

Weihnachtsblatt — Lösungshinweise

Nachfolgend finden Sie Lösungshinweise zu den Aufgaben des Weihnachtsblattes. Dies sind keineswegs fertig ausgearbeitete Lösungen, insbesondere fehlen Zwischenschritte und ausführliche Begründungen.

Lösung 1.

- (a) Siehe Skript Kapitel 1 (Grundlagen), Abschnitt 1.3.
- (b) “ $\simeq$ ” ist keine Äquivalenzrelation da nicht reflexiv. “ $\approx$ ” ist ebenfalls nicht reflexiv, also keine Äquivalenzrelation. Modifiziert man “ $\approx$ ” allerdings etwas und betrachtet

$$(n, m) \sim (\tilde{n}, \tilde{m}) \quad \Leftrightarrow \quad n - m = \tilde{n} - \tilde{m}$$

so definiert dies eine Äquivalenzrelation.

Lösung 2. $\sup Q = 2$, $\inf Q = 0$.

Lösung 3. Beweis durch vollständige Induktion. Im Induktionsschluss benötigt man, dass

$$\prod_{k=1}^{n+1} \left(1 + \frac{2}{k}\right) \stackrel{\text{i.V.}}{=} \frac{(n+1)(n+2)}{2} \left(1 + \frac{2}{n+1}\right) = \frac{(n+1)(n+2)}{2} \frac{n+3}{n+1} = \frac{(n+2)(n+3)}{2}.$$

Lösung 4. Achtung, das Majorantenkriterium hilft bei dieser Aufgabe nicht, da nicht vorausgesetzt ist, dass $a_n \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

- (a) Da die Folge mit $(n+1)/n$ monoton fällt und konvergiert, konvergiert die Reihe

$$\sum \frac{n+1}{n} a_n$$

nach dem Abelschen Kriterium (Aufgabe 53 von Blatt 9).

- (b) Die Folge $\sqrt[n]{n}$ ist ab $n = 4$ monoton fallend (man zeigt dazu, dass $n^{n+1} \geq (n+1)^n$ für $n \geq 4$ gilt) und konvergiert ebenfalls. Damit konvergiert

$$\sum \sqrt[n]{n} a_n$$

ebenfalls nach dem Abelschen Kriterium.

- (c) Die Reihe $\sum a_n |a_n|$ konvergiert nicht notwendiger Weise, Gegenbeispiele sind etwas kompliziert. Beispielsweise kann man die Folge mit

$$a_{3n+k} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{n}} & \text{für } k = 0, 1 \\ -\frac{2}{\sqrt{n}} & \text{für } k = 2 \end{cases}$$

verwenden. In diesem Fall konvergiert $\sum a_n$, wegen

$$a_{3n}|a_{3n}| + a_{3n+1}|a_{3n+1}| + a_{3n+2}|a_{3n+2}| = -\frac{2}{n}$$

enthält die Folge der Partialsummen von $\sum a_n |a_n|$ aber eine divergente Teilfolge.

- (d) Die Reihe $\sum a_n/(1 + |a_n|)$ konvergiert ebenfalls nicht notwendig. Als Gegenbeispiel kann man die gleiche Folge wie in Teilaufgabe (c) wählen. Wegen

$$\frac{a_{3n}}{1 + |a_{3n}|} + \frac{a_{3n+1}}{1 + |a_{3n+1}|} + \frac{a_{3n+2}}{1 + |a_{3n+2}|} = \frac{2}{(\sqrt{n} + 1)(\sqrt{n} + 2)} \geq \frac{C}{n}$$

für eine Konstante $C > 0$ enthält die Folge der Partialsummen von $\sum a_n/(1 + |a_n|)$ wieder eine divergente Teilfolge.

Lösung 5. Die Abbildung $[1, \infty) \rightarrow (0, 1]$, $x \mapsto 1/x$ ist eine Bijektion.

Lösung 6. Die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist monoton steigend (Beweis z.B. durch Induktion) und nach oben durch 2 beschränkt (Beweis z.B. ebenfalls durch Induktion).

Sei $a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$, dann erhält man a aus der Gleichung

$$a = 1 + \frac{a}{2}.$$

Lösung 7.

- (a) Wegen

$$\left(\frac{1+i}{2}\right)^n \rightarrow 0 \quad \text{für } n \rightarrow \infty$$

ist 0 der einzige Häufungspunkt.

- (b) Wegen

$$\frac{in}{n+1} \rightarrow i \quad \text{für } n \rightarrow \infty$$

ist i der einzige Häufungspunkt.

- (c) Wegen

$$\left(-\frac{2}{3}\right)^{-n} \frac{(-2)^n (n+1)}{n (-1)^n 3^n} = \frac{n+1}{n (-1)^n} = (-1)^n \frac{n+1}{n}$$

gibt es die beiden Häufungspunkte ± 1 .

Lösung 8. (a) falsch, (b) wahr, (c) falsch, (d) falsch (lt. Vorlesung ist $(a, a) = \emptyset$ für $a \in \mathbb{R}$), (e) falsch.

Lösung 9. (a) falsch, (b) falsch, (c) wahr, (d) falsch, (e) wahr.

Lösung 10. Die Folge mit $a_n + 1/a_n$ ist keine Nullfolge, damit ist

$$a_n + \frac{1}{a_n} \geq r > 0$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ und ein $r > 0$. Damit ist $b_n \geq nr$ bzw. $0 \leq 1/b_n \leq 1/(nr)$.

Lösung 11. (a) falsch, (b) wahr (korrigiert), (c) falsch, (d) falsch, (e) wahr.

Lösung 12. Ja.

Lösung 13. Zeige: Ist n ungerade, so gibt es keine Bijektion $\pi : A_n \rightarrow A_n$ für die $\pi_k = k$ für alle $k \in A_n$ ungerade ist. Hierbei hilft es sich folgendes zu überlegen:

- Wie viele gerade/ungerade Zahlen liegen in A_n ?
- Was kann man über die Bilder gerader/ungerader Zahlen unter π sagen?

Lösung 14. Unterscheiden Sie die beiden Fälle $f(a) \geq f(b)$, dann mit Zwischenwertsatz.

Lösung 15.

- (a) Die Monotonie von f ist einfach nachzurechnen: Sei $t < s$, dann

$$q_n \leq t \quad \Rightarrow \quad q_n \leq s$$

und $\sum_{n: q_n \leq s} a_n$ enthält mehr positive Summanden als $\sum_{n: q_n \leq t} a_n$, d.h. es ist

$$f(t) < f(s)$$

und f somit monoton steigend.

- (b) Wir zeigen, dass f in allen Punkten $t \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ stetig ist. Für ein gegebenes $\varepsilon > 0$ gibt es wegen der Konvergenz von $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ein $N \in \mathbb{N}$, so dass

$$\sum_{n=N}^{\infty} a_n < \varepsilon.$$

Wähle nun $\delta > 0$ so klein, dass

$$q_n \notin U_\delta(t)$$

für alle $n = 1, \dots, N$ erfüllt ist. Dies geht, da wir nur fordern, dass endlich viele Ausnahmeelemente nicht in $U_\delta(t)$ enthalten sein dürfen. Mit dieser Wahl ist

$$|f(t) - f(s)| \leq \sum_{n=N}^{\infty} a_n < \varepsilon$$

für alle $s \in U_\delta(t)$, d.h. f ist stetig in $t \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

- (c) Wir zeigen nun, dass f unstetig in allen Punkten $t \in \mathbb{Q}$ ist. Hierfür wollen wir den linksseitigen Limes $\lim_{s \nearrow t} f(s)$ berechnen. Sei $t = q_k$ mit $k \in \mathbb{N}$ und $s < t$, dann ist

$$f(s) < f(t) - a_k$$

und nach Übergang zum linksseitigen Grenzwert

$$\lim_{s \nearrow t} f(s) \leq f(t) - a_k < f(t).$$

Dies zeigt bereits, dass f in $t = q_k$ nicht stetig sein kann. Genauer gilt sogar, dass

$$\lim_{s \nearrow t} f(s) = f(t) - a_k,$$

da es im Fall $\lim_{s \nearrow t} f(s) = f(t) - a_k$ ein $q_n \in \mathbb{Q} \cap (s, t)$ für alle $s < t$ geben müsste. Da $\bigcap_{s < t} (s, t)$ aber leer ist, kann dieser Fall nicht auftreten. Die Sprunghöhe von f bei $t = q_k$ beträgt also gerade a_k .

Lösung 16. Für $n = 1$ ist die Aussage trivial mit $x = 0$ erfüllt. Für $n > 2$ betrachten wir

$$h_n : I_n \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x) - f(x + 1/n)$$

und wollen zeigen, dass h_n mindestens eine Nullstelle besitzt. Angenommen h_n hat keine Nullstelle, so nehmen wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit an, dass $h(x) > 0$ für alle $x \in I_n$ ist. Es folgt

$$0 = f(0) \stackrel{\text{Def.}}{=} h(0) + f(1/n) > f(1/n) \stackrel{\text{Def.}}{=} h(1/n) + f(2/n) > f(2/n) = \cdots > f(n/n) = f(1) = 0,$$

was einen Widerspruch darstellt.

Lösung 17. Hässliches Rungerechnese: Seien für $n \geq 0$ die Kantenlängen der *neuen* Dreiecke mit L_n beschrieben. Wir starten o.B.d.A. mit $L_0 = 1$, d.h. für den Umfang U_0 nach 0 Iterationen gilt $U_0 = 3$ und analog für den Flächeninhalt $A_0 = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 1 = \frac{\sqrt{3}}{4}$. Für $n \geq 1$ erhält man dann nach n Iterationen $3 \cdot 4^{n-1}$ neue, gleichseitige Dreiecke der Kantenlänge $L_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n$. Diese haben jeweils einen Flächeninhalt von

$$a_n = \frac{\sqrt{3}}{4} L_n^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} \left(\frac{1}{9}\right)^n,$$

woraus sich dann mittels der geometrischen Summe die Gesamtfläche von

$$A := A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} 3 \cdot 4^{n-1} a_n = \frac{2}{5} \sqrt{3}$$

ergibt. Da sich der Umfang in jedem Iterationsschritt um den Faktor $4/3$ vergrößert, ergibt sich nach n Iterationen ein Umfang (Länge der Randkurve) von

$$U_n = 3 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^n$$

und somit $U_n \rightarrow +\infty$ für $n \rightarrow \infty$.