Scheinklausur Analysis 1

Ws 2017/8

13.01.2018

- Es gibt 10 Aufgaben. Die jeweilige Punktzahl steht am linken Rand.
- Die Maximalpunktzahl ist 40. Zum Bestehen der Klausur sind 16 Punkte hinreichend.
- Die Bearbeitungszeit beträgt 120 Minuten.
- Es sind keine Hilfsmittel zugelassen.
- In allen Aufgaben, außer Aufgabe 2 und 10, sind alle Schritte zu begründen.
- Verwenden Sie pro Aufgabe jeweils ein neues Blatt.
- Abgaben mit Bleistift oder Rotstift sind nicht zulässig.
- Tragen sie bitte Namen, Matrikelnummer sowie Namen Ihres Tutors ein.
- Und nun wie immer: Viel Erfolg!

Name M-Nr Tutor

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10		Σ

⟨4⟩ **Aufgabe 1**
Die logische *nor*-Verknüpfung wird definiert durch

$$p \sqcup q \quad \Leftrightarrow \quad \neg(p \vee q).$$

a. Stellen Sie die Wahrheitstafel für $\sqcup$ auf.
b. Stellen Sie $\neg p$ durch $\sqcup$ dar.
c. Stellen Sie $p \wedge q$ ausschließlich durch die *nor*-Verknüpfung dar.

Lösung
a.

p	q	$p \vee q$	$p \sqcup q$
1	1	1	0
1	0	1	0
0	1	1	0
0	0	0	1

b. $\neg p \quad \Leftrightarrow \quad \neg(p \vee p) \quad \Leftrightarrow \quad p \sqcup p\,.$
c. $p \wedge q \quad \Leftrightarrow \quad \neg(\neg p \vee \neg q) \quad \Leftrightarrow \quad \neg p \sqcup \neg q \quad \Leftrightarrow \quad (p \sqcup p) \sqcup (q \sqcup q)\,.$

⟨4⟩ **Aufgabe 2**
Geben Sie jeweils ein Beispiel einer Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit den angegebenen Eigenschaften.
a. Injektiv, aber nicht surjektiv: $f(n) =$.
b. Surjektiv, aber nicht injektiv: $f(n) =$.
c. Weder injektiv noch surjektiv: $f(n) =$.
d. Bijektiv, aber nicht die Identität: $f(n) =$.

Lösung
Zum Beispiel, mit der Gaussklammer $[\cdot]$,

a. $f(n) = n + 1$ *b.* $f(n) = [(n+1)/2]$ *c.* $f(n) = 1$

d. $f(n) = \begin{cases} n+1, & n \text{ ungerade,} \\ n-1, & n \text{ gerade.} \end{cases}$

⟨5⟩ **Aufgabe 3**
Sei $\mathbb{K}$ ein Körper.
a. Wie ist das Element -1 in $\mathbb{K}$ definiert?
b. Sei $<$ eine totale Ordnung auf $\mathbb{K}$. Welche zwei Eigenschaften müssen erfüllt sein, damit $\mathbb{K}$ ein angeordneter Körper ist?
c. Zeigen Sie, dass der Körper $\mathbb{F} = \{0, 1\}$ nicht angeordnet werden kann.

Lösung

a. Dies ist das additiv Inverse des neutralen Elementes der Multiplikation.

b. Für alle $a, b, c \in \mathbb{K}$ muss gelten

$$a < b \quad \Rightarrow \quad a + c < b + c$$

sowie

$$0 < a \wedge 0 < b \quad \Rightarrow \quad 0 < ab.$$

c. In $\mathbb{F}$ gilt $1 + 1 = 0$. Wäre $0 < 1$, so folgte hieraus

$$0 + 1 = 1 < 1 + 1 = 0,$$

ein Widerspruch. Wäre $1 < 0$, so folgte hieraus

$$1 + 1 = 0 < 0 + 1 = 1,$$

ebenfalls ein Widerspruch. Da natürlich $0 \neq 1$, gilt der Trichotomiesatz nicht, und $\mathbb{F}$ kann nicht angeordnet werden.

⟨5⟩ **Aufgabe 4**

Für welche n gilt $2^n \geqslant n^2 + n$? Mit Beweis natürlich.

Lösung

Für $n = 1$ ist dies offensichtlich richtig, und für $n = 2, 3, 4$ ebenso offensichtlich falsch, und für $n = 5$ wiedsr richtig. Wir zeigen per Induktion, dass dies tatsächlich für alle $n \geqslant 5$ richtig ist.

Wir nehmen also an, dass die Behauptung für ein $n \geqslant 5$ gilt. Für $n + 1$ folgt dann

$$2^{n+1} = 2 \cdot 2^n \geqslant 2n^2 + 2n.$$

Auf der anderen Seite ist

$$(n + 1)^2 + (n + 1) = n^2 + 2n + 1 + n + 1 = n^2 + 3n + 2.$$

Somit bleibt zu zeigen, dass

$$2n^2 + 2n \geqslant n^2 + 3n + 2 \quad \Leftrightarrow \quad n^2 \geqslant n + 2.$$

Für $n \geqslant 2$ ist dies aber richtig, da dann

$$n^2 = n \cdot n \geqslant 2n = n + n \geqslant n + 2.$$

⟨2⟩ **Aufgabe 5**

Für zwei reelle Folgen $(a_n)_{n\geqslant 1}$ und $(b_n)_{n\geqslant 1}$ seien die Folgen mit den Gliedern

$$\frac{a_n+b_n}{2}, \qquad \frac{a_n-b_n}{4}$$

konvergent. Konvergieren dann auch $(a_n)_{n\geqslant 1}$ und $(b_n)_{n\geqslant 1}$? Mit Begrünung natürlich.

Lösung

Aufgrund der Grenzwertgleichungen sind Lineakombinationen konvergenter Folgen ebenfalls konvergent. Wegen

$$a_n = \frac{a_n+b_n}{2} + 2\cdot\frac{a_n-b_n}{4}, \qquad b_n = \frac{a_n+b_n}{2} - 2\cdot\frac{a_n-b_n}{4}$$

sind also $(a_n)_{n\geqslant 1}$ und $(b_n)_{n\geqslant 1}$ ebenfalls konvergent.

⟨3⟩ **Aufgabe 6**

Für welche reellen Zahlen x und y gilt $2 \leqslant \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x}$?

Lösung

Im Fall $xy = 0$ verschwindet mindestens einer der Faktoren, und die rechte Seite ist nicht definiert. Dieser Fall scheidet also aus. — Im Fall $xy < 0$ haben x und y entgegengesetztes Vorzeichen. Beide Terme auf der rechten Seite sind also negativ, und die Ungleichung kann nicht gelten. — Bleibt also der Fall $xy > 0$. Dann gilt

$$\begin{aligned} 2 \leqslant \frac{x}{y} + \frac{y}{x} \quad &\Leftrightarrow \quad 2xy \leqslant x^2 + y^2 \\ &\Leftrightarrow \quad 0 \leqslant x^2 - 2xy + y^2 = (x-y)^2. \end{aligned}$$

Die letzte Ungleichung gilt *für alle* $x, y \in \mathbb{R}$. Also gilt die behauptete Ungleichung für alle $x, y \in \mathbb{R}$ mit $xy > 0$.

⟨4⟩ **Aufgabe 7**

Eine Funktion $h\colon [0,\infty) \to [0,\infty)$ heißt streng monoton steigend, wenn

$$0 \leqslant a < b \quad \Rightarrow \quad h(a) < h(b).$$

a. Zeigen Sie: Ist h streng monoton steigend und $[a,b] \subset [0,\infty)$, so gilt

$$\sup\{h(x) : x \in [a,b]\} = h(b).$$

b. Zeigen Sie, dass h mit $h(x) = x^2$ auf $[0,\infty)$ streng monoton steigt.

Lösung

a. Sei

$$H = \{h(x) : x \in [a,b]\}.$$

Erste Version: Für jedes $x \in [a,b]$ gilt $x \leqslant b$, also auch $h(x) \leqslant h(b)$ wegen der Monotonie von h. Somit ist $h(b)$ eine obere Schranke von H, und

$$\sup H \leqslant h(b).$$

Da aber auch $h(b) \in H$, muss Gleichheit gelten.
Zweite Version: Wegen $h(b) \in H$ gilt auf jeden Fall

$$h(b) \leqslant \sup H.$$

Würde sogar $<$ gelten, so gäbe es aufgrund des Approximationssatzes ein $w = h(c) \in H$ mit

$$h(b) < w = h(c) \leqslant \sup H.$$

Aufgrund der stengen Monotonie von h gilt dann aber $b < c$, ein Widerspruch zu $c \in [a,b]$.
b. Fur reelle Zahlen $0 \leqslant x < y$ gilt aufgrund der Anordnungsaxiome

$$x^2 = x \cdot x \leqslant x \cdot y < y \cdot y = y^2,$$

also $h(x) < h(y)$.

⟨2⟩ **Aufgabe 8**

Für welche komplexen Zahlen z gilt $\operatorname{Re}(\operatorname{Im} z) = \operatorname{Im}(\operatorname{Re} z)$?

Lösung

Mit $z = x + \mathrm{i}y$ ist

$$\operatorname{Re}(\operatorname{Im} z) = y, \qquad \operatorname{Im}(\operatorname{Re} z) = 0.$$

Also gilt die Gleichung für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $y = \operatorname{Im} z = 0$, also für alle reellen Zahlen in $\mathbb{C}$.

⟨4⟩ **Aufgabe 9**

a. Geben Sie die Definition einer Norm $\|\cdot\|$ auf einem reellen Vektorraum.
b. Sei $\|\cdot\|$ eine Norm auf einem reellen Vektorraum. Beweisen Sie die Ungleichung

$$\|u - v\| \geqslant \|u\| - \|v\|.$$

Lösung

a. Siehe Skript.

b. Aufgrund der Dreiecksungleichung ist

$$\|u\| = \|u - v + v\| \leqslant \|u - v\| + \|v\| .$$

Subtraktion von $\|v\|$ ergibt

$$\|u\| - \|v\| \leqslant \|u - v\| .$$

⟨7⟩ **Aufgabe 10**

Welche der folgenden Aussagen sind wahr, welche falsch? Für jede falsche Antwort wird ein Punkt abgezogen, fehlende Antworten ergeben Null Punkte.

a. $\neg p \wedge \neg q \quad \Leftrightarrow \quad \neg(p \vee q)$ ○ wahr ○ falsch

b. $\mathbb{Z}$ mit der üblichen Addition und Multiplikation ist ein Körper.
○ wahr ○ falsch

c. $a < b$ ist eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{R}$. ○ wahr ○ falsch

d. Die Abbildung $[0, \infty) \to [0, \infty)$, $x \mapsto x^2$ ist bijektiv. ○ wahr ○ falsch

e. $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ und $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ sind gleichmächtig. ○ wahr ○ falsch

f. Eine beschränkte Folge mit genau einem Häufungswert ist konvergent.
○ wahr ○ falsch

g. Eine Folge in $\mathbb{Q}$ konvergiert in $\mathbb{Q}$ genau dann, wenn sie eine Cauchyfolge ist. ○ wahr ○ falsch

Lösung

a. $\neg p \wedge \neg q \quad \Leftrightarrow \quad \neg(p \vee q)$ ⊗ wahr ○ falsch

b. $\mathbb{Z}$ mit der üblichen Addition und Multiplikation ist ein Körper.
○ wahr ⊗ falsch

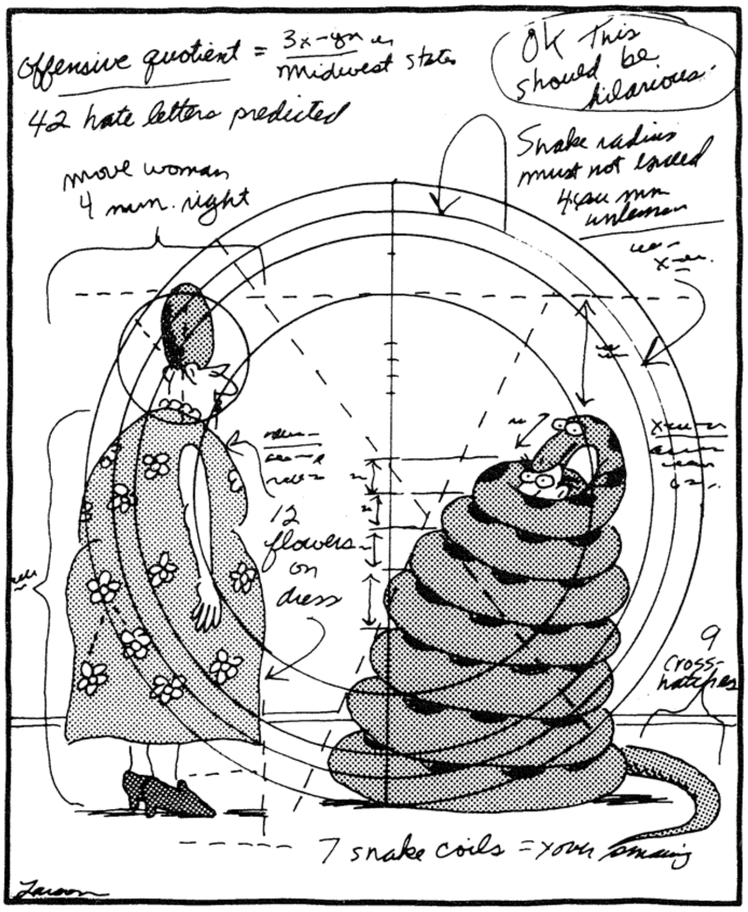
c. $a < b$ ist eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{R}$. ○ wahr ⊗ falsch

d. Die Abbildung $[0, \infty) \to [0, \infty)$, $x \mapsto x^2$ ist bijektiv. ⊗ wahr ○ falsch

e. $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ und $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ sind gleichmächtig. ⊗ wahr ○ falsch

f. Eine beschränkte Folge mit genau einem Häufungswert ist konvergent.
⊗ wahr ○ falsch

g. Eine Folge in $\mathbb{Q}$ konvergiert in $\mathbb{Q}$ genau dann, wenn sie eine Cauchyfolge ist. ○ wahr ⊗ falsch



Revealing some of the mathematical computations every cartoonist must know.