

[illegible]

(3) **Aufgabe 1**

Sei $f: M \rightarrow N$ eine Abbildung zwischen beliebigen nichtleeren Mengen M und N , und für eine beliebige Teilmenge $B \subset N$ sei

$$f^{-1}(B) := \{a \in M : f(a) \in B\}.$$

Zeigen Sie, dass damit

$$f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$$

für alle $B_1, B_2 \subset N$.

Lösung

Mit der Definition von $f^{-1}(B)$ ist

$$\begin{aligned} a \in f^{-1}(B_1 \cap B_2) &\Leftrightarrow f(a) \in B_1 \cap B_2 \\ &\Leftrightarrow f(a) \in B_1 \wedge f(a) \in B_2 \\ &\Leftrightarrow a \in f^{-1}(B_1) \wedge a \in f^{-1}(B_2) \\ &\Leftrightarrow a \in f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2). \quad \blacktriangleleft \end{aligned}$$

(3) **Aufgabe 2**

Zeigen Sie für $a, b \in \mathbb{C}$ die Äquivalenz

$$|a - b| = |1 - a\bar{b}| \Leftrightarrow |a| = 1 \vee |b| = 1.$$

Lösung

Es ist $|z|^2 = z\bar{z}$. Damit gilt

$$\begin{aligned} |a - b| = |1 - a\bar{b}| &\Leftrightarrow |a - b|^2 = |1 - a\bar{b}|^2 \\ &\Leftrightarrow (a - b)(\bar{a} - \bar{b}) = (1 - a\bar{b})(1 - \bar{a}b) \\ &\Leftrightarrow |a|^2 + |b|^2 - a\bar{b} - \bar{a}b = 1 - a\bar{b} - \bar{a}b + |a|^2 |b|^2 \\ &\Leftrightarrow 1 - |a|^2 - |b|^2 + |a|^2 |b|^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow (1 - |a|^2)(1 - |b|^2) = 0 \\ &\Leftrightarrow |a|^2 = 1 \vee |b|^2 = 1 \\ &\Leftrightarrow |a| = 1 \vee |b| = 1. \quad \blacktriangleleft \end{aligned}$$

(4) **Aufgabe 3**

Zeigen Sie, dass für alle $n \geq 1$ gilt:

$$(1+x)^n \leq 1 + (2^n - 1)x, \quad 0 \leq x \leq 1.$$

Lösung

Für $n = 1$ ist dies (hoffentlich) klar. Angenommen, die Ungleichung gilt für ein $n \geq 1$. Dann folgt

$$\begin{aligned} (1+x)^{n+1} &= (1+x)(1+x)^n \\ &\leq (1+x)(1+(2^n-1)x) \quad (\text{wegen Induktionsvoraussetzung}) \\ &= 1 + (2^n-1)x + x + (2^n-1)x^2 \\ &\leq 1 + (2^n-1)x + x + (2^n-1)x \quad (\text{wegen } x \leq 1) \\ &= 1 + (2^{n+1}-1)x. \quad \blacktriangleleft \end{aligned}$$

(5) **Aufgabe 4**

a. Geben Sie die Definition dafür, dass eine reelle Zahlenfolge $(a_n)_{n \geq 1}$ eine Cauchyfolge bildet.

b. Zeigen Sie: Gilt

$$|a_n - a_m| \leq \frac{1}{\min(m, n)}, \quad m, n \geq 1,$$

so bildet (a_n) eine Cauchyfolge.

c. Zeigen Sie, dass die Folge mit

$$a_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$$

keine Cauchyfolge bildet.

Lösung

a. Siehe Skript.

b. Sei $\varepsilon > 0$. Wählen wir $N > 1 + 1/\varepsilon$, so folgt für $n, m \geq N$ die Abschätzung

$$|a_n - a_m| \leq \frac{1}{\min(m, n)} \leq \frac{1}{N} < \varepsilon.$$

Also ist (a_n) eine Cauchyfolge.

c. Jede Cauchyfolge ist beschränkt. Die harmonische Reihe ist aber divergent, so dass $a_n \rightarrow \infty$. Also kann (a_n) keine Cauchyfolge bilden. $\blacktriangleleft$

(5) **Aufgabe 5**

Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz.

$$a. \sum_{n \geq 1} \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}}{n} \quad b. \sum_{n \geq 1} \frac{e^n + e^{-n}}{3^n} \quad c. \sum_{n \geq 1} \frac{1}{\log(1+n^2)}$$

Lösung

a. Konvergent. Zum Beispiel erhält man eine konvergente Majorante mit

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}}{n} &= \frac{2}{n(\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1})} \\ &\leq \frac{1}{n\sqrt{n-1}} \leq \frac{1}{(n-1)^{3/2}}, \quad n > 1. \end{aligned}$$

b. Konvergent, da

$$\sum_{n \geq 1} \frac{e^n + e^{-n}}{3^n} = \sum_{n \geq 1} \left(\frac{e}{3}\right)^n + \sum_{n \geq 1} \left(\frac{1}{3e}\right)^n$$

und $e/3 < 1$.

c. Divergent, da

$$\log(1+n^2) \leq \log(1+n)^2 = 2\log(1+n) \leq 2n,$$

also

$$\frac{1}{\log(1+n^2)} \geq \frac{1}{\log(1+n)} \geq \frac{1}{2n}. \quad \blacktriangleleft$$

(6) **Aufgabe 6**

a. Geben Sie die Definition der Stetigkeit von $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ in einem Punkt $\xi \in \mathbb{R}$.

b. Formulieren Sie den Zwischenwertsatz für $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$.

c. Zeigen Sie: Ist $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}$ stetig, so ist h konstant.

Lösung

a. Siehe Skript.

b. Sei $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig mit $g(a) \neq g(b)$. Dann existiert zu jedem z zwischen $g(a)$ und $g(b)$ mindestens ein $x \in [a, b]$ mit $g(x) = z$.

c. Wäre h nicht konstant, so müsste ja zwei verschiedene Werte in $\mathbb{Z}$ (!) annehmen. Dann müsste es auch jeden Wert zwischen diesen beiden Wert annehmen, also auch Werte, die nicht zu $\mathbb{Z}$ gehören. $\blacktriangleleft$

(6) **Aufgabe 7**

- a. Wie lautet die Definition der Differenzierbarkeit einer Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ in einem Punkt $x_0 \in \mathbb{R}$?
- b. Formulieren Sie den Mittelwertsatz der Differenzialrechnung für eine Funktion $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$.
- c. Bestimmen Sie den Grenzwert

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (\sin \sqrt{t+1} - \sin \sqrt{t}).$$

Hinweis: Es ist $\sin' = \cos$.

Lösung

- a. Siehe Skript.
- b. Sei $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und auf (a, b) differenzierbar. Dann existiert ein $c \in (a, b)$, so dass

$$g'(c) = \frac{g(b) - g(a)}{b - a}.$$

- c. Aufgrund des Mittelwertsatzes gibt es für jedes $t > 0$ ein c , so dass

$$(\sin \sqrt{t+1} - \sin \sqrt{t}) = \cos(c) (\sqrt{t+1} - \sqrt{t}).$$

Wegen $|\cos(c)| \leq 1$ für alle c gilt also

$$|\sin \sqrt{t+1} - \sin \sqrt{t}| \leq |\sqrt{t+1} - \sqrt{t}| = \frac{1}{\sqrt{t+1} + \sqrt{t}}.$$

Die rechte Seite konvergiert gegen 0 für $t \rightarrow \infty$. ◀

(4) **Aufgabe 8**

Zeigen Sie, dass die Funktion

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(t) = t^8 + at + b$$

für beliebige $a, b \in \mathbb{R}$ höchstens zwei Nullstellen haben kann.

Hinweis: Argumentieren Sie indirekt und verwenden Sie den Satz von Rolle.

Lösung

Hätte die Funktion f wenigstens drei Nullstellen $x_0 < x_1 < x_2$, so hätte aufgrund des Satzes von Rolle ihre Ableitung f' wenigstens zwei Nullstellen. Die Funktion

$$f'(x) = 8t^2 + a$$

hat aber nur eine Nullstelle – ein Widerspruch. ◀



At Slow Cheetahs Anonymous