Scheinklausur Analysis 1

Ws 2017/8

13.01.2018

- Es gibt 10 Aufgaben. Die jeweilige Punktzahl steht am linken Rand.
- Die Maximalpunktzahl ist 40. Zum Bestehen der Klausur sind 16 Punkte hinreichend.
- Die Bearbeitungszeit beträgt 120 Minuten.
- Es sind keine Hilfsmittel zugelassen.
- In allen Aufgaben, außer Aufgabe 2 und 10, sind alle Schritte zu begründen.
- Verwenden Sie pro Aufgabe jeweils ein neues Blatt.
- Abgaben mit Bleistift oder Rotstift sind nicht zulässig.
- Tragen sie bitte Namen, Matrikelnummer sowie Namen Ihres Tutors ein.
- Und nun wie immer: Viel Erfolg!

Name M-Nr Tutor

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10		Σ

⟨4⟩ **Aufgabe 1**
Die logische *nor*-Verknüpfung wird definiert durch

$$p \sqcup q \quad \Leftrightarrow \quad \neg(p \vee q).$$

a. Stellen Sie die Wahrheitstafel für $\sqcup$ auf.
b. Stellen Sie $\neg p$ durch $\sqcup$ dar.
c. Stellen Sie $p \wedge q$ ausschließlich durch die *nor*-Verknüpfung dar.

⟨4⟩ **Aufgabe 2**
Geben Sie jeweils ein Beispiel einer Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit den angegebenen Eigenschaften.
a. Injektiv, aber nicht surjektiv: $f(n) =$.

b. Surjektiv, aber nicht injektiv: $f(n) =$.

c. Weder injektiv noch surjektiv: $f(n) =$.

d. Bijektiv, aber nicht die Identität: $f(n) =$.

⟨5⟩ **Aufgabe 3**
Sei $\mathbb{K}$ ein Körper.
a. Wie ist das Element -1 in $\mathbb{K}$ definiert?
b. Sei $<$ eine totale Ordnung auf $\mathbb{K}$. Welche zwei Eigenschaften müssen erfüllt sein, damit $\mathbb{K}$ ein angeordneter Körper ist?
c. Zeigen Sie, dass der Körper $\mathbb{F} = \{0, 1\}$ nicht angeordnet werden kann.

⟨5⟩ **Aufgabe 4**
Für welche n gilt $2^n \geqslant n^2 + n$? Mit Beweis natürlich.

⟨2⟩ **Aufgabe 5**
Für zwei reelle Folgen $(a_n)_{n\geqslant 1}$ und $(b_n)_{n\geqslant 1}$ seien die Folgen mit den Gliedern

$$\frac{a_n + b_n}{2}, \qquad \frac{a_n - b_n}{4}$$

konvergent. Konvergieren dann auch $(a_n)_{n\geqslant 1}$ und $(b_n)_{n\geqslant 1}$? Mit Begrünung natürlich.

⟨3⟩ **Aufgabe 6**
Für welche reellen Zahlen x und y gilt $\quad 2 \leqslant \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x} \quad$?

⟨4⟩ **Aufgabe 7**
Eine Funktion $h\colon\ [0,\infty) \to [0,\infty)$ heißt streng monoton steigend, wenn

$$0 \leqslant a < b \quad \Rightarrow \quad h(a) < h(b).$$

a. Zeigen Sie: Ist h streng monoton steigend und $[a,b] \subset [0,\infty)$, so gilt

$$\sup\{h(x) : x \in [a,b]\} = h(b).$$

b. Zeigen Sie, dass h mit $h(x) = x^2$ auf $[0,\infty)$ streng monoton steigt.

⟨2⟩ **Aufgabe 8**
Für welche komplexen Zahlen z gilt $\quad \operatorname{Re}(\operatorname{Im} z) = \operatorname{Im}(\operatorname{Re} z) \quad$?

⟨4⟩ **Aufgabe 9**
a. Geben Sie die Definition einer Norm $\|\cdot\|$ auf einem reellen Vektorraum.
b. Sei $\|\cdot\|$ eine Norm auf einem reellen Vektorraum. Beweisen Sie die Ungleichung

$$\|u - v\| \geqslant \|u\| - \|v\|.$$

⟨7⟩ **Aufgabe 10**
Welche der folgenden Aussagen sind wahr, welche falsch? Für jede falsche Antwort wird ein Punkt abgezogen, fehlende Antworten ergeben Null Punkte.

a. $\neg p \wedge \neg q \quad \Leftrightarrow \quad \neg(p \vee q)$ ○ wahr ○ falsch

b. $\mathbb{Z}$ mit der üblichen Addition und Multiplikation ist ein Körper.
○ wahr ○ falsch

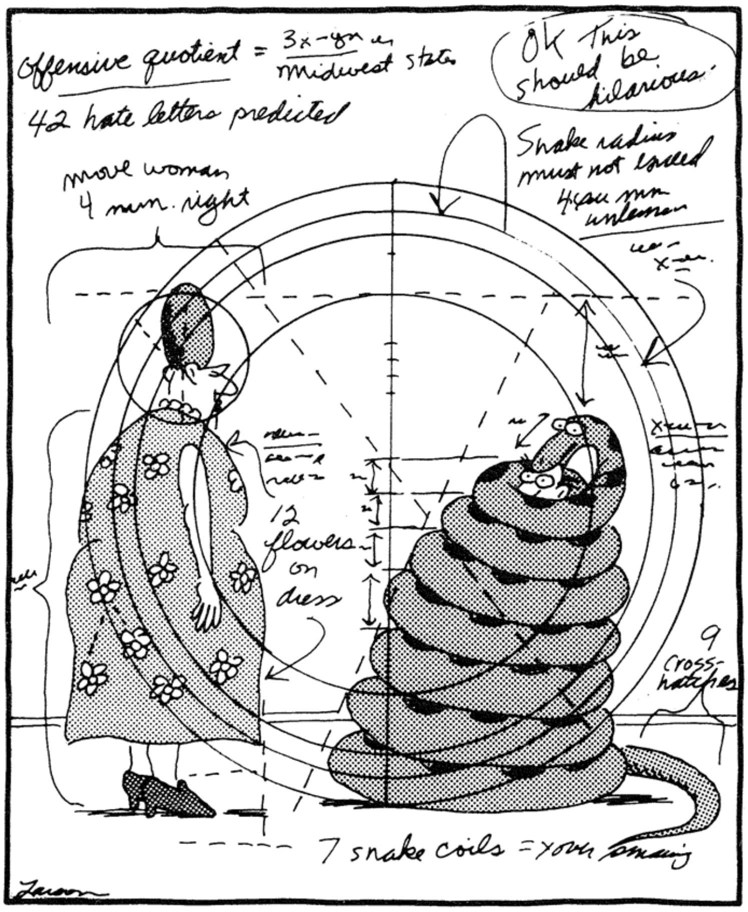
c. $a < b$ ist eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{R}$. ○ wahr ○ falsch

d. Die Abbildung $[0,\infty) \to [0,\infty)$, $x \mapsto x^2$ ist bijektiv. ○ wahr ○ falsch

e. $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ und $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ sind gleichmächtig. ○ wahr ○ falsch

f. Eine beschränkte Folge mit genau einem Häufungswert ist konvergent.
○ wahr ○ falsch

g. Eine Folge in $\mathbb{Q}$ konvergiert in $\mathbb{Q}$ genau dann,
wenn sie eine Cauchyfolge ist. ○ wahr ○ falsch



Revealing some of the mathematical computations every cartoonist must know.