Analysis 1

Erste Modulprüfung

Ws 2017/8

4. April 2018

- Es gibt 8 Aufgaben. Die jeweilige Punktzahl steht am linken Rand.
- Die Maximalpunktzahl ist 36, zum Bestehen sind 14 Punkte hinreichend.
- Die Bearbeitungszeit beträgt 120 Minuten.
- Es sind keine Hilfsmittel zugelassen.
- In allen Aufgaben sind alle Schritte zu begründen. Aussagen aus Vorlesung und Übungen dürfen dabei verwendet werden, sofern sie nicht Gegenstand der Aufgabe selbst sind.
- Verwenden Sie pro Aufgabe jeweils ein neues Blatt.
- Abgaben mit Bleistift oder Rotstift sind nicht zulässig.
- Tragen sie bitte Namen, Matrikelnummer sowie Namen Ihres Tutors ein.
- Und nun wie immer: Viel Erfolg!

Name M-Nr Tutor

1	2	3	4	5	6	7	8		$\sum$

⟨3⟩ **Aufgabe 1**
Sei $f : M \to N$ eine Abbildung zwischen beliebigen nichtleeren Mengen M und N, und für eine beliebige Teilmenge $B \subset N$ sei

$$f^{-1}(B) \coloneqq \{a \in M : f(a) \in B\}.$$

Zeigen Sie, dass damit

$$f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$$

für alle $B_1, B_2 \subset N$.

⟨3⟩ **Aufgabe 2**
Zeigen Sie für $a, b \in \mathbb{C}$ die Äquivalenz

$$|a - b| = |1 - a\overline{b}| \quad \Leftrightarrow \quad |a| = 1 \vee |b| = 1.$$

⟨4⟩ **Aufgabe 3**
Zeigen Sie, dass für alle $n \geqslant 1$ gilt:

$$(1 + x)^n \leqslant 1 + (2^n - 1)x, \qquad 0 \leqslant x \leqslant 1.$$

⟨5⟩ **Aufgabe 4**
a. Geben Sie die Definition dafür, dass eine reelle Zahlenfolge $(a_n)_{n \geqslant 1}$ eine Cauchyfolge bildet.
b. Zeigen Sie: Gilt

$$|a_n - a_m| \leqslant \frac{1}{\min(m, n)}, \qquad m, n \geqslant 1,$$

so bildet (a_n) eine Cauchyfolge.
c. Zeigen Sie, dass die Folge mit

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

keine Cauchyfolge bildet.

⟨5⟩ **Aufgabe 5**
Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz.

a. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}}{n}$ *b.* $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{e^n+e^{-n}}{3^n}$ *c.* $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{\log(1+n^2)}$

⟨6⟩ **Aufgabe 6**
a. Geben Sie die Definition der Stetigkeit von $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ in einem Punkt $\xi\in\mathbb{R}$.
b. Formulieren Sie den Zwischenwertsatz für $g\colon [a,b]\to\mathbb{R}$.
c. Zeigen Sie: Ist $h\colon \mathbb{R}\to\mathbb{Z}$ stetig, so ist h konstant.

⟨6⟩ **Aufgabe 7**
a. Wie lautet die Definition der der Differenzierbarkeit einer Funktion $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ in einem Punkt $x_0\in\mathbb{R}$?
b. Formulieren Sie den Mittelwertsatz der Differenzialrechnung für eine Funktion $g\colon [a,b]\to\mathbb{R}$.
c. Bestimmen Sie den Grenzwert

$$\lim_{t\to\infty}\left(\sin\sqrt{t+1}-\sin\sqrt{t}\right).$$

Hinweis: Es ist $\sin' = \cos$.

⟨4⟩ **Aufgabe 8**
Zeigen Sie, dass die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R},\quad f(t)=t^8+at+b$$

für beliebige $a,b,\in\mathbb{R}$ höchstens zwei Nullstellen haben kann.
Hinweis: Argumentieren Sie indirekt und verwenden Sie den Satz von Rolle.

At Slow Cheetahs Anonymous