

Was heißt injektiv?

- auf jeden Bildpunkt führt max ein Urbildpunkt

formal:

$$f(x) = f(y) \Rightarrow x = y \quad \text{für alle } x, y \in A$$

Was heißt surjektiv? $f: A \rightarrow B$

- jeder Punkt der Wertemenge hat ein Urbild

formal:

- * für alle $b \in B$ gibt es ein $a \in A$ mit der Eigenschaft

$$f(a) = b$$

- * es gilt $f(A) = B$

zu 2.2

a) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto (x-1)^2$

• inj?

nein, da z.B. $f(3) = (3-1)^2 = 4$ $\gg$
 $f(-1) = (-1-1)^2 = 4$

• surj?

nein, da $(x-1)^2 \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$

und daher z.B. $-1 \notin f(\mathbb{R})$

Können wir f so modifizieren, dass die Fkt inj wird?

Ja: z.B. $\neq f^1: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto (x-1)^2$

dann ist f^1 inj

z.B. $\neq f^2: [1, \infty[\rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto (x-1)^2$
 ist inj

Kann man so mod., dass surj wird?

Ja z.B. $f^3: \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty[, x \mapsto (x-1)^2$
 ist surj

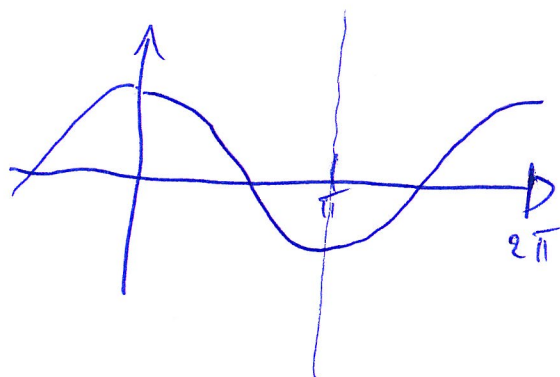
$f^4: \mathbb{R} \rightarrow [1000, \infty[, x \mapsto (x-1)^2$
 ist surj

$\Rightarrow$ Moral: aus 7 inj Fkt kann man ins Fkt zeichnen
 aus 7 surj Fkt kann man surj Fkt gewinnen

(b) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad x \mapsto \cos x$

inj? nein z.B. $f(0) = 1 = f(2\pi)$

surj? nein z.B. ~~es~~ $\cos(x) \in [-1, 1]$ ~~paradox~~
für alle $x \in \mathbb{R}$



(c) $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{1}{x}$

inj? ja, ~~man~~ sei $\frac{1}{x} = \frac{1}{y}$

dann $x = y$

also $f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$ ✓

surj? da $0 \notin f(\mathbb{R} \setminus \{0\})$

($\frac{1}{x} = 0$ kann nicht gelöst werden)

$\mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad x \mapsto \frac{1}{x}$ ist aber surj.

$$(d) \quad f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{x^2+1}$$

IV

inj? nein da z.B. $f(1) = \frac{1}{2} = f(-1)$

surj? nein, da $0 \notin f(\mathbb{R})$

oder $\frac{1}{1+x^2} \in]0, 1]$ für alle $x \in \mathbb{R}$

Bemerkung:

Sei $f: A \rightarrow B$, dann ist

$$\tilde{f}: A \rightarrow f(A), x \mapsto f(x)$$

immer surjektiv

z.B.

$$\mathbb{R} \rightarrow \underbrace{[-1, 1]}_{\sin(\mathbb{R})}, x \mapsto \sin(x) \text{ ist surj.}$$

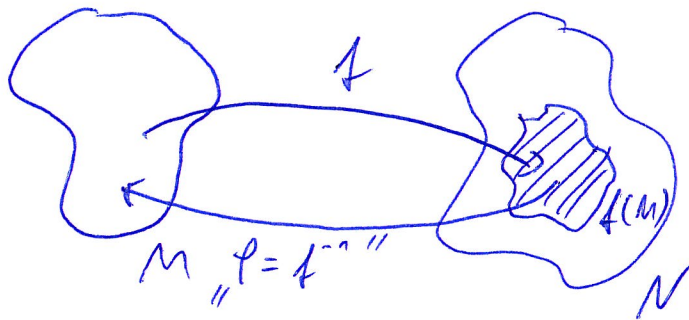
2.3

$$(a) \quad f: M \rightarrow N$$

$$\exists \quad f \text{ inj} \iff \text{ex. } \varphi: N \rightarrow M \text{ mit } \varphi \circ f = \text{id}_M$$

"⇒" ∧ "⇐"

Idee:



"⇒" Sei $f: M \rightarrow N$ inj
 ToDo finde diese φ

da $f: M \rightarrow N$ inj ist $\tilde{f}: M \rightarrow f(M), x \mapsto f(x)$
 surj.

d.h. $\tilde{f}$ ist bij.

d.h. ex. inverse Fkt $\tilde{f}^{-1}: f(M) \rightarrow M$

definiere

$$\varphi: N \rightarrow M, x \mapsto \begin{cases} \tilde{f}^{-1}(y) & , \text{ wenn } y \in f(M) \\ * & , \text{ sonst} \end{cases}$$

egal was, wähle $m \in M$
 und schicke das dahin

dann gilt

$$\varphi \circ f(x) = \varphi(f(x)) \stackrel{f(x) \in f(M)}{=} \tilde{f}^{-1}(f(x)) = x \quad \text{für alle } x \in M$$

$$\rightarrow \varphi \circ f = \text{id}_M$$

" $\Leftarrow$ " Angenommen es $\varphi: N \rightarrow M$ mit $\varphi \circ f = \text{id}_M$

To Do zeige f inj

$$\text{d.h. } f(m) = f(\tilde{m}) \Rightarrow m = \tilde{m}$$

Sei also $f(m) = f(\tilde{m})$

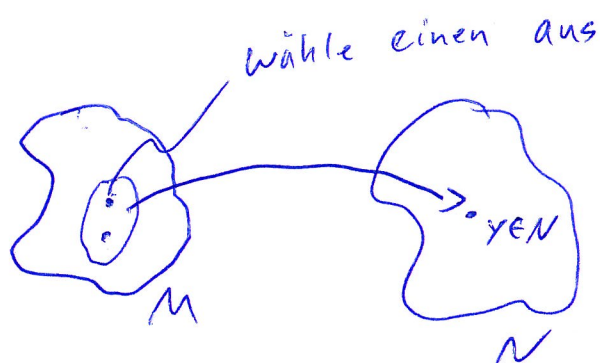
$$\begin{array}{ccc} \sim & \varphi(f(m)) & = & \varphi(f(\tilde{m})) \\ & \parallel & & \parallel \\ & \varphi \circ f(m) & & \varphi \circ f(\tilde{m}) \\ & \parallel & & \parallel \\ & \text{id}_M(m) & & \text{id}_M(\tilde{m}) \\ & \parallel & & \parallel \\ & m & & \tilde{m} \end{array}$$

$$\sim m = \tilde{m}$$

(2.3) (b)

f ist surj $\Leftrightarrow \exists \varphi : N \rightarrow M$ mit $f \circ \varphi = \text{id}_N$

Idee:



" $\Rightarrow$ " sei f surj
 To Do finde φ

da f surj gibt es für alle $y \in N$ mind. ein $x \in M$
 mit $f(x) = y$

mit anderen Worten

$$f^{-1}(\{y\}) \neq \emptyset$$

↑ Urbild

nochmal schön

$$f^{-1}(\{y\}) \neq \emptyset$$

für alle $y \in N$ wähle ein beliebiges $x_y \in f^{-1}(\{y\})$

definiere:

$$\varphi : N \rightarrow M, \quad y \mapsto x_y$$

↑ genau das

dann

$$f \circ \varphi(y) = f(\varphi(y)) \stackrel{\text{Def } \varphi}{=} f(x_y) \stackrel{x_y \in f^{-1}(\{y\})}{=} y$$

für alle $y \in N$
 $\leadsto f \circ \varphi = \text{id}_N$

" $\Leftarrow$ " Annahme es $\varphi: N \rightarrow M$ mit $\varphi \circ \varphi = \text{id}_N$

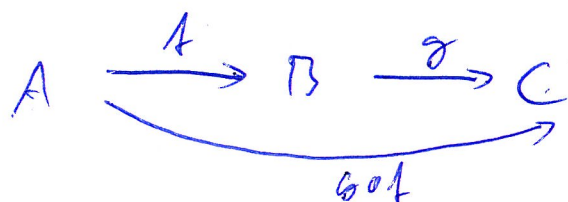
ToDo zeige φ surj, d.h. für bel. $y \in M$ gibt es
 $x \in M$ mit $\varphi(x) = y$

Sei $y \in N$ gegeben

setze $x = \varphi(y)$, dann gilt
 $x \in M$

$$\varphi(x) \stackrel{\text{Def}}{=} \varphi(\varphi(y)) = \varphi \circ \varphi(y) = \text{id}_N(y) = y$$

12.4

 A, B, C $f: A \rightarrow B \quad g: B \rightarrow C$ 

(a) $\exists f, g \text{ inj} \Rightarrow \text{gof inj}$

$$\begin{array}{ccc}
 \text{sei } \overset{\text{gof}}{\cancel{f \circ g}}(a_1) = \overset{\text{gof}}{\cancel{f \circ g}}(a_2) & a_1, a_2 \in A \\
 \parallel & \parallel \\
 \cancel{f(g(a_1))} & \cancel{f(g(a_2))} & g(f(a_1))
 \end{array}$$

da $\cancel{f(g(a_1)) = f(g(a_2))}$ und $f \text{ inj}$

$$\leadsto g(a_1) = g(a_2)$$

da $g(f(a_1)) = g(f(a_2))$ und $g \text{ inj}$

$$\leadsto f(a_1) = f(a_2)$$

da $f \text{ inj}$

$$\leadsto a_1 = a_2$$

$\exists f, g \text{ surj} \Rightarrow \text{gof surj}$

Variante I:

sei $c \in C$ gegeben, da $g \text{ surj}$ ex $b \in B$ mit $g(b) = c$

da $f \text{ surj}$ findet man zu dieser $b \in B$ auch $a \in A$ mit $f(a) = b$

$$\text{dann: } \text{gof}(a) = g(f(a)) \stackrel{f(a)=b}{=} g(b) = c$$

~~IX~~ X

Variante II:

da f surj ist $f(A) = B$

da g surj ist $g(B) = C$

damit

$$g \circ f(A) = g(f(A)) = g(B) = C$$

(b) $\exists g \circ f \text{ bij} \Rightarrow f \text{ inj} \wedge g \text{ surj}$

• zu f inj:

$$\exists f(a_1) = f(a_2) \Rightarrow a_1 = a_2$$

sei also $f(a_1) = f(a_2)$

$$\leadsto g(f(a_1)) = g(f(a_2))$$

$$\stackrel{g \circ f \text{ inj}}{\leadsto} a_1 = a_2$$

• zu g surj

gegeben $c \in C$ finde $b \in B$ mit $g(b) = c$

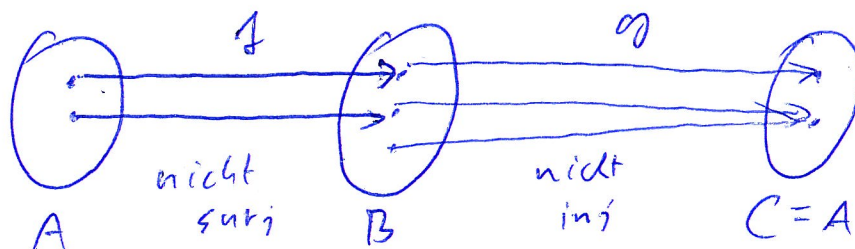
sei $c \in C$ da $g \circ f$ surj findet man $a \in A$

mit $g \circ f(a) = c$

$$\begin{aligned} & \underbrace{g(f(a))}_{= b \in B} \end{aligned}$$

$$g(b) = c$$

(c)



ABER $g \circ f = id_A$ also ~~why~~ bijektiv

2.1 (a)

$$\exists a \in \mathbb{R} \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N_\varepsilon \quad |a_n - a| < \varepsilon$$

$$\exists a \in \mathbb{R} : \forall \varepsilon > 0 : \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} : \forall n \geq N_\varepsilon : |a_n - a| < \varepsilon$$

(b)

$$\forall a \in \mathbb{R} \quad \exists \varepsilon > 0 \quad \forall N_\varepsilon \in \mathbb{N} \quad \exists n \geq N_\varepsilon \quad |a_n - a| \geq \varepsilon$$

$$\underline{\underline{3.1}} \quad \min\{a,b\} \stackrel{(i)}{\leq} \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} \stackrel{(ii)}{\leq} \sqrt{ab} \stackrel{(iii)}{\leq} \frac{a+b}{2} \stackrel{(iv)}{\leq} \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \stackrel{(v)}{\leq} \max\{a,b\}$$

HM GM AM QM

Seien $a, b > 0$ und oBdA $a \leq b$, dann ist

$$(i) \quad \min\{a,b\} = a \quad \text{und} \quad \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} = \frac{2}{\frac{b}{ab} + \frac{a}{ab}} = \frac{2}{\frac{a+b}{ab}} = 2 \frac{ab}{a+b} \quad (*)$$

$$\Rightarrow 2 \frac{ab}{b+b} = 2 \frac{ab}{2b} = a = \min\{a,b\}.$$

(ii) Nach (*) genügt es $\frac{2ab}{a+b} \leq \sqrt{ab}$ zu zeigen. Da $\sqrt{ab} > 0$ ist, ist dies äq. zu

$$\frac{2\sqrt{ab}}{a+b} \leq 1 \Leftrightarrow 2\sqrt{ab} \leq a+b \Leftrightarrow 4ab \leq a^2 + 2ab + b^2$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq a^2 - 2ab + b^2$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq (a-b)^2.$$

Alternativ: Nutze (iii) für $\frac{1}{a}$ und $\frac{1}{b}$.

(iii) siehe Aufg. 16.

$$(iv) \quad \text{Es gilt} \quad \frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \Leftrightarrow \frac{1}{4} (a^2 + 2ab + b^2) \leq \frac{1}{2} (a^2 + b^2)$$

$$\Leftrightarrow a^2 + 2ab + b^2 \leq 2a^2 + 2b^2$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$$

$$(v) \quad \text{Zeige} \quad \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \leq b = \max\{a,b\}. \quad \Leftrightarrow \frac{a^2+b^2}{2} \leq b^2 \quad \text{wahr, da } a^2 \leq b^2, \text{ d.h.}$$

$$\frac{a^2+b^2}{2} \leq \frac{b^2+b^2}{2} = b^2.$$

$$\underline{\underline{3.2}} \quad a, b, c > 0 \quad \text{mit} \quad abc = 1. \quad \text{Nach Aufg. 13 gilt}$$

$$(*) \quad x + \frac{1}{x} \geq 2 \quad \forall x > 0 \quad (\text{setze } a=b=1).$$

Wegen $abc=1$ folgt $c = \frac{1}{ab}$ und damit

$$(1+a)(1+b)(1+c) = (1+a)(1+b)\left(1+\frac{1}{ab}\right)$$

$$= (1+a+b+ab)\left(1+\frac{1}{ab}\right)$$

$$= 1+a+b+ab + \frac{1}{ab} + \frac{1}{b} + \frac{1}{a} + 1$$

$$= 2 + \left(a+\frac{1}{a}\right) + \left(b+\frac{1}{b}\right) + \left(ab+\frac{1}{ab}\right)$$

$$\stackrel{(*)}{\geq} 2 + 2 + 2 + 2 = 8 \quad \square$$

3.3 Sei $A \subset \mathbb{N}$ und $n \in \mathbb{N}$ mit $A > n$, i.e. (def)

$$a > n \quad \forall a \in A$$

$$\Rightarrow a \geq n+1 \quad \forall a \in A \quad \stackrel{\text{def}}{\Rightarrow} A > n+1$$

3.4

	2^n	$>$	$n^2 + n$	
$n=1$	2	$>$	2	✓
$n=2$	4	$>$	6	✓
$n=3$	8	$>$	12	✓
$n=4$	16	$>$	20	✓
$n=5$	32	$>$	30	✓
$n=6$	64	$>$	42	✓

Vermutung: Aussage ist wahr für alle $n \geq 5$.

Beweis: 1A für $n=5$ ✓

IS Gelte die Aussage für irgendein $n \geq 5$, dann folgt beliebiges aber festes

Linke Seite • $2^{n+1} = 2^n \cdot 2 \stackrel{(IV)}{>} (n^2 + n) 2 = 2n^2 + 2n$

Rechte Seite • $(n+1)^2 + (n+1) = n^2 + 3n + 2$

Zeige also $2n^2 + 2n \geq n^2 + 3n + 2$

$(\Leftrightarrow) n^2 \geq n + 2 \quad (*)$

Da aber bereits $n^2 = n \cdot n \underset{n \geq 2}{\geq} 2n = n + n \underset{n \geq 2}{\geq} n + 2$

ab $n \geq 2$ gilt, ist $(*)$ insb. für $n \geq 5$ wahr. $\square$

ad 3.3 $a > n \Rightarrow a - n > 0 \Rightarrow \exists m \in \mathbb{N} : \underbrace{a - n = m}_{\downarrow} \in \mathbb{N}$

$a - n - 1 = m - 1 \in \mathbb{N}_0$

$(\Leftrightarrow) \underline{a} = (m-1) + (n+1)$

$\geq 0 + \underline{n+1}$

da $m-1 \geq 0$

5.1

①

a) • Kriterium für Konvergenz

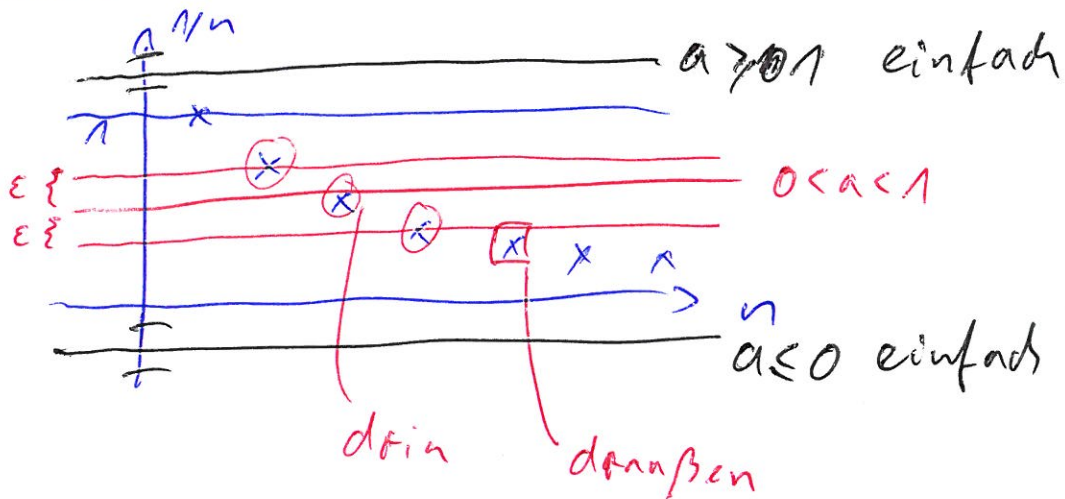
$$a_n \rightarrow a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N |a_n - a| < \varepsilon$$

also Kriterium für nicht Konvergenz:

$$a_n \not\rightarrow a \Leftrightarrow \exists \varepsilon > 0 \forall N \in \mathbb{N} \exists n \geq N |a_n - a| \geq \varepsilon$$

b) $\frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \neq 0$

Idee:



Fall 1: sei $a < 0$ dann ist

$$|\frac{1}{n} - a| \geq |a| \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}$$

wähle also $\varepsilon = |a|$ und $n = N$ für alle $N \in \mathbb{N}$

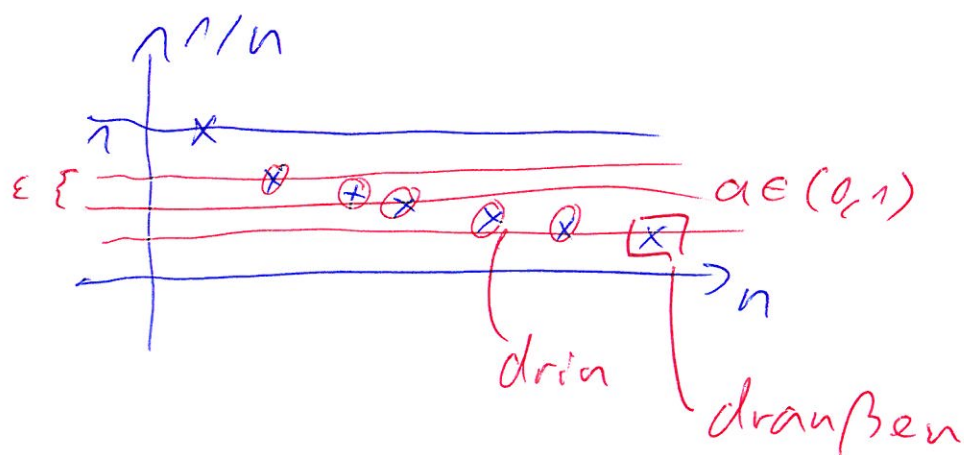
Fall 2: Sei $a \geq 1$ dann ist

(2)

$$\left| \frac{1}{n} - a \right| \geq a - 1 \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}$$

wähle $\varepsilon = a - 1$, ~~wähle~~ für alle $N \in \mathbb{N}$
 $n = N$

Fall 3: sei $0 < a < 1$



wähle $\varepsilon = \frac{a}{2}$

Ab welchem Index ist $\frac{1}{n} < \frac{a}{2}$?

$$\frac{1}{n} < \frac{a}{2} \Leftrightarrow n > \frac{2}{a}$$

~ wähle als Index $\left\lfloor \frac{2}{a} \right\rfloor$

es ist also

↑ "abrunden"

- $N \leq \left\lfloor \frac{2}{a} \right\rfloor$ dann wähle $n = \left\lfloor \frac{2}{a} \right\rfloor + 1$
- $N > \left\lfloor \frac{2}{a} \right\rfloor$ dann wähle $n = N + 1$

In beiden Fällen gilt:

③

$$n > \lfloor \frac{2}{a} \rfloor + 1 \geq \frac{2}{a}$$

also

$$\frac{1}{n} \leq \frac{a}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{n} - a \leq -\frac{a}{2}$$

↑ negativ

$$\Leftrightarrow \left| \frac{1}{n} - a \right| \geq \frac{a}{2} = \varepsilon$$

„Für alle $N \in \mathbb{N}$ haben wir $n \geq N$
mit $\left| \frac{1}{n} - a \right| \geq \varepsilon$ gefunden“

5.2

$$a_n = \frac{n + \cos(n)}{n^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Wann gilt $|a_n| < 10^{-6}$?

↗ $\left| \frac{n + \cos(n)}{n^2} \right| < 10^{-6}$... umständlich
↑ „wir betrachten“

Aber

$$\left| \frac{n + \cos(n)}{n^2} \right| = \frac{n + \cos(n)}{n^2} \leq \frac{n+1}{n^2}$$

also $\frac{n+1}{n^2} < 10^{-6} \quad \sim \quad \text{geht gut anstrengend später}$

Aber

$$\frac{n+1}{n^2} \leq \frac{2n}{n^2} = \frac{2}{n}$$

also $\frac{2}{n} < 10^{-6} \quad (\Leftrightarrow) \quad n > \frac{2}{10^{-6}} = \frac{2\,000\,000}{1}$

$\rightarrow \forall n \geq 2\,000\,000$ ist $|a_n| < 10^{-6}$
auf jeden Fall erfüllt

5.3

(a) $a_n = \frac{n^2 - n + 2}{n^2 - 1}$ GW-Sätze!

$$= \frac{n^2}{n^2} \frac{1 - \frac{1}{n} + \frac{2}{n^2}}{1 - \frac{1}{n^2}}$$

$$\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1 //$$

Argumentation:

$$\text{für } n \rightarrow \infty \text{ konv. } \frac{1}{n} \rightarrow 0, \frac{2}{n^2} \rightarrow 0 \\ \frac{1}{n^2} \rightarrow 0$$

also

$$1 - \frac{1}{n} + \frac{2}{n^2} \rightarrow 1 \text{ nach GW-Satz}$$

$$1 - \frac{1}{n^2} \rightarrow 1 \neq 0 //$$

$$\leadsto \frac{1 - \frac{1}{n} + \frac{2}{n^2}}{1 - \frac{1}{n^2}} \rightarrow 1$$

$$= \frac{n^2 - n + 2}{n^2 - 1}$$

$$(b) \quad \frac{2^n - 3^n}{2^n + 3^n} = \frac{\cancel{2}^n}{\cancel{3}^n} \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^n \overset{0}{-1}}{\left(\frac{2}{3}\right)^n \overset{0}{+1}} \quad \text{da } \frac{2}{3} < 1$$

$$\xrightarrow{n \rightarrow \infty} -1 //$$

$$(c) \quad \frac{1+2+\dots+n}{n^2} = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n k$$

$$= \frac{1}{n^2} \frac{n(n+1)}{2} = \frac{\cancel{n}^x}{\cancel{n}^2} \frac{1+\frac{1}{n} \overset{0}{+1}}{2}$$

$$\xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2}$$

$$(d) \quad \sqrt{n} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$$

$$= \sqrt{n} \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$$

$$= \sqrt{n} \frac{\cancel{n+1} - \cancel{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$$

$$= \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}(\sqrt{1+\frac{1}{n}} + 1)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} //$$

$$\sqrt{n} \cdot \sqrt{1+\frac{1}{n}} = \sqrt{n(1+\frac{1}{n})} = \sqrt{n+1}$$

$$(e) \quad \frac{n}{\sqrt{n+1}} - \sqrt{n} = \cancel{\frac{n}{\sqrt{n+1}}}$$

$$= \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} \cdot (\sqrt{n} - \sqrt{n+1})$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}} = \frac{n-(n+1)}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}} = \frac{-1}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}}$$

$\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$ $\xrightarrow{n \rightarrow \infty} \text{error } 0$

also

$$\frac{n}{\sqrt{n+1}} - \sqrt{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \text{error } 0$$

$$\sqrt{n} = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} \cdot \sqrt{n+1}$$

$$(f) \quad \sqrt{n+\sqrt{n}} - \sqrt{n-\sqrt{n}}$$

$$= \frac{n+\sqrt{n} - (n-\sqrt{n})}{\sqrt{n+\sqrt{n}} + \sqrt{n-\sqrt{n}}}$$

$$= \frac{2\sqrt{n}}{\sqrt{n+\sqrt{n}} + \sqrt{n-\sqrt{n}}} = \frac{2\sqrt{n}}{\sqrt{n}(\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{n}}} + \sqrt{1-\frac{1}{\sqrt{n}}})}$$

$$\begin{aligned} a-b \\ \left[= \frac{(a-b)(a+b)}{a+b} \right] \\ = \frac{a^2-b^2}{a+b} \end{aligned}$$

$$\frac{n}{\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n} \cdot \sqrt{n}}{\sqrt{n}}$$

$$\xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{2}{\sqrt{1+1}} = 1 //$$

$$\begin{aligned} & \sqrt{n} \sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{n}}} \\ &= \sqrt{n(1+\frac{1}{\sqrt{n}})} = \sqrt{n+\sqrt{n}} \end{aligned}$$

5.5 a)

• $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a \in \mathbb{R}$, $a_n \in \mathbb{R}$ f.a. $n \in \mathbb{N}$

• $s_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k$ -- Folge der Mittelwerte

z. falls $a_n \rightarrow a$ dann auch $s_n \rightarrow a$

[Konvergenz im Mittel oder nach Cèsaro]

To Do ~~find~~ gegeben $\varepsilon > 0$, finde $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$
so dass

$$|s_n - a| < \varepsilon \quad \text{für alle } n \geq N_\varepsilon$$

Vorüberlegung:

$$\begin{aligned} |s_n - a| &= \left| \frac{1}{n} \left(\sum_{k=1}^n a_k \right) - a \right| = \frac{1}{n} \left| \left(\sum_{k=1}^n a_k \right) - \underbrace{n \cdot a}_{= \sum_{k=1}^n a} \right| \\ &= \frac{1}{n} \left| \sum_{k=1}^n (a_k - a) \right| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\stackrel{\Delta}{\leq} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \underbrace{|a_k - a|}_{\substack{\text{wird irgendwann} < \varepsilon \\ \rightarrow 0 \\ \text{für } n \rightarrow \infty}} \end{aligned}$$

genauer:

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |a_k - a| = \underbrace{\frac{1}{n} \sum_{k=1}^N |a_k - a|}_{\substack{< \varepsilon \\ \text{unabhängig} \\ \text{von } n}} + \underbrace{\frac{1}{n} \sum_{k=N+1}^n |a_k - a|}_{\substack{< \varepsilon \\ < n\varepsilon}}$$

man zur Lösung: gegeben $\varepsilon > 0$

1) da $a_n \rightarrow a$ gibt es ein $N_1 \in \mathbb{N}$ mit

$$|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{für alle } n \geq N_1 \quad (1)$$

2) da $\frac{1}{n} \rightarrow 0$ gibt es für dieses N_1

wiederum ein $N_2 \in \mathbb{N}$ mit

$$\frac{1}{n} < \frac{\varepsilon}{2} \left(\underbrace{\sum_{k=1}^{N_1} |a_k - a|}_{\text{unabhängig von } n!} \right)^{-1} \quad \text{für alle } n \geq N_2 \quad (2)$$

3) Sei nun $N = \max \{N_1, N_2\}$

dann gelten (1) und (2) gleichzeitig

und es folgt (Rechnung wie oben)

$$\begin{aligned} \underline{|s_n - a|} &= \left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k - a \right| = \frac{1}{n} \left| \sum_{k=1}^n (a_k - a) \right| \\ &\leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |a_k - a| \\ &= \underbrace{\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{N_1} |a_k - a|}_{< \frac{\varepsilon}{2} \text{ nach (2)}} + \underbrace{\frac{1}{n} \sum_{k=N_1+1}^n |a_k - a|}_{< \frac{\varepsilon}{2} \text{ nach (1)}} \\ &\qquad\qquad\qquad < \frac{n - (N_1 + 1)}{n} \frac{\varepsilon}{2} \\ &\qquad\qquad\qquad \leq \frac{\varepsilon}{2} \\ &\underline{< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon} \quad \Rightarrow \quad |s_n - a| < \varepsilon \quad \text{für } n \geq N \end{aligned}$$

b)

Wähle $a_k = (-1)^k$

dann ist

$$a_1 = -1$$

$$a_1 + a_2 = -1 + 1 = 0$$

$$a_1 + a_2 + a_3 = -1 + 1 - 1 = -1$$

$\vdots$

$\vdots$

$\vdots$

$$-1 \leq \sum_{k=1}^n (-1)^k \leq 0$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{n} \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (-1)^k \leq 0$$

$$\downarrow_{n \rightarrow \infty}$$

$$0$$

$$\downarrow$$

$$0$$

$$\Rightarrow s_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (-1)^k \rightarrow 0$$

vgl. Aufg 34
auf Blatt 6

aber $a_k = (-1)^k$ ist divergent

5.4

$$a_n \rightarrow a \in \mathbb{R}$$

$$b_n = \inf \{a_k : k \geq n\}$$

$$c_n = \sup \{a_k : k \geq n\}$$

zunächst

$$\bullet a_k = \frac{1}{k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$$

$$\sup \left\{ \frac{1}{k} : k \geq n \right\} = \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

$\underbrace{\left\{ \frac{1}{n}, \frac{1}{n+1}, \frac{1}{n+2}, \dots \right\}}$

$$\inf \left\{ \frac{1}{k} : k \geq n \right\} = 0 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

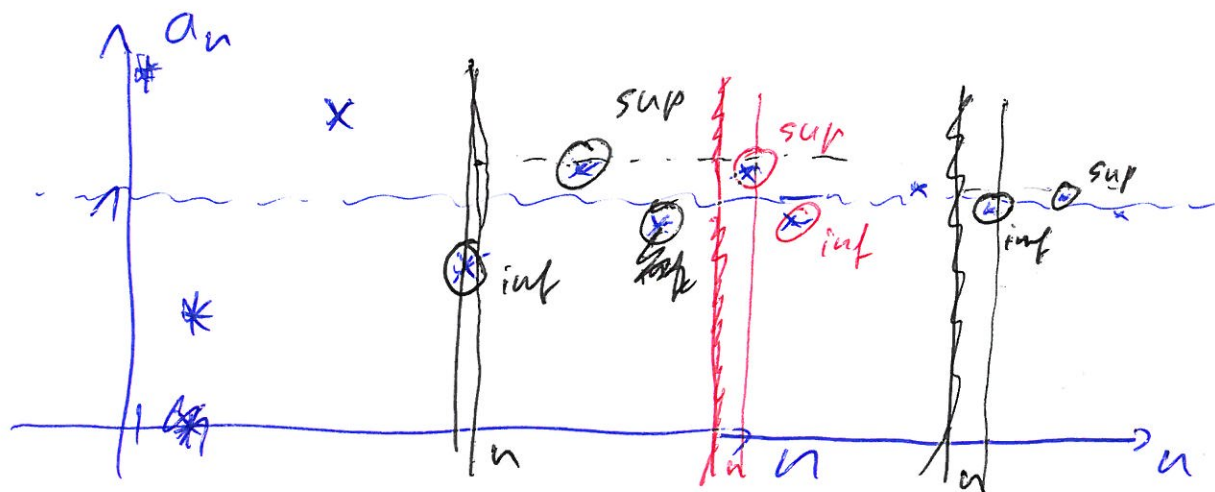
$$\bullet a_k = 1 - \frac{(-1)^k}{k^2} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 1$$

$$\sup \left\{ 1 - \frac{(-1)^k}{k^2} : k \geq n \right\} = \begin{cases} 1 + \frac{1}{n^2} & \text{falls } n \text{ ungerade} \\ 1 + \frac{1}{(n+1)^2} & \text{falls } n \text{ gerade} \end{cases}$$

z.B. für $n=3$ $\left\{ \frac{10}{9}, \frac{15}{16}, \frac{26}{25}, \dots, 1 \pm \frac{1}{k^2}, \dots \right\}$

Ansatz

allgemein $\left\{ 1 \pm \frac{1}{n^2}, \dots \right\}$



man beobachtet

$$\sup \{a_k : k \geq n\} = \begin{cases} 1 + \frac{1}{n^2} & \text{falls } n \text{ ungerade} \\ 1 + \frac{1}{(n+1)^2} & \text{falls } n \text{ gerade} \end{cases}$$

$$\inf \{a_k : k \geq n\} = \begin{cases} 1 - \frac{1}{n^2} & \text{falls } n \text{ gerade} \\ 1 - \frac{1}{(n+1)^2} & \text{falls } n \text{ ungerade} \end{cases}$$

in allen Fällen

$$\left. \begin{aligned} 1 + \frac{1}{n^2} &\rightarrow 1 \\ 1 + \frac{1}{(n+1)^2} &\rightarrow 1 \end{aligned} \right\} \sup \{a_k : k \geq n\} \rightarrow 1$$

$$\left. \begin{aligned} 1 - \frac{1}{n^2} &\rightarrow 1 \\ 1 - \frac{1}{(n+1)^2} &\rightarrow 1 \end{aligned} \right\} \inf \{a_k : k \geq n\} \rightarrow 1$$

$$a_n = (-1)^n$$

$$\sup \{ (-1)^n : n \geq n \} = 1 \quad \begin{array}{l} \nearrow \\ n \rightarrow \infty \end{array} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}$$

$\{-1, 1, -1, 1, \dots\}$
 oder $\{1, -1, 1, -1, \dots\}$

$$\inf \{ (-1)^n : n \geq n \} = -1 \quad \searrow \quad n \rightarrow \infty \rightarrow -1$$

Moral $\sup \{a_n : n \geq n\}$

und $\inf \{a_n : n \geq n\}$ können auch dann

konvergieren (wenn a_n selber nicht konvergiert!)

Zur eigentl. Aufg.:

Sei $a_n \rightarrow a$ d.h.,

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N_\varepsilon \quad |a_n - a| < \varepsilon$$

also ist

$$a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon \quad \text{für alle } n \geq N_\varepsilon$$

To Do wähle $\varepsilon > 0$, finde N_ε so dass

$$|b_n - a| < \varepsilon \quad \text{für alle } n \geq N_1$$

$$|c_n - a| < \varepsilon \quad \text{für alle } n \geq N_2$$

da $a_n \rightarrow a$ gibt es $N \in \mathbb{N}$ mit

$$|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{für alle } n \geq N$$

also

$$a - \frac{\varepsilon}{2} < a_n < a + \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{für alle } n \geq N$$

$a + \frac{\varepsilon}{2}$ ist obere Schranke an

$$\{a_k : k \geq n\} \quad \text{falls } n \geq N$$

$$\leadsto \sup \{a_k : k \geq n\} \leq a + \frac{\varepsilon}{2}$$

genauso

$$a - \frac{\varepsilon}{2} \leq \inf \{a_k : k \geq n\}$$

Zusammen

$$a - \frac{\varepsilon}{2} \leq \inf \{a_k : k \geq n\} \\ \leq \sup \{a_k : k \geq n\} \leq a + \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\leadsto |a - \sup \{a_k : k \geq n\}| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

$$|a - \inf \{a_k : k \geq n\}| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

also

$$b_n \rightarrow a \quad \text{und} \quad c_n \rightarrow a$$

(6.1)

(a)

$$1 = \lim_{n \rightarrow \infty} 1$$

✓

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(n - \frac{1}{n}\right)$$

✓

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(n - \frac{1}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} n - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n}$$

✗ so geht
der GW-Satz
nicht

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$$

✓

$$0 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} n = 0$$

0
"∞"

✗ 0 · ∞ nicht
definiert!

(b) Warum steht da falsches ?

• $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ ist monoton steigend
(machen wir später oder
Übung)

$$• a_n = (1 + \frac{1}{n})^1 = 2$$

$$\leadsto \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 1$$

Schrott

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} (1 + 0)^n$$

ist durch ~~keinen~~ ^{keinen} Satz ~~abgeleitet~~ ^{abgeleitet} legitimiert

DAS IST FALSCH

6.2

(a) (a_n) konv., (b_n) beschr. $\stackrel{?}{\Rightarrow} (a_n \cdot b_n)$ konv

NEIN!

z.B. $b_n = (-1)^n$, $a_n = 1 + \frac{1}{n}$

↑
beschr.

↑
konvergiert gegen 1

Aber $a_n \cdot b_n = (-1)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right)$ konv. nicht

da z.B. 2 Klip

Γ wähle

$n = 2k$ dann $a_n \cdot b_n = 1 + \frac{1}{2k} \rightarrow 1$ $1 \neq -1$

$n = 2k+1$ dann $a_n \cdot b_n = -1 - \frac{1}{2k+1} \rightarrow -1$

$\rightarrow a_n \cdot b_n$ kann nicht konv.

↓

(b) (a_n) Nullfolge, (b_n) beschr. $\stackrel{?}{\Rightarrow} (a_n \cdot b_n)$ Nullfolge

Ja!

$\exists |a_n \cdot b_n| < \varepsilon$ für alle $\varepsilon > 0$ ab einem gewissen Index N
(für alle $n \geq N$)

gegeben $\varepsilon > 0$ dann gibt es $N \in \mathbb{N}$ mit

$$|a_n| < \frac{\varepsilon}{B} \text{ für alle } n \geq N$$

wobei B die Schranke von (b_n) ist d.h.

$$|b_n| < B \quad \text{für alle } n \geq N$$

damit

$$|a_n \cdot b_n| = |a_n| \cdot |b_n| < \frac{\varepsilon}{B} \cdot B = \varepsilon$$

$$\Rightarrow \text{für alle } n \geq N$$

(c) $(a_n \cdot b_n)$ konv $\stackrel{?}{\Rightarrow} (a_n)$ konv oder (b_n) konv

Nein!

$$a_n = (-1)^{n+1} \quad b_n = (-1)^n$$

beide nicht konv

aber

$$(a_n \cdot b_n) = (-1)^{n+1} \cdot (-1)^n = (-1)^{2n+1} = -1$$

konvergiert

(d) $(a_n \cdot b_n)$ div $\stackrel{?}{\Rightarrow} (a_n)$ diver $\bigwedge$ (b_n) div
oder

das die Kontraposition zum GW-Satz

$$[(a_n \cdot b_n) \text{ div} \Rightarrow (a_n) \text{ div oder } (b_n) \text{ div}]$$

$$\Leftrightarrow$$

$$[(a_n) \text{ konv und } (b_n) \text{ konv} \Rightarrow (a_n \cdot b_n) \text{ konv}]$$

$$\Leftrightarrow$$

Wahr

[6.3]

$$a_1 = \sqrt{1} \quad a_2 = \sqrt{1+\sqrt{1}} \quad a_3 = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1}}} \quad \dots$$

Idee:

- $a_{n+1} = \sqrt{1+a_n}$ mit $a_1 = 1 = \sqrt{1}$
- ~~dass~~ zeige Monotonie & Beschränkt
dann folgt Konvergenz

Behauptung 1:

$$a_{n+1} \geq a_n \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}$$

d.h. (a_n) ist monoton steigend

Behauptung 2:

$$a_n \leq 2 \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}$$

d.h. (a_n) ist nach oben beschränkt

beide Behauptungen kann per Induktion
beweisen!

$\leadsto$ nach VL: muss es lim GW geben

Wie lässt sich dieser berechnen? sei $a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$

$$a_{n+1} = \sqrt{1+a_n}$$

$$\downarrow_{n \rightarrow \infty}$$
$$a = \sqrt{1+a}$$

$$a = \sqrt{1+a} \leadsto a^2 - a - 1 = 0$$

$$\stackrel{MF}{\leadsto} a_{\pm} = \frac{1}{2} [1 \pm \sqrt{1+4}] = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Welche der beiden $a_{\pm}$?

da $a_n \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$

und $a_- < 0$ bzw. $a_+ > 0$

muss a_+ der GW sein, d.h.

$$\stackrel{MF}{\leadsto} \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

zu Behauptung 1:

IA. $a_1 = 1$, $a_2 = \sqrt{2}$ und

$$a_2 = \sqrt{2} > 1 = a_1 \quad \checkmark$$

IV bei Angenommen

$$a_{n+1} \geq a_n \text{ für } \text{wenn } n \in \mathbb{N}$$

IS ~~per Induktion~~

nach IV ist $a_{n+1} \geq a_n$

$$\leadsto 1 + a_{n+1} \geq 1 + a_n$$

$$\rightarrow \sqrt{1+a_{n+1}} \geq \sqrt{1+a_n} = a_{n+1}$$

" a_{n+2}

$$a_1 \leq 0$$

$$a_{n+2} \geq a_{n+1}$$

zu Behauptung 2:

$$\exists a_n \leq 2 \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}$$

IA $a_1 = 1 \leq 2 \rightarrow$ Aussage stimmt
für $n=1$

IV. Angenommen es ist

$$a_n \leq 2 \quad \text{für ein } n \in \mathbb{N}$$

IS für diesen n folgt:

$$a_{n+1} = \sqrt{1+a_n} \stackrel{\text{IV.}}{\leq} \sqrt{1+2} = \sqrt{3} < \sqrt{4} = 2$$

↑
interessant
sagt nur dass
 $a_n \leq 2$

"schlecht operieren"

es gilt (nach dem von oben)

$$a_n \leq \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

dann wäre im IS

$$\sqrt{1+\frac{1+\sqrt{5}}{2}} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Cauchy-Kriterium:

ein reelle Folge ~~von~~ (a_n) konv

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n, m \geq N |a_n - a_m| < \varepsilon$$

6.4

$$|a_{n+1} - a_n| \leq \gamma |a_n - a_{n-1}| \quad \text{f\"ur } 0 \leq \gamma < 1 \quad (*)$$

$$\exists |a_{n+k} - a_n| \leq \frac{\gamma^{n-1}}{1-\gamma} |a_2 - a_1|$$

Vorüberlegung:

- Wir kennen einen Zusammenhang

$$|a_{n+1} - a_n| \leadsto |a_n - a_{n-1}|$$

das kann man fortsetzen zu

$$|a_{n+1} - a_n| \leadsto |a_2 - a_1|$$

also

$$\begin{aligned} |a_{n+1} - a_n| &\stackrel{(*)}{\leq} \gamma |a_n - a_{n-1}| \stackrel{(*)}{\leq} \gamma^2 |a_{n-1} - a_{n-2}| \\ &\stackrel{(*)}{\leq} \gamma^3 |a_{n-2} - a_{n-3}| \stackrel{(*)}{\leq} \dots \stackrel{(*)}{\leq} \gamma^{n-1} |a_2 - a_1| \end{aligned}$$

$\leftarrow$ da $|a_n - a_{n-1}| \leq \gamma |a_{n-1} - a_{n-2}|$

Behauptung 1: Es ist

$$|a_{n+1} - a_n| \leq \gamma^{n-1} |a_2 - a_1| \quad \text{f\"ur alle } n \geq 2$$

(Kann man wieder per Induktion beweisen)

• Was passiert bei „größeren“ Sprüngen?
Zurückführen?

z.B.

$$|a_{n+2} - a_n| = |a_{n+2} - a_{n+1} + a_{n+1} - a_n|$$

$$\stackrel{\Delta}{\leq} |a_{n+2} - a_{n+1}| + |a_{n+1} - a_n|$$

$$|a_{n+3} - a_n| \stackrel{\Delta}{\leq} |a_{n+3} - a_{n+2}| + |a_{n+2} - a_{n+1}| + |a_{n+1} - a_n|$$

~) jeder Summand sieht jetzt aus wie oben!

Behauptung 2:

$$|a_{n+k} - a_n| \leq \sum_{j=1}^k |a_{n+j} - a_{n+j-1}| \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}$$

(könnte man jetzt wieder per Induktion beweisen)

Zusammen:

$$|a_{n+k} - a_n| \stackrel{\textcircled{2}}{\leq} \sum_{j=1}^k |a_{n+j} - a_{n+j-1}| \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}$$

↑
das auch

$$\stackrel{\textcircled{1}}{\leq} \sum_{j=1}^k \gamma^{n+j-2} |a_2 - a_1|$$

$$= \gamma^{n-2} |a_2 - a_1| \cdot \underbrace{\sum_{j=1}^k \gamma^j}_{\text{geometrische Summe!}}$$

geometrische Summe!

Kap 3 14

$$\leq \frac{\gamma^{n-1}}{1-\gamma} |a_2 - a_1|$$

$$\sum_{j=1}^k \gamma^j = \frac{\gamma - \gamma^{k+1}}{1-\gamma} \leq \frac{\gamma}{1-\gamma}$$

gezeigt

$$|a_{n+k} - a_n| \leq \frac{\gamma^{n-1}}{1-\gamma} |a_2 - a_1|$$

da $\gamma < 1 \rightsquigarrow \gamma^{n-1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

der Rest der da steht ist konstant

$$|\underbrace{a_{n+k}}_{=a_m} - a_n| < \varepsilon \quad \text{für alle } n \geq N \text{ und } k \in \mathbb{N}$$

bzw

$$|a_m - a_n| < \varepsilon \quad \text{für alle } n, m \geq N$$

d.h. (a_n) ist Cauchyfolge!

6.5

Formale Definition

$$a_{n+1} = 1 + \frac{1}{a_n} \quad \text{mit } a_1 = 1$$

Problem: (a_n) ist nicht monoton!

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 2 > 1, \quad a_3 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} < 2$$

Ausweg: Verwende 6.4

also:

$$\begin{aligned} |a_{n+1} - a_n| &= \left| 1 + \frac{1}{a_n} - \left(1 + \frac{1}{a_{n-1}} \right) \right| \\ &= \left| \frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_{n-1}} \right| \\ &= \left| \frac{a_{n-1} - a_n}{a_n \cdot a_{n-1}} \right| \\ &= \underbrace{\frac{1}{a_n \cdot a_{n-1}}}_{\text{zeige } < 1} |a_n - a_{n-1}| \quad \text{sieht gut aus!} \end{aligned}$$

dafür

Problem

~~Problem~~ $a_n \cdot a_{n-1} \geq 1 \cdot 1 = 1$ reicht so noch nicht

also

$$a_n \cdot a_{n-1} = \left(1 + \frac{1}{a_{n-1}} \right) \cdot a_{n-1} = a_{n-1} + 1 \geq 1 + 1 = 2$$

da $a_n \geq 1$
für alle $n \in \mathbb{N}$

es folgt:

$$|a_{n+1} - a_n| = \frac{1}{a_n \cdot a_{n-1}} |a_n - a_{n-1}|$$

$$\leq \frac{1}{2} |a_n - a_{n-1}|$$

$\underbrace{\quad}_{\text{MA} = r < 1}$

→ nach 6.4 ist (a_n) Cauchy in $\mathbb{R}$!

→ nach VL (~~Robust~~) ist $\mathbb{R}$ vollständig, d.h.

es gibt GW $a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \in \mathbb{R}$

• GW lässt sich berechnen wie in Aufg 6.3

„in der Rekursionsvorschrift gehen wir zum GW über und erhalten:“

$$a_{n+1} = 1 + \frac{1}{a_n}$$

$$\begin{array}{ccc} \downarrow n \rightarrow \infty & & \downarrow \\ a = 1 + \frac{1}{a} \end{array}$$

$$\leadsto a^2 - a - 1 = 0$$

das kennen wir aus 6.3 schon

$$\text{Lsg } a_{\pm} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

da $a_n \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ist

$$\frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$$

[7.2]

für $z = x + iy$ definieren

$$\|z\|_1 = |x| + |y|$$

$$\|z\|_2 = \sqrt{x^2 + y^2}$$

... „normale“ Betrag

Beh: $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ definieren Normen auf $\mathbb{C}$

Exemplarisch für $\|\cdot\|_1$:

1) positive Definitheit

$$\bullet \|z\|_1 = |x| + |y| \geq 0 \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C}$$

$$\bullet \|z\|_1 = 0 \quad \text{To Do: zeige } z = 0$$

$$\|z\|_1 = 0 \stackrel{\text{Def}}{\Rightarrow} |x| + |y| = 0$$

$$\leadsto |x| = |y| = 0$$

$$\begin{array}{l} \text{da } |\cdot| \text{ Norm auf } \mathbb{R} \\ \leadsto x = y = 0 \end{array}$$

$$\leadsto z = 0 + i0 = 0$$

2) Homogenität: Sei $\lambda \geq 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$, To Do: zeige $\|\lambda z\|_1 = |\lambda| \cdot \|z\|_1$

$$\|\lambda z\|_1 = \|\lambda(x + iy)\|_1 = \|\lambda x + i\lambda y\|_1$$

$$\stackrel{\text{Def}}{=} |\lambda x| + |\lambda y| \stackrel{|\cdot| \text{ Norm auf } \mathbb{R}}{=} |\lambda| |x| + |\lambda| |y| = |\lambda| (|x| + |y|) \stackrel{\text{Def}}{=} |\lambda| \|z\|_1$$

3) Dreiecksungleichung!

To Do: Zeig $\|z + \tilde{z}\|_1 \leq \|z\|_1 + \|\tilde{z}\|_1$

$$\begin{aligned}\|z + \tilde{z}\|_1 &= \|(x+iy) + (\tilde{x}+i\tilde{y})\|_1 \quad \text{f. } z=x+iy, \tilde{z}=\tilde{x}+i\tilde{y} \\ &= \|(x+\tilde{x}) + i(y+\tilde{y})\|_1 \\ &\stackrel{\text{Def}}{=} |x+\tilde{x}| + |y+\tilde{y}| \\ &\triangleq \\ &\leq |x| + |\tilde{x}| + |y| + |\tilde{y}| \\ &= (|x| + |y|) + (|\tilde{x}| + |\tilde{y}|) \\ &\stackrel{\text{Def}}{=} \|z\|_1 + \|\tilde{z}\|_1\end{aligned}$$

(A) Ze $\|z\|_2 \leq \|z\|_1 \leq \sqrt{2} \|z\|_2$ f. alle $z \in \mathbb{C}$

• Zu $\|z\|_2 \leq \|z\|_1$

es ist

$$\|z\|_2 \leq \|z\|_1 \stackrel{\text{Def}}{\Leftrightarrow} \sqrt{x^2 + y^2} \leq |x| + |y|$$

f. $z=x+iy$

alles positiv

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 \leq \underbrace{|x|^2}_{=x^2} + 2|x| \cdot |y| + \underbrace{|y|^2}_{=y^2}$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq 2 \cdot |x| \cdot |y| \quad \checkmark$$

• Zu $\|z\|_1 \leq \sqrt{2} \cdot \|z\|_2$

es ist

$$\|z\|_1 \leq \sqrt{2} \cdot \|z\|_2 \stackrel{\text{Def}}{\Leftrightarrow} |x| + |y| \leq \sqrt{2} \cdot \sqrt{x^2 + y^2} \quad \left(\text{f. } z=x+iy \right)$$

alle positiv

$$\Leftrightarrow \underbrace{|x|^2}_{=x^2} + 2|x| \cdot \underbrace{|y|}_{=y^2} + |y|^2 \leq 2(x^2 + y^2)$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq x^2 - 2|x| \cdot |y| + y^2 \\ = (|x| - |y|)^2 \quad \checkmark$$

(b) $\exists (z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konv. in $(\mathbb{C}, \|\cdot\|_1)$ gdw. konv. in $(\mathbb{C}, \|\cdot\|_2)$
der GW ändert sich dabei auch nicht!

" $\Rightarrow$ " Annahme (z_n) konv. in $(\mathbb{C}, \|\cdot\|_1)$ ^{geg. $z \in \mathbb{C}$} d.h.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \geq 1 \forall n \geq N \|z_n - z\|_1 < \varepsilon$$

wir zeigen (z_n) konv. in $(\mathbb{C}, \|\cdot\|_2)$, d.h.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \geq 1 \forall n \geq N \|z_n - z\|_2 < \varepsilon$$

Für $z \in \mathbb{C}$ GW von (z_n) in $(\mathbb{C}, \|\cdot\|_1)$ und $\varepsilon > 0$ gegeben

Dann gibt es $N \geq 1$ mit

$$\|z_n - z\|_1 < \varepsilon \quad \text{für alle } n \geq N$$

nach Teilaufg (b) ist aber

$$\|z_n - z\|_2 \leq \|z_n - z\|_1$$

$\leadsto$ zusammen fassen

$$\|z_n - z\|_2 \leq \|z_n - z\|_1 < \varepsilon \quad \text{für alle } n \geq N$$

d.h. (z_n) konv. in $(\mathbb{C}, \|\cdot\|_2)$

" $\Leftarrow$ " Annahme (z_n) konv in $(\mathbb{C}, \|\cdot\|_2)$

wir zeigen (z_n) konv in $(\mathbb{C}, \|\cdot\|_1)$

Sei $z \in \mathbb{C}$ der GW von (z_n) in $(\mathbb{C}, \|\cdot\|_2)$, und $\varepsilon > 0$ gegeben

Dann gibt es $N \in \mathbb{N}$ mit

$$\|z_n - z\|_2 < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}} \quad \text{für alle } n \geq N$$

damit

$$\|z_n - z\|_1 \leq \sqrt{2} \|z_n - z\|_2 < \sqrt{2} \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}} = \varepsilon \quad \text{für alle } n \geq N$$

(c) (z_n) konv in $\mathbb{C} \Leftrightarrow (\operatorname{Re} z_n), (\operatorname{Im} z_n)$ konv in $\mathbb{R}$

$\uparrow$ bzgl. $\|\cdot\|_1$ oder $\|\cdot\|_2$

$\nwarrow$ Folge in $\mathbb{C}$ $\nearrow$ Folge in $\mathbb{R}$

* Schnelles Argument zum Nachdenken:

$\mathbb{C}$ kann man mit $\mathbb{R}^2$ identifizieren

$$\mathbb{C} \ni z = x + iy \iff \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

bzw.

$$z_n \iff \begin{pmatrix} \operatorname{Re} z_n \\ \operatorname{Im} z_n \end{pmatrix}$$

$\uparrow$ Folge in $\mathbb{C}$ $\uparrow$ Folge in $\mathbb{R}^2$

Wende Satz 39 aus Kap 5 VL an

* etwas länger zum Rechnen:

" $\Rightarrow$ " Sei (z_n) konv in $(\mathbb{C}, \|\cdot\|_1)$

Gegeben $\varepsilon > 0$, dann gibt es $N \geq 1$ mit

$$\|z_n - z\|_1 < \varepsilon \quad \text{für alle } n \geq N$$

$$\| \operatorname{Re}(z_n - z) + i \operatorname{Im}(z_n - z) \|_1$$

$$\stackrel{\text{Def}}{=} |\operatorname{Re}(z_n - z)| + |\operatorname{Im}(z_n - z)|$$

$$= |\operatorname{Re} z_n - \operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z_n - \operatorname{Im} z|$$

$$\geq |\operatorname{Re} z_n - \operatorname{Re} z|$$

also

$$|\operatorname{Re} z_n - \operatorname{Re} z| \leq \|z_n - z\|_1 < \varepsilon \quad \text{für alle } n \geq N$$

d.h.

$$\operatorname{Re} z_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \operatorname{Re} z$$

gerauso

$$|\operatorname{Im} z_n - \operatorname{Im} z| \leq \|z_n - z\|_1 < \varepsilon \quad \text{für alle } n \geq N$$

d.h.

$$\operatorname{Im} z_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \operatorname{Im} z$$

" $\Leftarrow$ " Annahme $(\operatorname{Re} z_n), (\operatorname{Im} z_n)$ konv in $\mathbb{R}$
dann gibt es $a, b \in \mathbb{R}$, so dass

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_1 \forall n \geq N_1 |\operatorname{Re} z_n - a| < \varepsilon/2$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_2 \forall n \geq N_2 |\operatorname{Im} z_n - b| < \varepsilon/2$$

wähle $N = \max \{N_1, N_2\}$ dann gelten beide Aussagen gleichzeitig, und es ist

$$\begin{aligned} \|z_n - (a+ib)\|_1 &= \|\operatorname{Re} z_n - a + i(\operatorname{Im} z_n - b)\|_1 \\ &\stackrel{\text{Def}}{=} |\operatorname{Re} z_n - a| + |\operatorname{Im} z_n - b| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \\ &\quad \text{für alle } n \geq N \end{aligned}$$

und damit

$$z_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a+ib$$

(d) Wie haben in (c) gesehen, dass

$$\operatorname{Re} z_n \rightarrow a, \operatorname{Im} z_n \rightarrow b \Rightarrow z_n = \operatorname{Re} z_n + i \operatorname{Im} z_n \rightarrow (a+ib)$$

Sei (z_n) konv in $\mathbb{C}$, dann konv $\operatorname{Re} z_n, \operatorname{Im} z_n$

~~$\operatorname{Re} z_n$~~

bzw. $\operatorname{Re} z_n, -\operatorname{Im} z_n$

und damit

$$\overline{z_n} = \operatorname{Re} z_n - i \operatorname{Im} z_n$$

und wenn $\operatorname{Re} z_n \rightarrow a$, $\operatorname{Im} z_n \rightarrow b$

dann

$$\bar{z}_n = \operatorname{Re} z_n - i \operatorname{Im} z_n \rightarrow a - ib$$

also

$$z = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n \Rightarrow \bar{z} = \lim_{n \rightarrow \infty} \bar{z}_n$$

die Umkehrung folgt mit $\bar{\bar{z}}_n = z_n$ bzw. $\bar{\bar{z}} = z$

genauer

$$\bar{z} = \lim_{n \rightarrow \infty} \bar{z}_n \Rightarrow \bar{\bar{z}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \bar{\bar{z}}_n$$

$$\begin{array}{ccc} \parallel & & \parallel \\ z & = & \lim_{n \rightarrow \infty} z_n \end{array}$$

(e) (i) $z_n = (-1)^n + \frac{ni}{n+1}$

$$\left. \begin{array}{l} \operatorname{Re}\left(\frac{ni}{n+1}\right) = 0 \\ \operatorname{Im}\left(\frac{ni}{n+1}\right) = \frac{n}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1 \end{array} \right\} \frac{ni}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} i \text{ in } \mathbb{C}$$

d.h. z_n hat 2 Hp :

• $\nexists n=2k$ dann $z_{2k} = 1 + \frac{i2k}{2k+1} \rightarrow 1+i \text{ in } \mathbb{C}$

$\nexists n=2k+1$ dann $z_{2k+1} = -1 + \frac{i(2k+1)}{2k+2} \rightarrow -1+i \text{ in } \mathbb{C}$

Hp verschieden d.h. (z_n) nicht konv. in $\mathbb{C}$
ist

$$(ii) \quad z_n = \sqrt[n]{n^2} i^n$$

• wir wissen

$$\sqrt[n]{n^2} = (\sqrt[n]{n})^2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1 \quad (\text{vgl. VL})$$

• Was macht i^n

$$\text{Beispiele: } i^2 = -1, \quad i^3 = -i, \quad i^4 = 1$$

$$i^5 = i, \quad \dots$$

$\rightarrow (z_n)$ hat 4 Hp

$$\text{z.B. f. } n=4k \quad z_{4k} = \sqrt[4k]{(4k)^2} \cdot 1 \rightarrow 1$$

$$n=4k+1 \quad z_{4k+1} = \sqrt[4k+1]{(4k+1)^2} \cdot i \rightarrow i$$

$$n=4k+2 \quad \rightarrow -1$$

$$n=4k+3 \quad \rightarrow -i$$

$$(iii) \quad z_n = \left(\frac{1+i}{2}\right)^n \quad \text{Was macht das?}$$

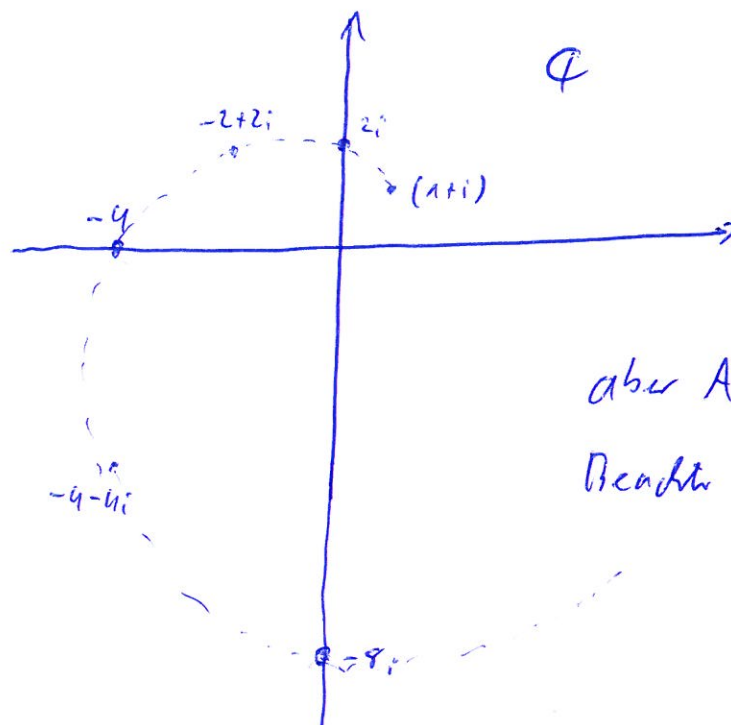
$$\bullet (1+i)^2 = 1 + 2i - 1 = 2i$$

$$(1+i)^3 = (1+i)(1+i)^2 = (1+i) \cdot 2i = -2 + 2i$$

$$(1+i)^4 = (1+i)^2(1+i)^2 = 2i \cdot 2i = -4$$

$$(1+i)^5 = (1+i)^4(1+i) = -4(1+i) = -4 - 4i$$

$$(1+i)^6 = [(1+i)^2]^3 = (2i)^3 = -8i$$



aber Achtung

Rechte und $\frac{1}{4^n}$

Idee! $|1+i| = \sqrt{2}$ d.h. $\left| \frac{1+i}{4} \right| = \frac{\sqrt{2}}{4}$

$$\text{bzw. } \left(\left| \frac{1+i}{4} \right| \right)^n = \left| \left(\frac{1+i}{4} \right)^n \right| = \left(\frac{\sqrt{2}}{4} \right)^n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$$

für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\text{d.h. } |z_n| = \left| \left(\frac{1+i}{4} \right)^n \right| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad \Rightarrow \quad z_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

alternativ

$$z_n = \left(\frac{1+i}{4} \right)^n = \underbrace{\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}} \right)^n}_{\text{beschr.}} \underbrace{\left(\frac{\sqrt{2}}{4} \right)^n}_{\rightarrow 0} \rightarrow 0 \quad (\text{der Satz gilt auch in } \mathbb{C})$$

(iv) $z_n = \left(\frac{1+\sqrt{3}i}{2} \right)^n$ Was tut das

Idee aus (iii) und berechne

$$\left| \frac{1+\sqrt{3}i}{2} \right| = \frac{1}{2} |1+\sqrt{3}i| = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1$$

$$\bullet \left(\frac{1+\sqrt{3}i}{2} \right)^2 = \frac{(1+\sqrt{3}i)^2}{4} = \frac{1+2\sqrt{3}i-3}{4} = \frac{-2+2\sqrt{3}i}{4} = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$$

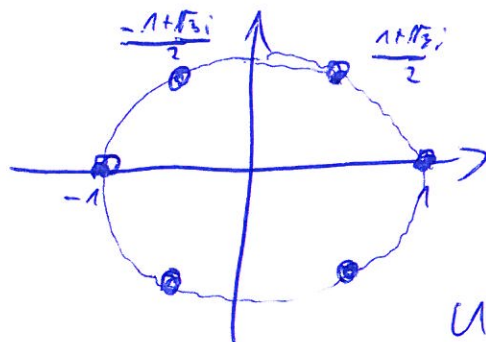
$$\bullet \frac{(1+\sqrt{3}i)^3}{8} = \frac{(1+\sqrt{3}i)(1+\sqrt{3}i)^2}{8} = \frac{(1+\sqrt{3}i)(-1+\sqrt{3}i)}{8} = \frac{-1-\sqrt{3}}{4} = \frac{-4}{4} = -1$$

$$\bullet \frac{(1+\sqrt{3}i)^4}{16} = \frac{(-1+\sqrt{3}i)^2}{4} = \frac{1-2\sqrt{3}i-3}{4} = \frac{-2-2\sqrt{3}i}{4} = \frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$$

$$\bullet \frac{(1+\sqrt{3}i)^5}{32} = \dots = \frac{1-\sqrt{3}i}{2}$$

$$\bullet \frac{(1+\sqrt{3}i)^6}{64} = \dots = 1$$

das sind die 6-ten
Einheitswurzeln!



und das sind
gerade 6 Hlp

8.1 (a)(i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ $\begin{cases} \text{konv. (Leibnitz)} \\ \text{nicht abs. konv. } (\frac{1}{\sqrt{n}} \text{ ist div. Minorante}) \end{cases}$ VÜ am 15.12.17

(ii) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin n$: Trickkriterium

(iii) $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}}$:

(iv) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n^2+1)}}$: OK $\sum_{n=1}^m \frac{1}{\sqrt{n(n^2+1)}} \leq \sum_{n=1}^m \frac{1}{\sqrt{n \cdot n^2}} = \sum_{n=1}^m \frac{1}{n^{3/2}} < \infty$, da $3/2 > 1$

(v) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$ QK: $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n!} = \frac{n^n (n+1)}{(n+1)^{n+1}} = \left(\frac{n}{n+1} \right)^n = \left(\frac{n+1}{n} \right)^{-n}$

$\left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} \rightarrow e, \text{ also } \frac{1}{e} \rightarrow \text{GW } \frac{1}{e} \Rightarrow \frac{1}{e} < 1 \right]$

(vi) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n!}}$ $\downarrow e$ Es ist $n! \leq n^n \Rightarrow \sqrt[n]{n!} \leq \sqrt[n]{n^n} = n$
 $\Rightarrow \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} \geq \frac{1}{n} \leftarrow \text{Minorante}$

(vii) $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n!}$ WK $\sqrt[n]{|2^{-n!}|} = 2^{-\frac{n!}{n}} = 2^{-(n-1)!} = \frac{1}{2^{(n-1)!}} \rightarrow 0$

8.1 (b) (i) $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-5n} = \sum_{n=1}^{\infty} (2^{-5})^n = -1 + \frac{1}{1-2^{-5}} = -1 + \frac{1}{1-2^{-5}} = \frac{2^5 - 1}{2^5 - 1} = \frac{1}{31}$

(ii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1}$
 $\therefore a_n$

Es gilt (da Start bei 1 statt 0)

$a_n = \frac{1}{4n^2-1} = \frac{1}{(2n+1)(2n-1)} = \frac{2n+1 - (2n-1)}{(2n+1)(2n-1)} \cdot \frac{1}{2}$
 $= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right)$

$\uparrow$ ug. Zahl $< 2n$ $\uparrow$ ug. Zahl $> 2n$

$\Rightarrow \sum_{n=1}^N a_n = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots \right)$

(Teleskopsumme)

$\left(\frac{1}{2N-1} - \frac{1}{2N+1} \right) \rightarrow \frac{1}{2}$
 $\left(\frac{1}{N-200} \right)$

8.2 $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$

Stellen von k	Nicht gestrichene Summanden ($i > 0$)	($i = 0$)
1 (8 -9)	8	9
2 (10- 99)	8·9	9·9
3 (100- 999)	8·9·9	9·9·9
⋮	⋮	⋮
n	8·9 ⁿ⁻¹	9 ⁿ

Für $i \neq 0$, z.B. $i=3$

$$0 < \sum_{i=3}^{\infty} = \underbrace{\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{9} \right)}_{\substack{\leq \frac{1}{1} \quad \leq \frac{1}{2} \quad \dots \quad \leq \frac{1}{1} \\ \leq 8 \cdot \frac{1}{1}}} + \underbrace{\left(\frac{1}{10} + \dots + \frac{1}{99} \right)}_{\leq 8 \cdot 9 \cdot \frac{1}{10}} + \underbrace{\left(\frac{1}{100} + \dots + \frac{1}{999} \right)}_{\leq 8 \cdot 9 \cdot 9 \cdot \frac{1}{100}} + \dots$$

$$\leq 8 \cdot 10^0 + 8 \cdot 9 \cdot 10^{-1} + 8 \cdot 9^2 \cdot 10^{-2} + 8 \cdot 9^3 \cdot 10^{-3} + \dots$$

$$= 8 \left[1 + \frac{9}{10} + \frac{9^2}{100} + \frac{9^3}{1000} + \dots \right] \leftarrow \text{Majorante}$$

$$= 8 \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{9}{10} \right)^k = 8 \cdot \frac{1}{1 - 9/10} = 8 \cdot \frac{10}{10-9} = \underline{\underline{80}}$$

Für $i=0$

$$\sum_{i=0}^{\infty} = \underbrace{\left(\frac{1}{1} + \dots + \frac{1}{9} \right)}_{\leq 9 \cdot \frac{1}{1}} + \underbrace{\left(\frac{1}{10} + \dots + \frac{1}{99} \right)}_{\leq 9 \cdot 9 \cdot \frac{1}{10}} + \dots$$

$$\leq 9 \cdot \frac{1}{1} + 9 \cdot 9 \cdot \frac{1}{10} + 9^3 \cdot \frac{1}{100} + \dots$$

$$= 9 \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{9}{10} \right)^k = 9 \cdot \frac{1}{1 - 9/10} = \underline{\underline{90}}$$

$\Rightarrow \sum_{i=1}^{\infty}$ konv. für alle $i \in \{0, \dots, 9\}$

8.3 (a) $\sum_n a_n$ abs. konv. n. $\sum_n b_n$ konv.
gegen A

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^N |a_k b_k| = \sum_{k=1}^N |a_k| \cdot \underbrace{|b_k|}_{\leq M, \text{ da } b_n \rightarrow 0} \leq M \sum_{k=1}^N |a_k| \xrightarrow{N \rightarrow \infty} M \cdot A < \infty$$

$$(b) \quad a_n = b_n = \frac{(-1)^n}{n} \Rightarrow a_n \cdot b_n = \frac{1}{n} \\ \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$$

Aber $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ konvergiert nach Leibniz!

8. §

Eigenschaften von S_n :

$$\triangleright S_n = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} \leq 1 + 1 + \dots + 1 = n$$

$$\triangleright S_n - S_{n-1} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{1}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n-1}\right) + \frac{1}{n} = \frac{1}{n}$$

Also gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{S_n}{2^n} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} \stackrel{=: a_n}{\leftarrow}$$

konvergiert wegen QK

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \left| \frac{n+1}{2^{n+1}} \cdot \frac{2^n}{n} \right| = \frac{1}{2} \frac{n+1}{n} \stackrel{n \geq 2}{\leq} \frac{1}{2} \frac{2+1}{2} = \frac{3}{4} < 1$$

und die Reihe konvergiert wegen des Majorantenkriteriums.

Weiter ist für $N \geq 1$

$$\sum_{n=1}^N \frac{1}{2^n n} = \sum_{n=1}^N \frac{1}{2^n} \underbrace{(S_n - S_{n-1})}_{= \frac{1}{n}} = \sum_{n=1}^N \frac{S_n}{2^n} - \sum_{n=1}^{N-1} \frac{S_{n-1}}{2^n}$$

$$\downarrow$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n n}$$

$$= (- \dots -) - \sum_{n=1}^{N-1} \frac{S_n}{2^{n+1}}$$

$$= (- \dots -) - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{N-1} \frac{S_n}{2^n}$$

$$\xrightarrow{\rightarrow A} \quad \xrightarrow{\rightarrow A \quad (N \rightarrow \infty)}$$

$$\rightarrow A - \frac{1}{2} A = \frac{1}{2} A$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n 2^n} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{S_n}{2^n}$$

Zur Zetafunktion 8.5

$$\zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

$$\triangleright \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k)^s} = \frac{1}{2^s} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s} = \frac{1}{2^s} \zeta(s) \quad (*)$$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^s} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k)^s} \stackrel{(*)}{=} \zeta(s) - \frac{1}{2^s} \zeta(s) = (1 - 2^{-s}) \zeta(s)$$

$\uparrow$ nur ungerade $\neq 1$ $\uparrow$ alle $k \neq 1$ $\uparrow$ nur gerade $\neq 2$

$$= \begin{cases} \frac{3}{4} \cdot \frac{\pi^2}{6} = \frac{\pi^2}{8} \\ \frac{15}{16} \cdot \frac{\pi^4}{90} = \frac{\pi^4}{96} \end{cases}$$

$$\triangleright \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^s} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^s} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k)^s} = (1 - 2^{-s}) \zeta(s) - 2^{-s} \zeta(s)$$

$$= \underline{\underline{(1 - 2^{1-s}) \zeta(s)}}$$

$\uparrow$
 n ug. $\Leftrightarrow +$
 n ger. $\Leftrightarrow -$

$$= \begin{cases} \frac{7}{8} \cdot \frac{\pi^4}{90} , & s=4 \\ \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi^2}{6} , & s=2 \end{cases}$$

VÜ 26.01.2018

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

$$\stackrel{x \neq 0}{\Rightarrow} f'(x) = 2x \cos\left(\frac{1}{x}\right) - x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) \left(-\frac{1}{x^2}\right) = 2x \cos\left(\frac{1}{x}\right) + \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

f ist Komp. und Produkt
diffb. Funktionen

Zeige f ist diffb. in $x_0 = 0$.
Für $h \neq 0$ ist

$$\frac{f(h) - f(0)}{h} = \frac{h^2 \cos\left(\frac{1}{h}\right)}{h} = h \cos\left(\frac{1}{h}\right)$$

$$\Rightarrow \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \neq 0}} |h \cos\left(\frac{1}{h}\right)| \leq \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \neq 0}} |h| = 0$$

$\Rightarrow f$ ist diffb. in 0 mit $f'(0) = 0$.

$f \notin C^1$

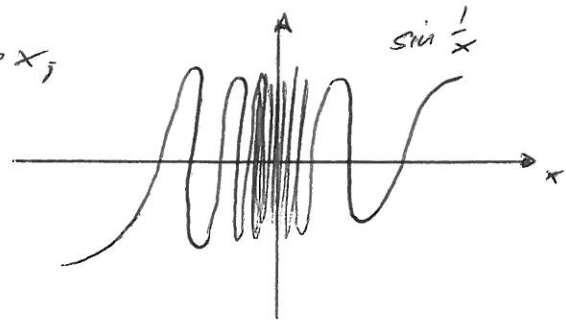
$$\lim_{x \rightarrow 0} \underbrace{2x \cos\left(\frac{1}{x}\right)}_{\rightarrow 0} + \sin\left(\frac{1}{x}\right) \quad \text{ex. nicht,}$$

da $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \neq 0}} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ nicht ex,

nutze z.B.

Teilfolgenargument mit

$$x_k = \frac{1}{\pi k} \cdot 2, \quad k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$$



$$\begin{aligned} \text{Z} // \text{(i)} f(t) &= f(-t) = (f \circ \sigma)(t) \quad \underline{\text{g.}} \quad \text{mit} \quad \left| \begin{array}{l} \sigma: t \mapsto -t \\ \sigma': t \mapsto -1 \end{array} \right. \\ \text{(ii)} f(t) &= -f(-t) = -(f \circ \sigma)(t) \quad \underline{\text{u.}} \end{aligned}$$

$$\text{(i)} \quad f' = (f \circ \sigma)' = (f' \circ \sigma) \cdot \overset{-1}{\sigma'} = -(f' \circ \sigma) \Rightarrow f' \text{ ungerade}$$

$$\text{(ii)} \quad f' = -(f \circ \sigma)' = (f' \circ \sigma) \Rightarrow f' \text{ gerade}$$

$$3 // \lim_{x \rightarrow \infty} x \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln \left(1 + \frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} \stackrel{L'H}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{-1}{x^2}}{-\frac{1}{x^2}} = 1$$

b. L'H nicht zielführend, da $(e^x - e^{-x})' = e^x + e^{-x}, \dots$

$$\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}} \rightarrow 1 \quad (x \rightarrow \infty)$$

$$c // \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x \sin x} \stackrel{L'H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\sin x + x \cos x}$$

$$\stackrel{L'H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\cos x + \cos x - x \sin x} = 0$$

$\begin{matrix} \xrightarrow{-2\pi} & \xrightarrow{-\pi} & \xrightarrow{0} & \xrightarrow{\pi} & \xrightarrow{2\pi} \end{matrix}$

$$d // \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \stackrel{L'H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{1} = 1 //$$

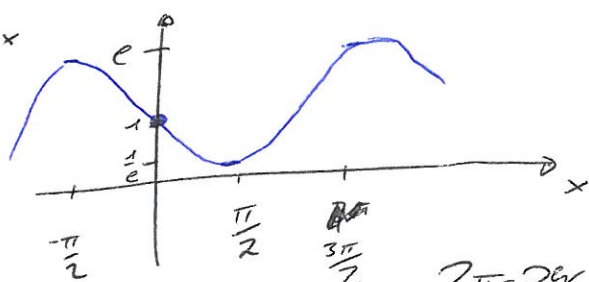
ABER Benutzt wurde
hierbei schon
das Wissen, was

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - 0}{x - 0} = \sin'(0) = 1$$

ist.

$$4 // \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)}{f(x) e^{\sin x}} = e^{-\sin x}$$

($x \rightarrow \infty$) GW ex nicht, da
 2π -periodisch



2π -per

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{2 \cos x}{x + \sin x \cos x + 2 \cos x} \rightarrow 0 \quad (x \rightarrow \infty)$$

$g'(x) = \dots$ hat in jeder Umgebung von ∞ Nullstellen,
was den Voraussetzungen des Satzes von
L'Hospital widerspricht.

5 $f: (-1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto \frac{x}{1+x}$

(a)

$$\square f'(x) = \frac{1+x-x}{(1+x)^2} = \frac{1}{(1+x)^2} \quad (*)$$

$$\square f''(x) = ((1+x)^{-2})' = -2(1+x)^{-3} \cdot 1 = -\frac{2}{(1+x)^3}$$

$$\square f'''(x) = (-2(1+x)^{-3})' = 6(1+x)^{-4} \cdot 1 = +\frac{6}{(1+x)^4}$$

Vermutung für $n \geq 1$: $f^{(n)}(x) = (-1)^{n+1} \frac{n!}{(1+x)^{n+1}}$

14 $n=1$ ✓ nach (*)

$$\begin{aligned} \underline{15} \quad f^{(n+1)}(x) &= \frac{d}{dx} f^{(n)}(x) = \frac{d}{dx} (-1)^{n+1} \frac{n!}{(1+x)^{n+1}} \\ &= n! (-1)^{n+1} (-n-1) (1+x)^{-n-2} (-1)^{n+1} \\ &= (-1)^{n+2} \frac{(n+1)!}{(1+x)^{n+2}} \quad \square \end{aligned}$$

(b) $T_2^2 f(x) = \sum_{i=0}^2 \frac{f^{(i)}(2)}{i!} (x-2)^i$

$$\begin{aligned} (a) \quad &= \frac{f(2)}{0!} (x-2)^0 + \frac{f'(2)}{1!} (x-2)^1 + \frac{f''(2)}{2!} (x-2)^2 \\ &= \frac{2}{3} \cdot 1 + \left(\frac{1!}{(1+2)^2} \right) (x-2)^1 + \left(\frac{-2!}{(1+2)^3} \right) (x-2)^2 \cdot \frac{1}{2!} \\ &= \frac{2}{3} + \frac{1}{9} (x-2) - \frac{1}{27} (x-2)^2 \end{aligned}$$

(c) $T_2^3 f(x) = \sum_{i=0}^3 \frac{f^{(i)}(2)}{i!} (x-2)^i$

~~$T_2^3 f(x) = \sum_{i=0}^3 \frac{f^{(i)}(2)}{i!} (x-2)^i$~~

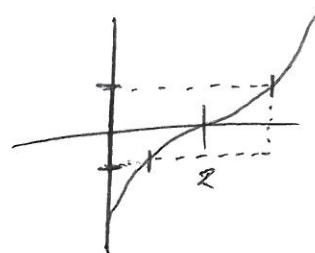
(c) Satz 22

$$\mathcal{R}_2^u f(x) = \frac{f^{(u+1)}(t)}{(u+1)!} (x-2)^{u+1} \quad \left| \begin{array}{l} x \in [1, 3] \\ t \in [1, x] \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow |\mathcal{R}_2^2 f(x)| = \left| \frac{f^{(3)}(t)}{3!} (x-2)^3 \right|$$

$$= \frac{1}{6} \left| \frac{3!}{(1+t)^4} \right| |(x-2)^3|$$

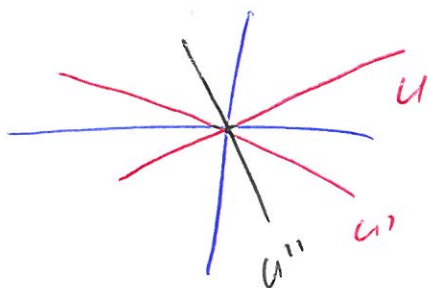
$$\leq \frac{1}{(1+1)^4} \cdot (3-2)^3 = \underline{\underline{\frac{1}{16}}}$$



LAG-Frage: U, U' Unterräume von V .

Aussage: $\forall U \exists! U'$ mit $U \cap U' = \{0\}$ und $U + U' = V$

Falsch! Gegenbsp. in $\mathbb{R}^2$:



sind Unterräume,
erfüllen die Vor.,
aber auch

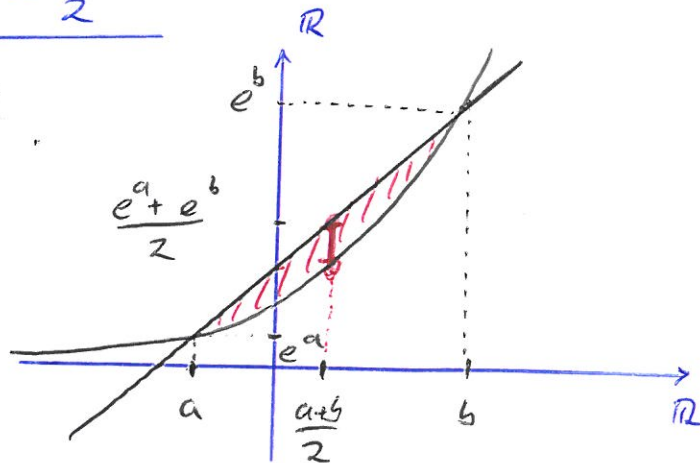
U'' erfüllt diese.

↳ zur Eindeutigkeit

① $a, b \in \mathbb{R}, a \neq b \Rightarrow \exp\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{e^a + e^b}{2}$

Beweis Wissen: $\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$

$$\begin{aligned} \exp\left(\frac{a+b}{2}\right) &= \exp\left(\frac{1}{2}(a+b)\right) \\ &= \sqrt{\exp(a+b)} \\ &= \sqrt{e^a \cdot e^b} \\ &\leq \frac{e^a + e^b}{2} \quad \square \end{aligned}$$



Deutung: Sekante liegt überhalb der "Kurve" $\{e^x : x \in \mathbb{R}\}$,

f heißt konvex, falls

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$$

$\forall \lambda \in [0,1]$

$\Rightarrow \exp$ ist konvex.

- ② $f: (0, \infty) \rightarrow (0, \infty): x \mapsto \sqrt{x}$. • Bestimme $T_1^1 f$ und $T_1^2 f$
 • Zeige $T_1^2 f(x) \leq f(x) \leq T_1^1 f(x)$, $x \geq 1$

Beweis Rep: $T_a^n u(x) = \sum_{k=0}^n \frac{u^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k$

$$\begin{aligned} f(x) = \sqrt{x} &= x^{\frac{1}{2}} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} \\ &\Rightarrow f''(x) = -\frac{1}{4} x^{-\frac{3}{2}} \\ &\Rightarrow f'''(x) = \frac{3}{8} x^{-\frac{5}{2}} \neq 0, \quad x \neq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet T_1^1 f(x) &= f(1) + f'(1)(x-1)^1 \\ &= 1 + \frac{1}{2}(x-1) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(x+1) \\ \bullet T_1^2 f(x) &= 1 + \frac{1}{2}(x-1) + \frac{1}{4!} \cdot \frac{3}{8} x^{-\frac{5}{2}} \cdot \frac{1}{2} (x-1)^2 \\ &= 1 + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{8}(x-1)^2 \end{aligned}$$

1. Ugl. $f(x) - T_1^2 f(x) \geq 0$
 $\Leftrightarrow R_1^2 f(x) \geq 0$
 $\Leftrightarrow \underbrace{\frac{f'''(\xi)}{3!}}_{\geq 0} \underbrace{(x-1)^3}_{\geq 0} \geq 0, \quad x \geq 1, \quad \xi \in [1, x]$
 w.A.

2. Ugl. zu zeigen: $\sqrt{x} \leq \frac{1}{2}(x+1)$
 $\Leftrightarrow 2\sqrt{x} \leq (x+1)$
 $\Leftrightarrow 4x \leq x^2 + 2x + 1$
 $\Leftrightarrow 0 \leq x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2 \quad \square$

(3) Ziel: $\frac{2}{\pi} = \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}}$

a) Zeige $\prod_{k=1}^n \cos\left(\frac{x}{2^k}\right) = \frac{\sin x}{2^n \sin(x/2^n)}$ f.a. $n \in \mathbb{N}$

IA $n=1$ $\cos\left(\frac{x}{2}\right) \stackrel{!}{=} \frac{\sin(x)}{2 \sin(x/2)}$

$(\Rightarrow) 2 \sin\left(\frac{x}{2}\right) \cos\left(\frac{x}{2}\right) = \sin x$

$(\Leftrightarrow) \sin\left(\frac{x}{2}\right) \cos\left(\frac{x}{2}\right) + \cos\left(\frac{x}{2}\right) \sin\left(\frac{x}{2}\right) = \sin x$ ✓

$[\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)]$ noch 9. Satz (V)

$\Rightarrow \sin(2x) = \cancel{\sin^2 x} 2 \sin(x) \cos(x)$ (*)

IS $(n \rightsquigarrow n+1)$ $\prod_{k=1}^{n+1} \cos\left(\frac{x}{2^k}\right) = \left(\prod_{k=1}^n \cos\left(\frac{x}{2^k}\right)\right) \cos\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right)$

$\stackrel{(IV)}{=} \frac{\cancel{\sin x}}{2^n \sin\left(\frac{x}{2^n}\right)} \cdot \cos\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right)$

Zeige $\Rightarrow \frac{\cancel{\sin x}}{2^{n+1} \sin\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right)}$

$(\Rightarrow) 2 \sin\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right) = \frac{\sin\left(\frac{x}{2^n}\right)}{\cos\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right)}$

$(\Rightarrow) 2 \sin\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right) \cos\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right) = \sin\left(\frac{x}{2^n}\right) = \sin\left(\frac{x}{2^{n+1}} + \frac{x}{2^{n+1}}\right)$
W.A. nach (*).

$\left(\sin\left(\frac{x}{2^n}\right) = \sin\left(2 \cdot \frac{x}{2 \cdot 2^n}\right) = \sin\left(\frac{x}{2 \cdot 2^n} + \frac{x}{2 \cdot 2^n}\right) \right)$
 $= \sin\left(\frac{x}{2^{n+1}} + \frac{x}{2^{n+1}}\right)$

Auss. gilt also f.a. $n \in \mathbb{N}$.

$$(b) \quad \prod_{k=1}^{\infty} \cos\left(\frac{x}{2^k}\right) \stackrel{!}{=} \frac{\sin x}{x}$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^n \cos\left(\frac{x}{2^k}\right) &\stackrel{(a)}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{2^n \sin(x/2^n)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (\sin x) \cdot \frac{1}{x} \cdot \frac{x}{2^n \sin(x/2^n)} \\ &= \frac{\sin x}{x} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(x/2^n)}{\sin(x/2^n)} \quad (\circledast) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left[\text{VÜ 10} \quad \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin y}{y} = 1 \quad \Rightarrow \quad \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{\sin y} = 1 \right] \\ (\circledast) \quad \frac{\sin x}{x} \left(\underbrace{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin(x/2^n)}{x/2^n}}_{=1} \right)^{-1} = \frac{\sin x}{x} \end{aligned}$$

(c) Aus (b) wissen wir

$$\frac{\sin x}{x} = \prod_{k=1}^{\infty} \cos\left(\frac{x}{2^k}\right) \quad (x \neq 0)$$

$$\stackrel{x=\frac{\pi}{2}}{=} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\frac{\pi}{2}} = \prod_{k=1}^{\infty} \cos\left(\frac{\pi}{2^{k+1}}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \cos\left(\frac{\pi}{8}\right) \dots \quad (**)$$

Betrachte

$$\begin{aligned} \cos x &= \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{x}{2}\right) \\ &= \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - \left(1 - \cos^2\left(\frac{x}{2}\right)\right) \\ &= 2\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - 1 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1 + \cos x}{2} = \frac{1}{2} + \frac{\cos x}{2} = \cos^2\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(\frac{x}{2}\right) = \sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}}$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sqrt{\frac{1 + \cos \pi}{2}} = \sqrt{\frac{1 - 1}{2}} = 0$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{\frac{1 + \cos \pi/2}{2}} = \sqrt{\frac{1}{2}}$$

$$\cos \frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{1 + \cos \pi/4}{2}} = \sqrt{\frac{1 + \frac{1}{\sqrt{2}}}{2}}$$

...

Def. rekursiv eine Folge $(r_n)_n$ durch

$$r_0 := 0, \quad r_n := \sqrt{\frac{1 + r_{n-1}}{2}}, \quad n \geq 1$$

Also gilt mit $(**) \frac{2}{\pi} = \frac{\sin(\frac{\pi}{2})}{\frac{\pi}{2}} = \prod_{k=1}^{\infty} r_k$ nach b). $\square$

