

Vortragsübung 1 – Relationen

*Es gibt keine dummen Fragen – nur Dumme, die nicht fragen.
Anke Maggauer-Kirsche (*1948)*

1.1. Betrachten Sie die folgenden Relationen $\sim$ auf den gegebenen Mengen M . Handelt es sich dabei um Äquivalenzrelationen? Falls ja, geben Sie die Äquivalenzklassen an.

(a) Sei $M = \mathbb{R}$ mit $x \sim y \iff |x| = |y|$,

(b) sei $M = \mathbb{R}$ mit $x \sim y \iff |x - y| < 1$,

(c) sei $M = \mathbb{Z}$ und $p \in \mathbb{Z}$ fest, sowie $x \sim y \iff \exists n \in \mathbb{Z} : x - y = np$

1.2. Auf $M = \mathbb{R}^2$ seien die folgenden Äquivalenzrelationen definiert. Skizzieren Sie exemplarisch einige Äquivalenzklassen in einem zweidimensionalen Koordinatensystem:

(a) $(x, y) \sim (\tilde{x}, \tilde{y}) \iff x = \tilde{x}$,

(b) $(x, y) \sim (\tilde{x}, \tilde{y}) \iff x + y = \tilde{x} + \tilde{y}$,

(c) $(x, y) \sim (\tilde{x}, \tilde{y}) \iff x^2 + y^2 = \tilde{x}^2 + \tilde{y}^2$,

(d) $(x, y) \sim (\tilde{x}, \tilde{y}) \iff \frac{\tilde{x}}{x} = \frac{\tilde{y}}{y}$ für $xy \neq 0$

1.3. Auf welche Ziffer endet die Zahl 2017^{2018} ?

Vortragsübung 2

*[...] Thus mathematics may be defined as the subject in which we never know what we are talking about, nor whether what we are saying is true.
(Bertrand Russell; 1872-1970)*

Aufgaben zu Quantoren

2.1. (a) Formulieren Sie die folgende Aussage mit Hilfe von Quantoren:

“Für ein $a \in \mathbb{R}$ und alle $\varepsilon > 0$ gibt es ein $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$, sodass die Ungleichung $|a_n - a| < \varepsilon$ für alle $n \geq N_\varepsilon$ gilt.”

(b) Negieren Sie die Aussage aus Teil (a).

Aufgaben zur Vertiefung der Begriffe injektiv, surjektiv und bijektiv

2.2. Untersuchen Sie die folgenden Abbildungen auf Injektivität, Surjektivität und Bijektivität:

(a) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto (x-1)^2$

(b) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \cos x$

(c) $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{x}$

(d) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$

Wie müsste man jeweils den Definitions- bzw. Wertebereich modifizieren, so dass f injektiv, surjektiv oder bijektiv wird. Geben Sie (nichttriviale) Beispiele an.

2.3. (a) Eine Abbildung $f : M \rightarrow N$ ist injektiv genau dann, wenn es eine Abbildung $\varphi : N \rightarrow M$ gibt, so dass

$$\varphi \circ f = \text{id}_M.$$

(b) Eine Abbildung $f : M \rightarrow N$ ist surjektiv genau dann, wenn es eine Abbildung $\varphi : N \rightarrow M$ gibt, so dass

$$f \circ \varphi = \text{id}_N.$$

2.4. Seien A, B, C Mengen und $f : A \rightarrow B, g : B \rightarrow C$ Abbildungen.

(a) Sind f und g injektiv (bzw. surjektiv), so auch ihre Komposition $g \circ f$.

(b) Ist $g \circ f$ bijektiv, so ist f injektiv und g surjektiv.

(c) Finden Sie eine nicht surjektive Abbildung $f : A \rightarrow B$ und eine nicht injektive Abbildung $g : B \rightarrow C$ mit zugehörigen Mengen A, B, C , so dass $g \circ f$ bijektiv ist.

Vortragsübung 3

*“Offensichtlich” ist das gefährlichste Wort in der Mathematik.
(Eric Temple Bell; 1883-1960)*

3.1. Seien $a, b > 0$ reelle Zahlen. Zeigen Sie, dass dann

$$\min\{a, b\} \leq \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} \leq \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \leq \max\{a, b\}$$

gilt. Welche der Ungleichungen gelten auch für $a, b \geq 0$ und wann gilt sogar Gleichheit?

3.2. Gelte für die reellen Zahlen $a, b, c > 0$ die Bedingung $abc = 1$. Nutzen Sie die aus den Übungen bekannte *Cauchyungleichung* (Aufgabe 13), um damit

$$(1+a)(1+b)(1+c) \geq 8$$

zu zeigen.

3.3. Sei $A \subset \mathbb{N}$ eine Menge mit $A > n$ für ein $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass dann auch $A \geq n+1$ gilt.

3.4. Für welche $n \in \mathbb{N}$ gilt $2^n > n^2 + n$? Beweisen Sie Ihre Vermutung.

3.4

Etwas Kombinatorik

Wir erwähnen noch einige elementare Sätze der Kombinatorik, die sämtlich mittels vollständiger Induktion bewiesen werden, beispielsweise Sätze über die Anzahl von Teilmengen, Permutationen, und Auswahlmengen. Ein wesentliches Ergebnis ist hierbei die allgemeine binomische Formel.

28 Satz Eine n -elementige Menge M besitzt genau 2^n verschiedene Teilmengen:

$$|\mathcal{P}(M)| = 2^{|M|}. \quad \times$$

⟨⟨⟨ Induktionsanfang: Dies gilt bereits für $n = 0$, also $M = \emptyset$, denn

$$|\emptyset| = 0, \quad |\mathcal{P}(\emptyset)| = |\{\emptyset\}| = 1 = 2^0.$$

Für $n = 1$ rechnet man dies genau so nach. *Induktionsschluss:* Der Satz gelte für jede n -elementige Menge M . Sei

$$M_+ = M \cup \{+\}$$

eine $n + 1$ -elementige Menge – wir nehmen also $+ \notin M$ an. Dann gilt

$$\mathcal{P}(M_+) = P_+ \cup P_-,$$

wobei P_+ alle Teilmengen von M_+ umfasst, die $+$ enthalten, und P_- die übrigen, die dieses Element nicht enthalten. Diese beiden Familien sind also disjunkt. Außerdem können wir P_- unmittelbar mit der Potenzmenge von M identifizieren. Dasselbe gilt für P_+ , denn jede Menge in P_+ entsteht durch Hinzunahme von $+$ zu einer Teilmenge von M . Daher gilt mit der Induktionsannahme

$$|\mathcal{P}(M_+)| = |P_+| + |P_-| = |\mathcal{P}(M)| + |\mathcal{P}(M)| = 2 \cdot 2^n = 2^{n+1}.$$

Damit sind wir fertig. ⟩⟩⟩

Als Nächstes betrachten wir die Anzahl aller möglichen Bijektionen einer n -elementigen Menge auf sich. Dies ist gleichbedeutend mit der Frage, wieviele Vertauschungen der Elemente eines n -Tupels es gibt.

29 Satz Es gibt genau $n!$ verschiedene Permutationen von n Objekten. $\times$

⟨⟨⟨ Induktionsanfang: Für ein einziges Objekt gibt es genau eine Möglichkeit der Anordnung, die Anzahl ist also $1 = 1!$.

Induktionsschluss: Haben wir $n + 1$ Objekte, so haben wir für die Wahl des ersten Elements der Anordnung genau $n + 1$ Möglichkeiten. Danach bleiben uns noch n Elemente für die weitere Anordnung. Wenden wir hierauf die Induktions-

annahme an, so erhalten wir als Gesamtzahl der Anordnungsmöglichkeiten

$$(n+1) \cdot n! = (n+1)! \quad \ggg$$

Schließlich fragen wir nach der Zahl aller möglichen m -elementigen Teilmengen einer n -elementigen Menge.

30 Satz Eine n -elementige Menge besitzt genau

$$\binom{n}{m} := \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

m -elementige Teilmengen, wobei $0 \leq m \leq n$. $\times$

⟨⟨⟨ Die Gesamtzahl aller m -Tupel, die sich aus $n \geq m$ Elementen bilden lassen, ist

$$n(n-1) \cdots (n-m+1) = \frac{n!}{(n-m)!},$$

denn sukzessive können wir aus $n, n-1, \dots, n-m+1$ Elementen für die nächste Komponente auswählen. Da es bei Mengen aber nicht auf die Reihenfolge der Elemente ankommt, müssen wir noch durch die Anzahl aller möglichen Permutationen von m Elementen dividieren. Somit ist die Anzahl aller m -elementigen Teilmengen gleich

$$\frac{1}{m!} \cdot \frac{n!}{(n-m)!} = \binom{n}{m}. \quad \ggg$$

► **Beispiel** Es gibt

$$\binom{49}{6} = 10\,068\,347\,520$$

Möglichkeiten, 6 aus 49 zu spielen. ◀

Die im vorangehenden Satz auftretenden Ausdrücke heißen *Binomialkoeffizienten* und treten in vielen Fragestellungen der Kombinatorik und Statistik auf. Für uns spielen sie vor allem eine Rolle in der binomischen Formel und der Produktregel der Differenziation. — Zunächst die elementarsten Eigenschaften dieser Koeffizienten.

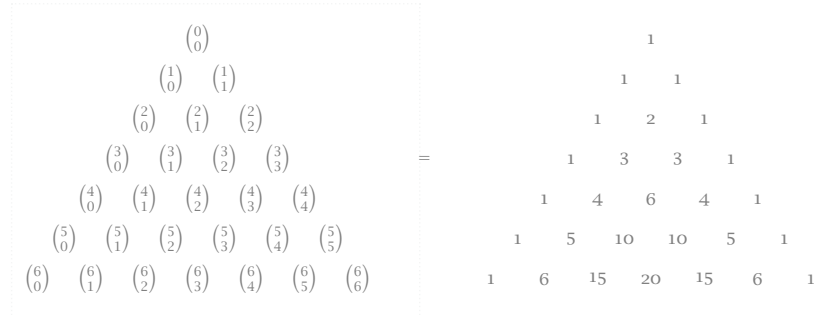
31 Satz Für alle $0 \leq m \leq n$ gilt

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1, \quad \binom{n}{m} = \binom{n}{n-m}$$

sowie für $1 \leq m \leq n$

$$\binom{n}{m-1} + \binom{n}{m} = \binom{n+1}{m}. \quad \times$$

Abb 3 Die ersten sieben Zeilen des Pascalschen Dreiecks



⟨⟨⟨ Die letzte Aussage ist eine direkte Rechnung:

$$\begin{aligned}
 \binom{n}{m-1} + \binom{n}{m} &= \frac{n!}{(m-1)!(n-m+1)!} + \frac{n!}{m!(n-m)!} \\
 &= \frac{n!}{(m-1)!(n-m)!} \left(\frac{1}{n-m+1} + \frac{1}{m} \right) \\
 &= \frac{n!}{(m-1)!(n-m)!} \cdot \frac{n+1}{m(n-m+1)} \\
 &= \frac{(n+1)!}{m!(n-m+1)!} = \binom{n+1}{m}.
 \end{aligned}$$

Alles andere ist noch einfacher. ⟩⟩⟩

Aus der letzten Formel ergibt sich, dass bei Anordnung der Binomialkoeffizienten im Pascalschen Dreieck wie in Abbildung 3 – mit $\binom{n}{m}$ an der m -ten Stelle in der n -ten Zeile, mit der Zählung beginnend bei Null – jedes Element die Summe der beiden direkt über ihm stehenden Elemente ist.

32 **Binomische Formel** Für alle reellen Zahlen a und b und alle $n \geq 0$ gilt

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k. \quad \times$$

⟨⟨⟨ **Induktionsanfang:** Für $n=0$ reduziert sich die Behauptung auf $1=1$, und für $n=1$ gilt

$$\sum_{k=0}^1 \binom{1}{k} a^{1-k} b^k = a^1 b^0 + a^0 b^1 = a + b = (a+b)^1.$$

Dies ist also korrekt.

Induktionsschluss: Nehmen wir die Gültigkeit der Formel für irgendein $n \geq 1$ an, so folgt

$$\begin{aligned}(a+b)^{n+1} &= (a+b)(a+b)^n = (a+b) \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k+1} b^k + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^{k+1}.\end{aligned}$$

Nach Umnummerierung $k+1 \rightarrow k$ wird

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^{k+1} = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k-1} a^{n-k+1} b^k + a^0 b^{n+1},$$

während

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k+1} b^k = a^{n+1} b^0 + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} a^{n-k+1} b^k.$$

Mit ₃₁

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$$

erhalten wir also

$$\begin{aligned}(a+b)^{n+1} &= a^{n+1} b^0 + \sum_{k=1}^n \binom{n+1}{k} a^{n+1-k} b^k + a^0 b^{n+1} \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^{n+1-k} b^k,\end{aligned}$$

was der Behauptung für $n+1$ entspricht. >>>>

Mit den binomischen Formeln für $(1+1)^n = 2^n$ und $(1-1)^n = 0$ erhalten wir zum Beispiel folgendes

33 Korollar Für alle $n \geq 1$ gilt

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n, \quad \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} = 0. \quad \times$$

Analysis I — Vortragsübung 5

Mathematics consists in proving the most obvious thing in the least obvious way.
(G. Pólya; 1887-1985)

- 5.1.** (a) Formulieren Sie ein ε - N -Kriterium dafür, dass eine reelle Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ nicht gegen eine Zahl $a \in \mathbb{R}$ konvergiert.
(b) Zeigen Sie, dass die Folge $(1/n)_{n \in \mathbb{N}}$ nicht gegen eine Zahl $a \neq 0$ konvergiert.

- 5.2.** Die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit

$$a_n = \frac{n + \cos n}{n^2}$$

konvergiert gegen 0. Finden Sie ein $N \in \mathbb{N}$, so dass $|a_n| \leq 10^{-6}$ für alle $n \geq N$ ist.

- 5.3.** Berechnen Sie folgende Grenzwerte falls diese existieren:

$$\begin{array}{lll} \text{(a)} \quad a_n = \frac{n^2 - n + 2}{n^2 - 1} & \text{(b)} \quad a_n = \frac{2^n - 3^n}{2^n + 3^n} & \text{(c)} \quad a_n = \frac{1 + 2 + \dots + n}{n^2} \\ \text{(d)} \quad a_n = \sqrt{n}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) & \text{(e)} \quad a_n = \frac{n}{\sqrt{n+1}} - \sqrt{n} & \text{(f)} \quad a_n = \sqrt{n + \sqrt{n}} - \sqrt{n - \sqrt{n}} \end{array}$$

- 5.4.** Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine konvergente Folge mit Grenzwert $a \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass dann auch die Folgen $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit

$$b_n = \inf \{a_k : k \geq n\}, \quad c_n = \sup \{a_k : k \geq n\}$$

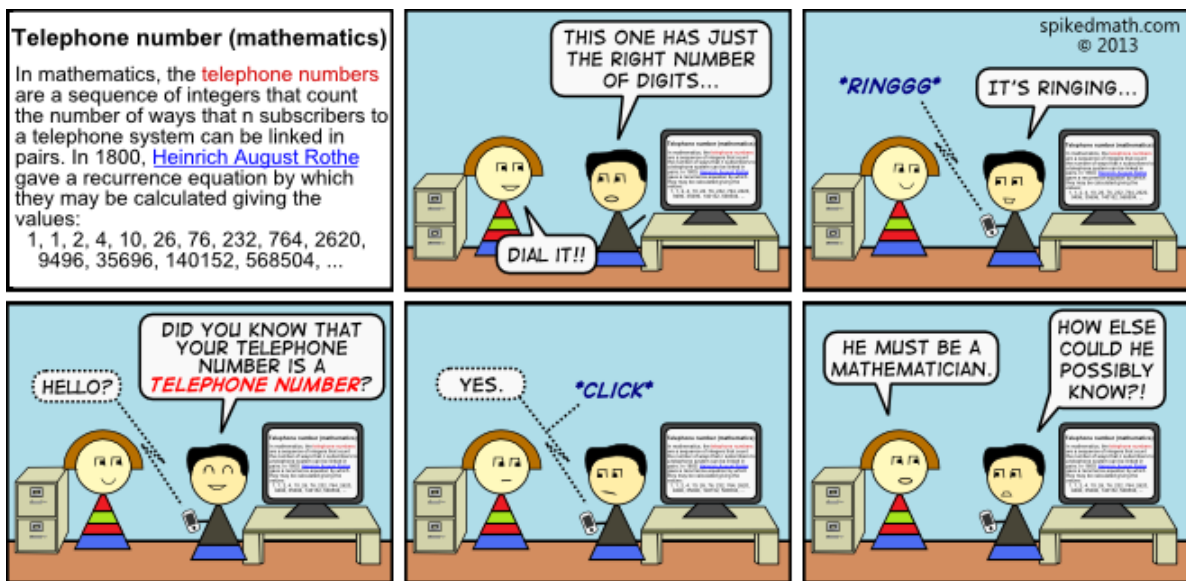
gegen a konvergieren.

- 5.5.** (a) Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine konvergente Folge mit Grenzwert $a \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass dann auch die Folge $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit

$$s_n = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k$$

gegen a konvergiert.

- (b) Lässt sich aus der Konvergenz von $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ auch auf die Konvergenz von $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ schließen?



© <http://spikedmath.com/545>

Analysis I — Vortragsübung 6

*Die Mathematik als Fachgebiet ist so ernst, dass man keine Gelegenheit versäumen sollte, dieses Fachgebiet unterhaltsamer zu gestalten.
(Blaise Pascal, 1623-1662)*

6.1. Wo liegt hier der Fehler?

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad 1 &= \lim_{n \rightarrow \infty} 1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(n \cdot \frac{1}{n} \right) = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} n \right) \cdot \underbrace{\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \right)}_{=0} = 0 \\ \text{(b)} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n &= \left(\lim_{n \rightarrow \infty} 1 + \frac{1}{n} \right)^n = (1 + 0)^n = 1 \end{aligned}$$

6.2. Beweisen oder widerlegen Sie folgende Aussagen:

- (a) Ist $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergent und $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ beschränkt, so konvergiert die Folge $(a_n \cdot b_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
- (b) Ist $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Nullfolge und $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ beschränkt, so ist $(a_n \cdot b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Nullfolge.
- (c) Seien $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Folgen derart, dass $(a_n \cdot b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert. Dann konvergiert $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ oder $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
- (d) Seien $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Folgen derart, dass $(a_n \cdot b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ divergiert. Dann divergiert $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ oder $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

6.3. Zeigen Sie, dass die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit

$$a_n := \sqrt[n]{1 + \sqrt{1 + \cdots + \sqrt{1 + \sqrt{1}}}}$$

n Wurzeln

in $\mathbb{R}$ konvergiert und berechnen Sie den Grenzwert $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.
(Hinweis: Drücken Sie a_{n+1} durch a_n aus.)

6.4. Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen mit der Eigenschaft

$$|a_{n+1} - a_n| \leq \gamma |a_n - a_{n-1}|$$

für alle $n \geq 2$ und einem $\gamma \in [0, 1[$. Zeigen Sie, dass dann

$$|a_{n+k} - a_n| \leq \frac{\gamma^{n-1}}{1 - \gamma} |a_2 - a_1|$$

für alle $k \in \mathbb{N}$ und $n \geq 2$ erfüllt ist und damit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in $\mathbb{R}$ ist.

6.5. (a) Zeigen Sie, dass der Kettenbruch

$$1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\ddots}}}$$

in $\mathbb{R}$ konvergiert.

(b) Berechnen Sie den Grenzwert des Kettenbruchs aus Teilaufgabe **(a)**.

6.6. Formelsammlung

(a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^k}{a^n} = 0, a > 0, k \in \mathbb{N}$

(b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n!} = 0, a > 1, k \in \mathbb{N}$

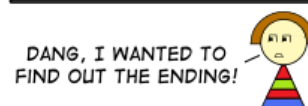
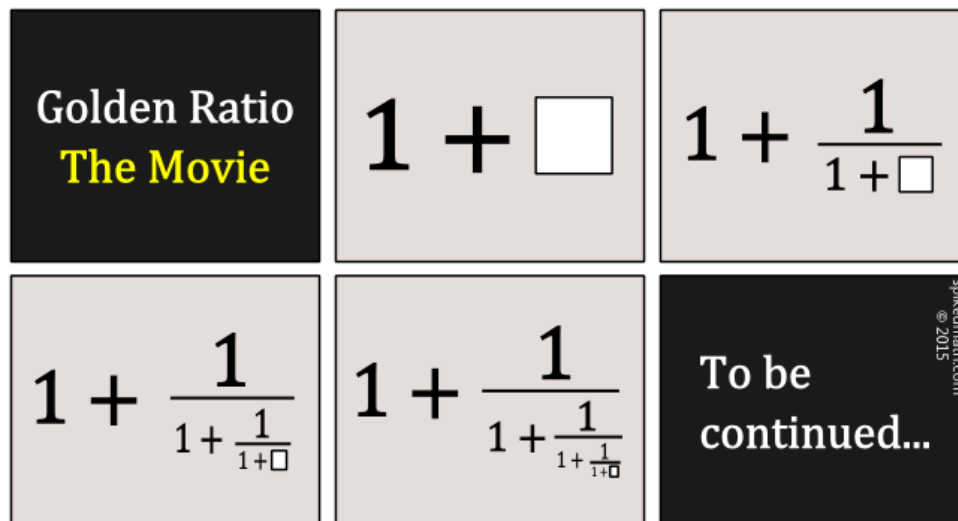
(c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1, a > 0$

(d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log_a n}{n^k} = 0, a > 1, k \in \mathbb{N}$

(e) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1,$

(f) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} = 0.$

Prägen Sie sich diese Grenzwerte gut ein, Sie werden sie noch oft benötigen.



© <http://spikemath.com/572>

Analysis I — Vortragsübung 7

*Wahrlich es ist nicht das Wissen, sondern das Lernen,
nicht das Besitzen, sondern das Erwerben,
nicht das Da-Seyn, sondern das Hinkommen,
was den grössten Genuss gewährt.
(Carl Friedrich Gauß, 1777-1855)*

7.1. Limes superior und Limes inferior Jeder reellen Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ wird durch

$$\hat{a}_n := \sup \{a_m : m \geq n\}, \quad \check{a}_n := \inf \{a_m : m \geq n\}$$

eine monoton fallende Folge $(\hat{a}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und eine monoton steigende Folge $(\check{a}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ zugeordnet. Deren eigentliche oder uneigentliche Grenzwerte,

$$a^* = \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n := \lim_{n \rightarrow \infty} \hat{a}_n, \quad a_* = \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n := \lim_{n \rightarrow \infty} \check{a}_n$$

werden der *Limes superior* respektive der *Limes inferior* der Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ genannt.

(a) Es ist

$$a^* = \inf_n \sup_{m \geq n} a_m, \quad a_* = \sup_n \inf_{m \geq n} a_m.$$

(b) Es gilt $a_* \leq a^*$ und beide Punkte sind Häufungswerte der Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

(c) Bezeichne H die Menge aller Häufungswerte von $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $\overline{\mathbb{R}}$, so ist

$$a^* = \sup H, \quad a_* = \inf H.$$

Somit ist a^* der größte und a_* der kleinste Häufungswert der Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $\overline{\mathbb{R}}$.

(d) Ist $-\infty < a^* < \infty$, so existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N \geq 1$, so dass

$$a_n < a^* + \varepsilon, \quad n \geq N.$$

Ist $a^* = -\infty$, so existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N \geq 1$, so dass

$$a_n < -1/\varepsilon, \quad n \geq N.$$

Entsprechendes gilt für a_* .

(e) Es ist $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eigentlich oder uneigentlich konvergent genau dann, wenn $a_* = a^*$. In diesem Fall ist

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n.$$

7.2. (a) Vergewissern Sie sich, dass für $z = x + iy \in \mathbb{C}$ durch

$$\|z\|_1 := |x| + |y|, \quad \|z\|_2 = \sqrt{x^2 + y^2}$$

zwei Normen auf $\mathbb{C}$ gegeben sind und zeigen Sie, dass

$$\|z\|_2 \leq \|z\|_1 \leq \sqrt{2} \|z\|_2 \quad (1)$$

für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt.

- (b) Hat man für zwei gegebene Normen eine Ungleichung wie in (1) gefunden, so nennt man die beiden Normen *äquivalent*. Damit meint man vor allem, dass der durch die beiden Normen induzierte Konvergenzbegriff derselbe ist: Sei eine komplexe Folge $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegeben, so zeigen Sie, dass Sie genau dann im normierten Raum $(\mathbb{C}, \|\cdot\|_1)$ konvergiert, wenn Sie im normierten Raum $(\mathbb{C}, \|\cdot\|_2)$ konvergiert.
- (c) Zeigen Sie, dass eine komplexe Folge $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ genau dann in $\mathbb{C}$ konvergiert, wenn die beiden reellen Folgen $(\operatorname{Re} z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(\operatorname{Im} z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$ konvergieren.
- (d) Sei $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge komplexer Zahlen und $z \in \mathbb{C}$. Zeigen Sie, dass

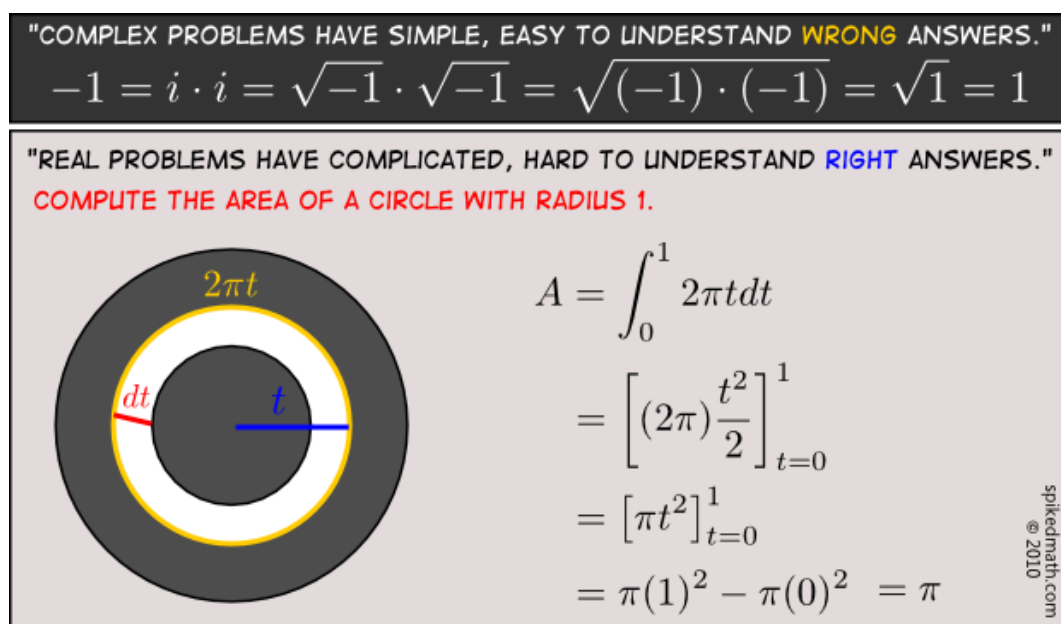
$$z = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n \quad \Leftrightarrow \quad \bar{z} = \lim_{n \rightarrow \infty} \bar{z}_n$$

(e) Bestimmen Sie die Häufungswerte der komplexen Folge $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit

$$(i) \quad z_n = (-1)^n + \frac{ni}{n+1} \quad (ii) \quad z_n = \sqrt[n]{n^2} i^n$$

$$(iii) \quad z_n = \left(\frac{1+i}{4}\right)^n \quad (iv) \quad z_n = \left(\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)^n$$

Welche der Folgen sind konvergent?



© <http://spikedmath.com/306>

Vortragsübung 8

*Das Ergebnis habe ich schon, jetzt brauche ich nur noch den Weg, der zu ihm führt.
(Carl Friedrich Gauß; 1777-1855)*

8.1. (a) Welche der folgenden Reihen sind konvergent? Welche konvergieren sogar absolut?

$$\begin{array}{lll} \text{(i)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} & \text{(ii)} \sum_{n=1}^{\infty} \sin n & \text{(iii)} \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}} \\ \text{(iv)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n^2+1)}} & \text{(v)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} & \text{(vi)} \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n!} \end{array}$$

(b) Berechnen Sie die Werte der Reihen

$$\text{(i)} \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-5n}, \quad \text{(ii)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 - 1}.$$

8.2. Für $n \in \mathbb{N}$ sei S_n (die n -te Partialsumme der harmonischen Reihe) gegeben durch

$$S_n := \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}.$$

Streichen wir in S_n jeden Summanden $1/k$, sobald in k die Ziffer $i \in \{0, 1, \dots, 9\}$ vorkommt, so bezeichnen wir die dabei entstehende Reihe als Σ_i , also z.B. für $i = 3$

$$\Sigma_3 = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + 0 + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{12} + 0 + \frac{1}{14} + \dots + \frac{1}{29} + 0 + \frac{1}{40} + \dots$$

Für welche $i \in \{0, 1, \dots, 9\}$ konvergiert die Reihe Σ_i , für welche divergiert sie?

8.3. **Absolute Konvergenz.** Seien (a_n) und (b_n) Folgen reeller Zahlen.

- (a) Sei $\sum_n a_n$ absolut konvergent und $\sum_n b_n$ konvergent. Man zeige, dass $\sum_n a_n b_n$ absolut konvergiert.
- (b) Geben Sie zwei Folgen (a_n) und (b_n) an, so dass $\sum_n a_n$ und $\sum_n b_n$ konvergieren aber $\sum_n a_n b_n$ divergiert.

8.4. Sei S_n definiert wie in Aufgabe 8.2. Zeigen Sie, dass $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{S_n}{2^n}$ konvergiert, und dass

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{S_n}{2^n}$$

ist.

8.5. Zur Zetafunktion. Verwenden Sie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90},$$

um die Grenzwerte der Reihen

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^s}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^s}$$

für $s = 2$ und $s = 4$ zu bestimmen.

Hinweis: Nutzen Sie geschickt die für $s > 1$ konvergente Zetafunktion $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$.

Vortragsübung am 26.01.2017

*Die Mathematik ist mehr ein Tun als eine Lehre.
(L. E. J. Brouwer; 1881-1966)*

9.1. Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right), & \text{falls } x \neq 0, \\ 0, & \text{falls } x = 0. \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass f differenzierbar aber $f \notin C^1(\mathbb{R})$ ist.

9.2. Eine Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ heißt gerade (bzw. ungerade), falls

$$f(t) = f(-t) \quad \text{bzw.} \quad f(t) = -f(-t)$$

auf $\mathbb{R}$ gilt. Beweisen oder widerlegen Sie: Ist f differenzierbar und gerade (bzw. ungerade), so ist f' ungerade (bzw. gerade).

9.3. Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte. Ist die Anwendung der Regel von l'Hospital sinnvoll?

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} \lim_{x \rightarrow \infty} x \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right) & \text{(b)} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \\ \text{(c)} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x}\right) & \text{(d)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \end{array}$$

9.4. Seien die Funktionen $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) = x + \sin x \cos x, \quad g(x) = f(x)e^{\sin x}.$$

Zeigen Sie, dass $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)/g(x)$ nicht existiert, wohl aber

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = 0$$

gilt. Wieso ist die Regel von l'Hospital nicht anwendbar?

9.5. Betrachte $f : (-1, \infty) \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \frac{x}{1+x}$.

- (a) Bestimmen Sie $f^{(n)} : (-1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ für beliebiges $n \in \mathbb{N}$,
- (b) berechnen Sie das Taylor-Polynom $T_2^2 f$
- (c) und schätzen Sie sein Lagrange-Restglied auf dem Intervall $[1, 3]$ ab.

Vortragsübung am 02.02.2018

*Ein Drittel? Nee, ich will mindestens ein Viertel.
(Horst Szymaniak, Fußballspieler; 1934 - 2009)*

11.1. Beweisen Sie für reelle $a \neq b$ die Ungleichung

$$\exp\left(\frac{a+b}{2}\right) < \frac{e^a + e^b}{2}$$

und deuten Sie diese geometrisch. Welche Eigenschaft von $\exp$ liefert sie?

11.2. Sei $f : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty) : x \mapsto \sqrt{x}$. Bestimmen Sie die Taylorpolynome $T_1^1 f$ und $T_1^2 f$ ersten und zweiten Grades mit Entwicklungspunkt $a = 1$ und beweisen Sie, dass für alle $x \geq 1$

$$T_1^2 f(x) \leq f(x) \leq T_1^1 f(x)$$

gilt.

11.3. Ziel dieser Aufgabe ist die Herleitung der *Vietaschen Produktdarstellung*¹

$$\frac{2}{\pi} = \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}} \cdots \quad (1)$$

aus dem Jahr 1539. Hierzu gehen wir in drei Schritten vor.

(a) Sei $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ die Identität

$$\left(\cos \frac{x}{2}\right) \left(\cos \frac{x}{4}\right) \cdots \left(\cos \frac{x}{2^n}\right) = \frac{\sin x}{2^n \sin(x/2^n)}$$

gilt.

(b) Beweisen Sie

$$\prod_{k=1}^{\infty} \cos \frac{x}{2^k} := \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^n \cos \frac{x}{2^k} = \frac{\sin x}{x}$$

für $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

(c) Leiten Sie damit die Darstellung (1) her.

¹Franciscus Vieta, eigentlich Francois Viète; 1540-1603, französischer Advokat und Mathematiker