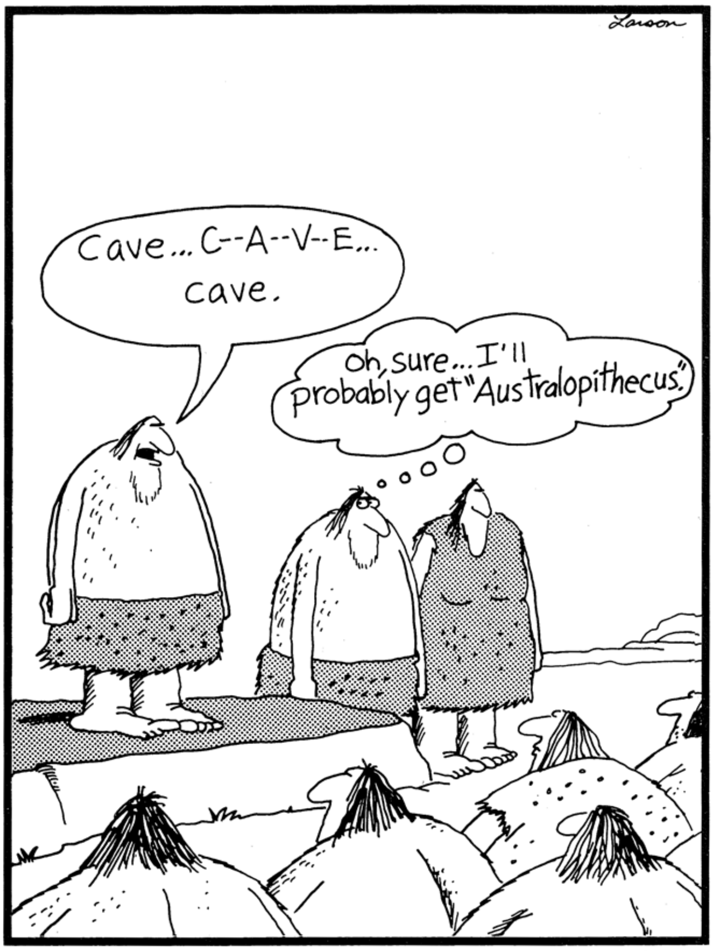
Man sagt, *f liegt oberhalb aller seiner Stützgeraden.*

b. Für alle $u, v \in I$ und $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$ gilt

$$f(\lambda u + (1-\lambda)v) \leqslant \lambda f(u) + (1-\lambda) f(v).$$

c. Für beliebige $u_1, .., u_n \in I$ und $\lambda_1, .., \lambda_n \in [0,1]$ mit $\lambda_1 + .. + \lambda_n = 1$ gilt

$$f(\lambda_1 u_1 + .. + \lambda_n u_n) \leqslant \lambda_1 f(u_1) + .. + \lambda_n f(u_n).$$



Primitive spelling bees

Votieraufgaben

84 Für kein $a \in \mathbb{R}$ ist $(\cos(na)_{n\geqslant 0})$ eine Nullfolge.

85 *Tschebyschew-Polynome* Für jedes $n \geqslant 0$ gibt es ein Polynom T_n vom Grad n, so dass

$$T_n(\cos z) = \cos nz.$$

Dieses Polynom heißt *Tschebyschew-Polynom* vom Grad n.

a. Es gilt die Rekursionsformel

$$T_{n+1}(t) = 2tT_n(t) - T_{n-1}(t), \qquad n \geqslant 1,$$

mit $T_0 = 1$ und $T_1(t) = t$. Man berechne damit $T_2, .., T_5$.

b. In $[-1,1]$ hat T_n die Nullstellen

$$x_k = \cos\frac{2k-1}{2n}\pi, \qquad k = 1, .., n,$$

und die Extremalstellen $c_k = \cos k\pi/n$, $k = 0, 1, .., n$.

86 *a.* Es gilt

$$\frac{t}{1+t} \leqslant \log(1+t) \leqslant t, \qquad t \geqslant 0.$$

b. Hieraus folgt für $a \geqslant 0$

$$\exp\left(\frac{a}{1+a/n}\right) \leqslant \left(1+\frac{a}{n}\right)^n \leqslant \exp(a), \qquad n \geqslant 1.$$

c. Also gilt

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{a}{n}\right)^n = \exp(a).$$

87 *a.* Für alle $t \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$|\sin nt| \leqslant n\,|\sin t|.$$

b. Es gibt $t \in \mathbb{R}$ und $a > 0$, so dass

$$|\sin at| > a\,|\sin t|.$$

88 Zur Funktion $f\colon t \mapsto \log\dfrac{1+t}{1-t}$ bestimme man $T_0^{2n+1}f$.

Zusatzaufgabe

89 *a.* Für $0 \leqslant t \leqslant 1/2$ gilt

$$\frac{1}{1-t} \leqslant \mathrm{e}^{2t}.$$

b. Sind $p_1, .., p_m$ alle Primzahlen, die eine der Zahlen $1, 2, .., n$ teilen, so gilt

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leqslant \prod_{l=1}^{m} \left(1 - \frac{1}{p_l}\right)^{-1} \leqslant \exp\left(\sum_{l=1}^{m} \frac{2}{p_l}\right).$$

c. Schließen sie hieraus, dass

$$\sum_{p \in \mathbb{P}} \frac{1}{p} = \infty.$$

"That was incredible. No fur, claws, horns, antlers, or nothin'. . . . Just soft and pink."

Votieraufgaben

90 Beweisen oder widerlegen sie für Teilmengen A, B eines normierten Raumes die folgenden Aussagen.
a. $(A \cup B)^\circ = A^\circ \cup B^\circ$. *b.* $(A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$.

91 *Kriterium für gleichmäßige Stetigkeit* Eine Funktion $f\colon I \to \mathbb{R}$ ist gleichmäßig stetig auf dem Intervall I genau dann, wenn für je zwei beliebige Folgen (u_n) und (v_n) in I mit $u_n - v_n \to 0$ immer auch $f(u_n) - f(v_n) \to 0$ gilt.

Schriftliche Aufgaben

92 Für beliebige Teilmengen A und B eines normierten Raumes E gilt:
a. $A \subset B \;\Rightarrow\; A^- \subset B^-$. *b.* $(A \cup B)^- = A^- \cup B^-$.
c. $(A^-)^- = A^-$. *d.* $A^\circ = E \setminus (E \setminus A)^-$.

93 Seien A und B abgeschlossene Teilmengen eines normierten Raumes, $g\colon A \to \mathbb{R}$ und $h\colon B \to \mathbb{R}$ stetig, und $g \mid A \cap B = h \mid A \cap B$. Dann ist auch

$$f\colon\; A \cup B, \quad f = \begin{cases} g & \text{auf } A \\ h & \text{auf } B \end{cases}$$

stetig.

94 Ist $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig und existieren die Grenzwerte $\lim_{t\to\infty} f(t)$ und $\lim_{t\to-\infty} f(t)$ in $\mathbb{R}$, so ist gleichmäßig stetig. Gilt auch die Umkehrung?

Zusatzaufgabe

95 Sei $K_0 \supset K_1 \supset ..$ eine fallende Folge nichtleerer, kompakter Teilmengen eines normierten Raumes. Dann ist $\bigcap_{n\geqslant 0} K_n$ nicht leer.

Sonstige Aufgaben

96 Ist $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gleichmäßig stetig, so existiert eine Konstante M derart, dass

$$|f(t)| \leqslant M(1 + |t|), \qquad t \in \mathbb{R}.$$

97 Bestimmen sie alle kompakten Teilmengen von $\{0\} \cup \{1/n : n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}$.

98 Es seien E und F normierte Räume. Dann ist $f\colon E \to F$ stetig genau dann, wenn

$$f(A^-) = f(A)^-$$

für jede Teilmenge $A \subset E$ mit kompaktem Abschluss.

99 Eine Teilmenge $K \subset \mathbb{R}$ ist kompakt genau dann, wenn jede reellwertige stetige Funktion auf K beschränkt ist.

"Mr. Osborne, may I be excused? My brain is full."