Analysis 1

Zweite Modulprüfung

Ws 2017/8

5. Oktober 2018

- Es gibt 9 Aufgaben. Die jeweilige Punktzahl steht am linken Rand.
- Die Maximalpunktzahl ist 40, zum Bestehen sind 16 Punkte hinreichend.
- Die Bearbeitungszeit beträgt 120 Minuten.
- Es sind keine Hilfsmittel zugelassen.
- In allen Aufgaben sind alle Schritte zu begründen. Aussagen aus Vorlesung und Übungen dürfen dabei verwendet werden, sofern sie nicht Gegenstand der Aufgabe selbst sind.
- Verwenden Sie pro Aufgabe jeweils ein neues Blatt.
- Abgaben mit Bleistift oder Rotstift sind nicht zulässig.
- Tragen sie bitte Namen, Matrikelnummer sowie Namen Ihres Tutors ein.

Name	M-Nr	Tutor

1	2	3	4	5	6	7	8	9		Σ

⟨3⟩ **Aufgabe 1**
Zeigen Sie, dass für eine Menge A folgende Aussagen äquivalent sind.

(i) $A = \varnothing$.
(ii) $A \setminus B = A \cap B$ für jede Menge B.
(iii) $B \setminus A = B \cup A$ für jede Menge B.

⟨3⟩ **Aufgabe 2**
Seien $z, w \in \mathbb{C}$. Gilt $|z| < 1$ und $|w| < 1$, so gilt auch

$$\left| \frac{z + w}{1 + \bar{z}w} \right| < 1.$$

⟨4⟩ **Aufgabe 3**
Zeigen Sie, dass für alle $n \geqslant 2$ gilt:

$$\prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

⟨6⟩ **Aufgabe 4**
Zeigen Sie: Eine reelle Zahlenfolge $(a_n)_{n \geqslant 1}$ ist konvergent genau dann, wenn sie beschränkt ist und genau einen Häufungspunkt besitzt.

⟨6⟩ **Aufgabe 5**
Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz.

a. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)$

b. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{(n+1)(n+2)}$

c. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{2^n (n!)^2}$

⟨3⟩ **Aufgabe 6**
Bestimmen Sie die folgenden Funktionsgrenzswerte.

a. $\displaystyle\lim_{x \to 1} \frac{2 - \sqrt{x+3}}{x - 1}$

b. $\displaystyle\lim_{x \to 1} \frac{1}{x-1} \left(\frac{3}{x^2+5} - \frac{1}{x^2+1}\right)$

⟨7⟩ **Aufgabe 7**

Sei $A \subset \mathbb{R}$ eine beliebige Teilmenge von $\mathbb{R}$.

a. Geben Sie die Definition des Randes ∂A der Menge A.

b. Geben Sie jeweils ein Beispiel einer Menge (i) ohne Randpunkt, (ii) mit zwei Randpunkten, (iii) abzählbar vielen Randpunkten.

c. Zeigen Sie: Die Indikatorfunktion

$$\chi_A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \chi_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A, \\ 0, & x \notin A, \end{cases}$$

ist stetig auf $A \setminus \partial A$ und unstetig auf ∂A.

⟨3⟩ **Aufgabe 8**

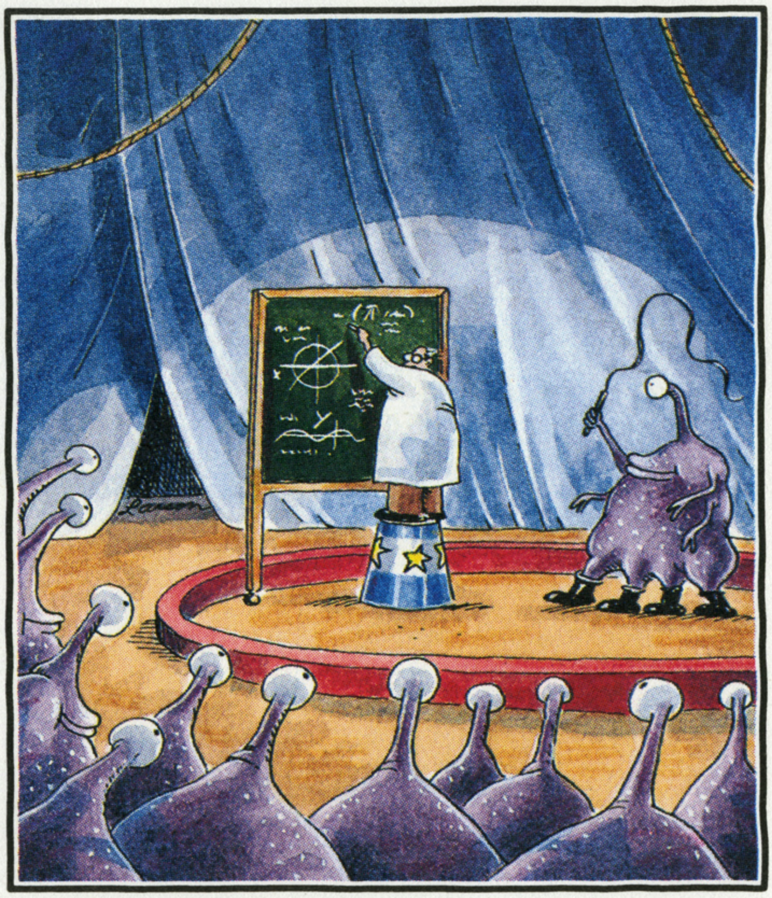
Sei I ein beliebiges reelles Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ sei differenzierbar. Gilt $f'(t) \neq 1$ für alle $t \in I$, so besitzt f höchstens einen Fixpunkt, also einen Punkt $p \in I$ mit $f(p) = p$.

⟨5⟩ **Aufgabe 9**

Die Funktionen $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ seien stetig, auf (a, b) differenzierbar, und es gelte $f(a) = f(b) = 0$. Dann gibt es einen Punkt $c \in (a, b)$ derart, dass

$$f'(c) = g'(c) f(c).$$

Hinweis: Man betrachte die Hilfsfunktion $\varphi : t \mapsto f(t)\mathrm{e}^{-g(t)}$.



Abducted by an alien circus company, Professor Doyle is forced to write calculus equations in center ring.