

Voteraufgaben

- 1 Ist $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine Regelfunktion und $\phi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, so ist auch $\phi \circ f$ eine Regelfunktion.
- 2 Sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Dann existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$, so dass

$$\left| \int_a^b f - \sum_{k=1}^n f(t_k)(t_k - t_{k-1}) \right| < \varepsilon$$

für jede Zerlegung $Z = (t_0, \dots, t_n)$ mit *Feinheit* $\sup_{1 \leq k \leq n} (t_k - t_{k-1}) < \delta$. Hinweis: Man verwende die gleichmäßige Stetigkeit von f .

Schriftaufgaben

- 3 Ist

$$f: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(t) = \begin{cases} \frac{1}{n+2}, & \frac{1}{n+1} < t \leq \frac{1}{n}, \\ \frac{1}{n+2}, & -\frac{1}{n} < t \leq -\frac{1}{n+1}, \\ 0, & t = 0, \end{cases} \quad n \geq 1$$

eine Treppenfunktion, eine Regelfunktion, oder keins von beidem?

- 4 Sei $f \in R_a^b$. Dann existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\varphi \in C([a, b])$ mit

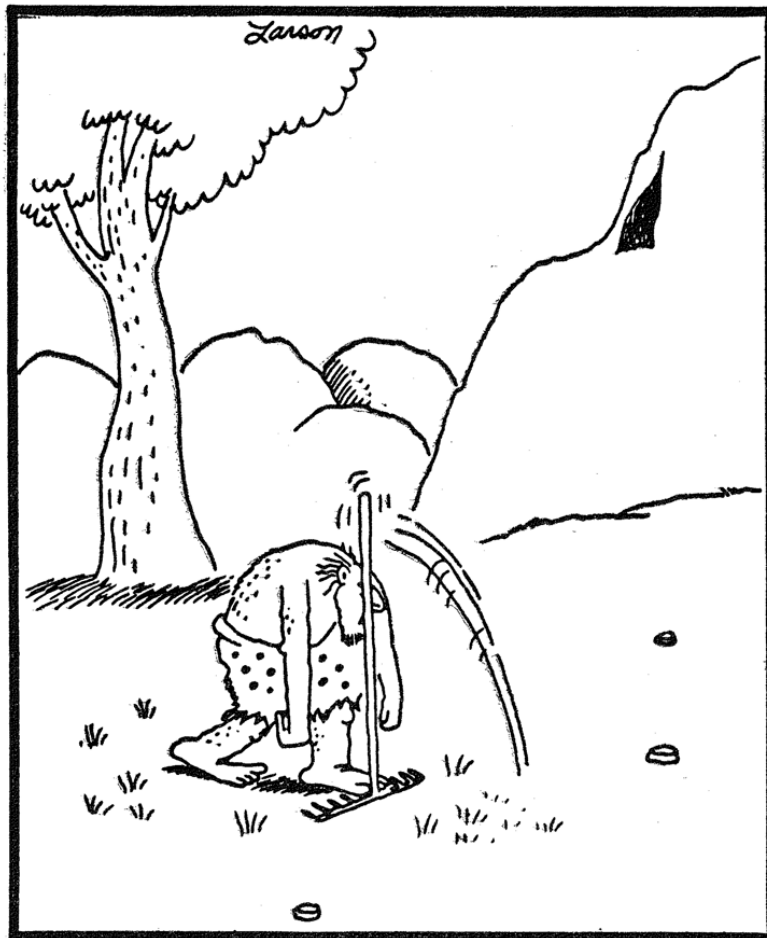
$$\int_a^b |f - \varphi| < \varepsilon.$$

- 5 Jede Treppenfunktion ist der punktweise Limes stetiger Funktionen. Warum kann die Konvergenz im Allgemeinen nicht gleichmäßig sein?

Zusatzaufgabe

- 6 Es sei f eine Regelfunktion auf $[a-1, b+1]$ und $\tau_h f := f(\cdot + h)$. Dann existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta \in (0, 1)$, so dass

$$\int_a^b |\tau_h f - f| < \varepsilon, \quad |h| < \delta.$$



The discovery of tools

Votieraufgaben

- 7 Bestimmen sie die folgenden Integrale.

$$\begin{array}{llll} a. \int_0^1 t^2 e^{-t} dt & b. \int_0^1 t e^{-t^2} dt & c. \int_0^1 t \sqrt{1+t^2} dt & d. \int_0^1 \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} dt \\ e. \int_{-\pi}^{\pi} e^{-t} \cos t dt & f. \int_0^{\pi} \sin nt \sin mt dt, \quad n, m \in \mathbb{Z} \end{array}$$

- 8 Das Integral $\int_1^{\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ konvergiert, aber nicht absolut.

- 9 Welche der folgenden uneigentlichen Integrale konvergieren für welche Parameter? Dabei ist $n \in \mathbb{N}$ und $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$a. \int_0^{\infty} t^n e^{t^2} dt \quad b. \int_0^{\infty} \frac{\sin t}{t^{\alpha}} dt \quad c. \int_0^{\infty} \frac{t^{\alpha-1}}{1+t} dt$$

Schriftaufgaben

- 10 Bestimmen sie die folgenden Integrale.

$$\begin{array}{lll} a. \int_0^{\infty} t^2 e^{-t} dt & b. \int_0^{\infty} \frac{dt}{1+t^3} & c. \int_0^{\infty} e^{-t} \sin t dt \\ d. \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^3 t dt & e. \int_0^{\pi} e^{-\cos t} \sin 2t dt \end{array}$$

- 11 Für alle $m, n \in \mathbb{N}$ zeige man

$$\int_0^1 t^m \log^n t dt = (-1)^n \frac{n!}{(m+1)^{n+1}}.$$

Hieraus folgt

$$\int_0^1 t^t dt = \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n^n}.$$

Zusatzaufgabe

- 12 Sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ unendlich oft differenzierbar. Zeigen Sie, dass für $t \in [a, b]$

$$\begin{aligned} f(t) &= f(a) + \int_a^t f'(s) ds \\ &= f(a) + f'(a)(t-a) + \int_a^t (t-s)f''(s) ds. \end{aligned}$$

Wie kann man diese Formel induktiv so verallgemeinern, dass man ein Polynom n -ter Ordnung in $t-a$ plus einen Integralterm mit der $n+1$ -ten Ableitung von f erhält?



The elephant's nightmare

Votieraufgaben

- 13 Für $a, b > 0$ gilt

$$\int_0^\infty \frac{\cos at - \cos bt}{t} dt = \log \frac{b}{a}.$$

- 14 Gegeben ist die Differenzialgleichung

$$\dot{x} = x^2 + 1 - t^2.$$

- Skizzieren sie das Richtungsfeld unter Zuhilfenahme der *Isoklinen*, also der Kurven in der (t, x) -Ebene, in denen das Richtungsfeld konstante Steigung aufweist.
- Bestimmen sie sämtliche Lösungen dieser Gleichung.
- Welche Lösungen existieren auf einem unendlichen Zeitintervall, welche auf ganz $\mathbb{R}$?

- 15 Bestimmen sie sämtliche Lösungen der Differenzialgleichung

$$a. \quad \dot{x} + x \sin t = \sin 2t, \quad b. \quad \dot{x} - 3x \tan t = 1.$$

Schriftaufgaben

- 16 Man löse die folgenden Anfangswertprobleme.

- $\dot{x} = x \sin t, \quad x(0) = 0$
- $\dot{x} = x \sin t + t^2 \exp(-\cos t), \quad x(0) = 1$
- $t\dot{x} + x = x^2 \log t, \quad x(1) = 1.$

- 17 *Lemma von Gronwall* Für die stetige Funktion $u: [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ gelte

$$0 \leq u(t) \leq a + b \int_0^t u(s) ds, \quad 0 \leq t \leq T.$$

Dann ist

$$0 \leq u(t) \leq ae^{bt}, \quad 0 \leq t \leq T.$$

Insbesondere ist $u \equiv 0$, falls $a = 0$.

Hinweis: Setze $v(t) = a + b \int_0^t u(s) ds$ und zeige, dass $e^{-bt}v(t)$ monoton fällt.

Zusatzaufgabe

- 18 Man bestimme eine Differenzialgleichung erster Ordnung für folgende Scharen von Kurven mit dem Parameter $c \in \mathbb{R}$.

$$a. \quad x = ct^2 \quad b. \quad x = ct^2 + c \quad c. \quad x = ct^2 + c|c|$$



Primitive think tanks

Schriftaufgaben — Wegen des Feiertags sind alle Aufgaben schriftlich

- 19 Zeigen sie anhand der Kreisparametrisierung $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$, dass für Kurven im Allgemeinen der Mittelwertsatz der Differenzialrechnung *nicht* gilt. Woran liegt das?

- 20 Konstruieren sie eine nicht rektifizierbare Kurve mit Spur $[0, 1]$.

- 21 Bestimmen sie die Länge der folgenden Kurven.

a. $[a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto (t^3, 3t^2/2),$

b. $[-3\pi, 3\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad t \mapsto t(\cos t, \sin t, t).$

- 22 Sei $\gamma: [a, b] \rightarrow E$ eine C^1 -Kurve, $\varphi: [c, d] \rightarrow [a, b]$ eine C^1 -Parametertransformation und $\gamma_* = \gamma \circ \varphi$. Dann gilt

$$\int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\|_E dt = \int_c^d \|\dot{\gamma}_*(t)\|_E dt.$$

- 23 Eine Peanokurve ist nicht rektifizierbar.

Sonstige Aufgabe außer Konkurrenz

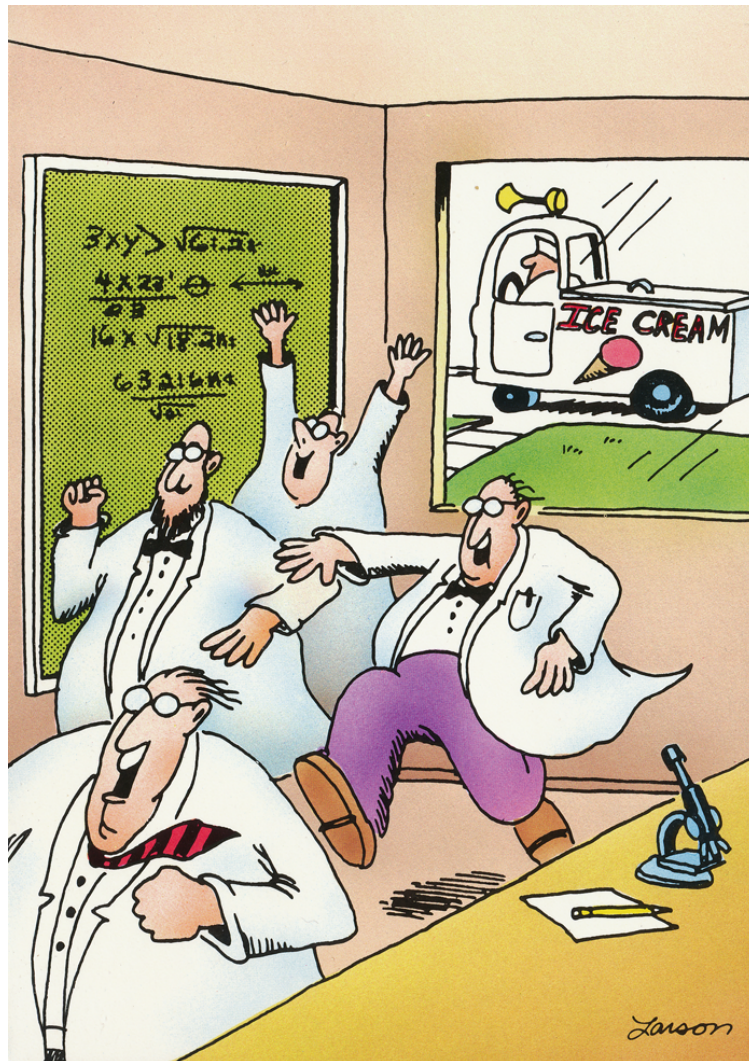
- 24 *Peanokurve* Sei $u: \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ eine stetige Funktion mit

$$u(t+2) = u(t), \quad u(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t \leq 1/3, \\ 1, & 2/3 \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Definiere dann $\gamma_0(t) = (u(t), u(3t))$ und damit

$$\gamma(t) = \sum_{k \geq 0} 2^{-k-1} \gamma_k(t), \quad \gamma_k(t) = \gamma_0(9^k t).$$

Dann bildet γ das Intervall $[0, 1]$ surjektiv auf $[0, 1]^2$ ab.



Voteraufgaben

- 25 Man gebe Beispiele für Kurven $\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit folgenden Eigenschaften:
- a. Injektiv auf $[0, 1]$, aber nicht doppelpunktfrei.
 - b. Der zugehörige Weg ist regulär, diese Parametrisierung jedoch nicht.
 - c. Differenzierbar, aber nicht rektifizierbar.
 - d. Keine topologisch äquivalente Parametrisierung ist Lipschitz.
- 26 Zeigen sie, dass der Graph der Funktion

$$f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(t) = \begin{cases} |t \sin 1/t|, & t > 0, \\ 0, & t = 0, \end{cases}$$

nicht D^1 ist.

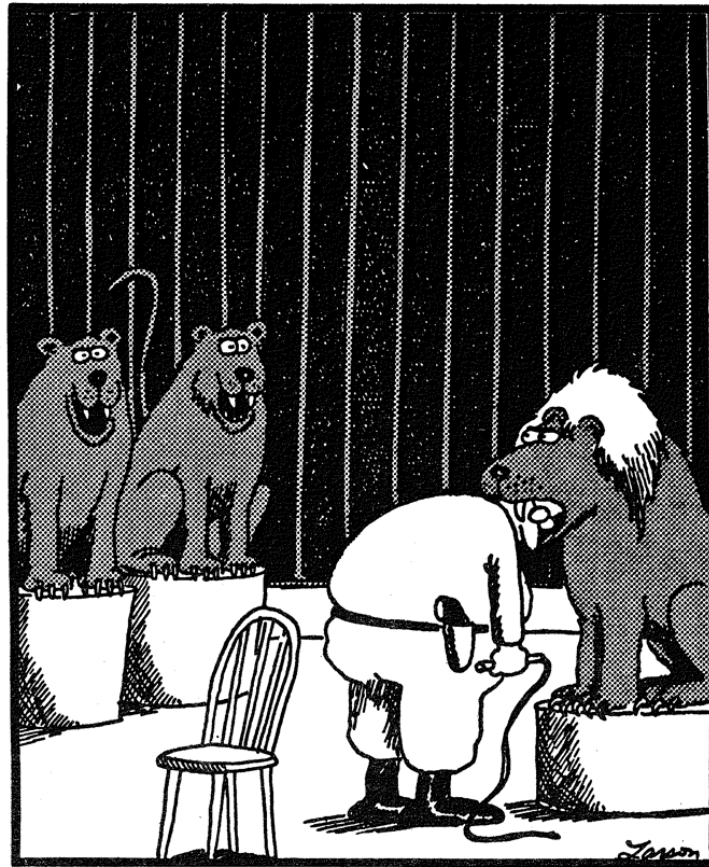
- 27 Besitzt ein Weg ω eine stückweise stetig differenzierbare Parametrisierung, so besitzt er auch eine stetig differenzierbare Parametrisierung. Gilt dies auch für »stückweise regulär«? *Hinweis:* Es genügt, eine aus zwei Stücken bestehende Parametrisierung zu betrachten.

Schriftaufgaben

- 28 Sei $\gamma: I \rightarrow E$ stetig und rektifizierbar. Dann existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ eine C^1 -Kurve $\gamma_\varepsilon: I \rightarrow E$ mit $\|\gamma - \gamma_\varepsilon\|_{[0, 1]} < \varepsilon$.
- 29 Sei I ein kompaktes Intervall und (γ_n) eine gleichmäßig konvergente Folge in $C^0(I, \mathbb{R}^n)$ mit Grenzkurve γ .
- a. Sind die γ_n rektifizierbar und ihre Längen $L(\gamma_n)$ gleichmäßig beschränkt, so ist auch γ rektifizierbar, und es gilt

$$L(\gamma) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} L(\gamma_n).$$

- b. Es gilt nicht notwendigerweise Gleichheit.
- c. Die Behauptung gilt im Allgemeinen nicht mehr, wenn die Längen nicht gleichmäßig beschränkt sind.



"Ernie's a chicken, Ernie's a chicken. . ."

Schriftaufgaben — Wegen des Feiertags sind alle Aufgaben schriftlich

- 30 Sei $A: V \rightarrow W$ eine lineare Abbildung zwischen zwei normierten Vektorräumen. Dann gilt $Ah = o(h)$ genau dann, wenn $A = 0$.

- 31 Die Funktion

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) = \begin{cases} \frac{2xy^2}{x^2 + y^4}, & (x, y) \neq 0, \\ 0, & (x, y) = 0. \end{cases}$$

besitzt im Nullpunkt sämtliche Richtungsableitungen, ist dort aber nicht stetig.

- 32 Gegeben ist die Funktion

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3y - xy^3}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq 0, \\ 0, & (x, y) = 0. \end{cases}$$

Zeigen sie, dass f alle partiellen Ableitungen zweiter Ordnung besitzt. Bestimmen sie diese Ableitungen, insbesondere im Nullpunkt.

- 33 Zeigen sie, dass $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} |x|_2^2 \sin |x|_2^{-1}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

überall differenzierbar ist. Besitzt f überall stetige partielle Ableitungen?

Sonstige Aufgabe außer Konkurrenz

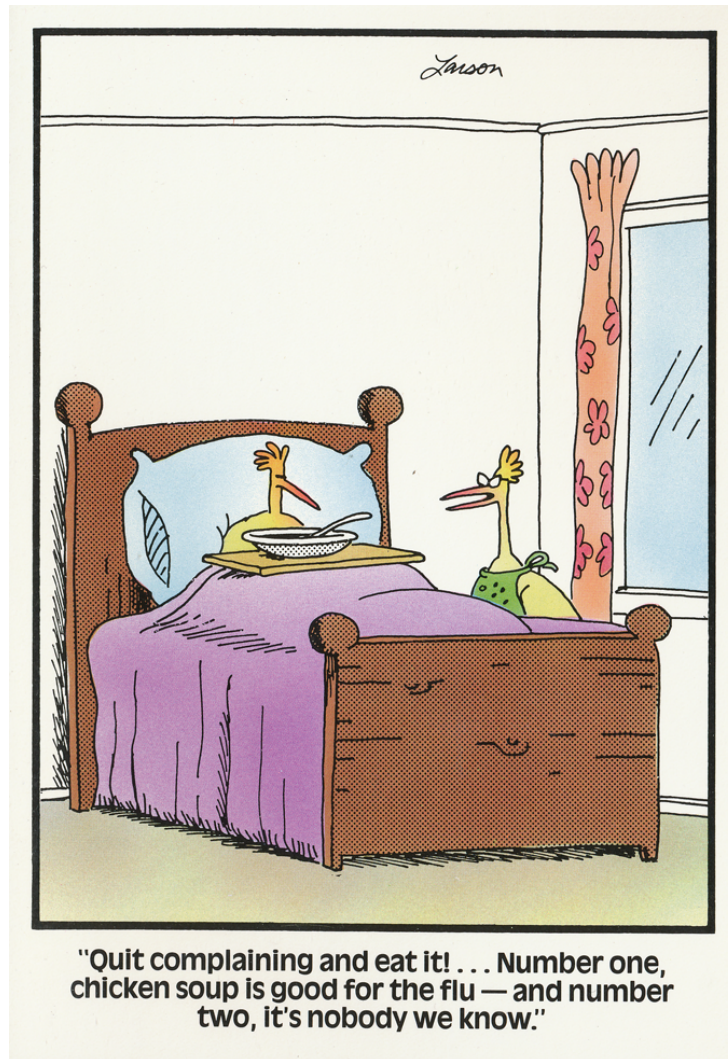
- 34 Sei $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar und $\lambda \in \mathbb{R}$. Gilt $f(tx) = t^\lambda f(x)$ für alle x und $t > 0$, so folgt

$$Df(x)x = \lambda f(x).$$

Hiervon gilt auch die Umkehrung. *Hinweis:* Bestimmen sie eine DGI für

$$\varphi = t^\lambda f(x) - f(tx).$$

Die Abgaben werden am 30. Juni in der Vorlesung eingesammelt.



Voteraufgaben

- 35 *Rayleighquotient* Für eine symmetrische $n \times n$ -Matrix A heißt

$$\varphi: \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \varphi(x) = \frac{1}{2} \frac{\langle Ax, x \rangle}{\langle x, x \rangle}$$

der *Rayleighquotient*. Bestimmen sie die kritischen Punkte x_0 von φ und die zugehörigen kritischen Werte $\varphi(x_0)$.

- 36 *Variante des Lemmas von Hadamard* Sei $f \in C^2(\Omega)$ und $0 \in \Omega$. Dann gibt es Funktionen $g_1, \dots, g_n \in C^1(\Omega)$, so dass lokal um 0

$$f(x) = f(0) + \sum_{i=1}^n x_i g_i(x).$$

- 37 Sei I ein kompaktes Intervall und $C(I)$ mit der Supremumsnorm versehen. Dann ist

$$\Phi: C(I) \rightarrow \mathbb{R}, \quad \Phi(f) = \frac{1}{2} \int_I f^2(t) dt$$

differenzierbar mit

$$D\Phi(f)\eta = \int_I f(t)\eta(t) dt.$$

Schriftaufgaben

- 38 Seien $f, g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbare Funktionen und $\varphi = fg$.

- Bestimmen sie $D\varphi(x)h$ für $h \in \mathbb{R}^n$.
- Bestimmen sie $\nabla\varphi(x)$ bezüglich des Standardskalarprodukts.

- 39 Ist $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar und L -lipschitz, so ist Df gleichmäßig beschränkt in dem Sinne, dass in jedem Punkt

$$\|Df(x)\| := \sup_{0 \neq h \in \mathbb{R}^n} \frac{|Df(x)h|}{|h|} \leq L.$$

Zusatzaufgabe

- 40 Die Funktion $u \in C^2(\mathbb{R}^2)$ erfülle die Differenzialgleichung $y u_x = x u_y$. Dann ist $Du(0,0) = 0$, und es existiert ein $\varphi \in C^1([0, \infty))$ derart, dass $u(x, y) = \varphi(x^2 + y^2)$. Gilt dies auch, wenn nur $u \in C^1(\mathbb{R}^2)$ vorausgesetzt wird?



"That was incredible. No fur, claws, horns, antlers, or nothin'. . . . Just soft and pink."

Votieraufgaben

- 41 Sei $u: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar und

$$v(r, \varphi) = u(r \cos \varphi, r \sin \varphi).$$

Dann gilt

$$u_{xx} + u_{yy} = v_{rr} + \frac{1}{r} v_r + \frac{1}{r^2} v_{\varphi\varphi}.$$

- 42 Nichtdegenerierte kritische Punkte einer skalaren C^2 -Funktion sind isoliert. Das heißt, in einer Umgebung eines solchen kritischen Punktes existiert kein weiterer kritischer Punkt.
- 43 Ist p ein beliebiges Polynom mit reellen oder komplexen Koeffizienten, so sind Real- und Imaginärteil von $p(x + iy)$ harmonische Funktionen in x und y , das heißt, es gilt

$$f_{xx} + f_{yy} = 0.$$

Schriftaufgaben

- 44 Untersuchen sie die Funktion

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) = y^2 - 3x^2y + 2x^4$$

auf Extremalstellen.

- 45 Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und konvex und $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar. Gilt in jedem Punkt $x \in \Omega$

$$\langle Df(x)h, h \rangle > 0, \quad h \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$$

so ist f auf Ω injektiv.

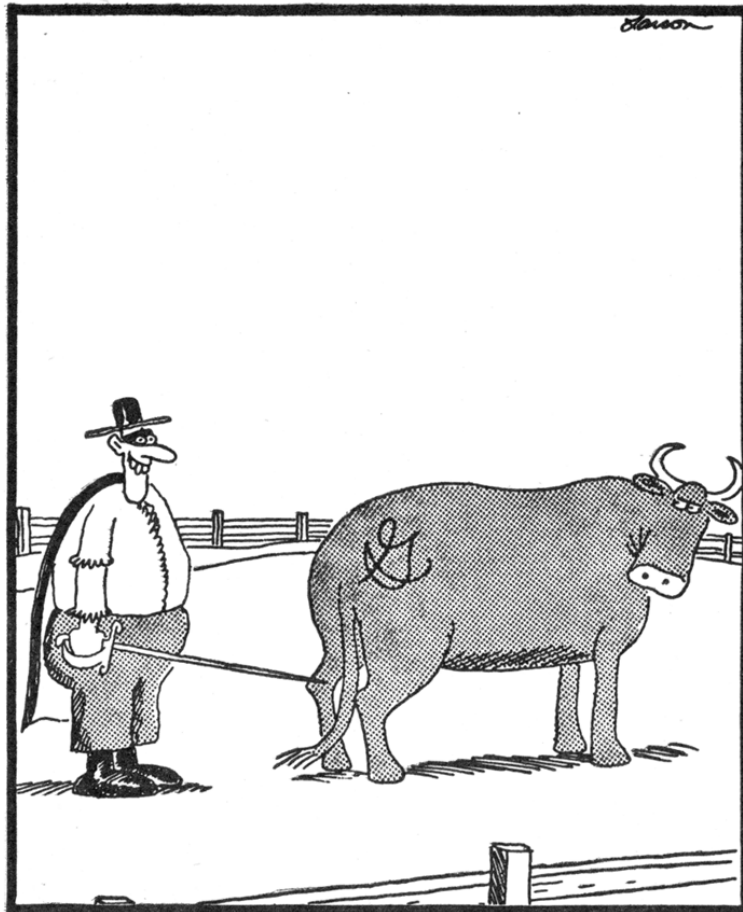
Zusatzaufgabe

- 46 Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beliebig, aber nicht leer, sei $x_0 \in \Omega$, und für $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ sei

$$[f]_\Omega = \sup_{\substack{u \neq v \\ u, v \in \Omega}} \frac{|f(u) - f(v)|}{|u - v|}.$$

Dann gilt:

- $L := \{f \in C(\Omega, \mathbb{R}^n) : f(x_0) = 0, [f]_\Omega < \infty\}$ ist ein reeller Vektorraum.
- $[\cdot]_\Omega$ definiert auf L eine Norm.
- Mit dieser Norm ist L vollständig.



**Practicing his skills wherever possible,
Zorro's younger and less astute brother,
Gomez, had a similar career cut short.**

Votieraufgaben

- 47 Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ nicht-leer und konvex. Dann ist auch

$$d: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad d(x) = \text{dist}(x, K) := \inf_{u \in K} \|x - u\|$$

konvex.

- 48 Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ nicht-leer, kompakt und konvex. Ist $f: K \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und konvex, so nimmt f ihr Supremum auf dem Rand von K an.
- 49 Sei $f: x \mapsto \langle a, x \rangle + b$ eine affine Funktion auf dem $\mathbb{R}^n$. Dann nimmt f ihr Maximum über der konvexen Hülle von m Punkten $x_1, \dots, x_m$ in $\mathbb{R}^n$ in wenigstens einem dieser Punkte an.
- 50 Ist $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ strikt konvex und *koerziv*, das heißt

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} f(x) = \infty,$$

so besitzt f genau eine lokale Minimalstelle x_0 , und es gilt $f(x_0) = \min_{\mathbb{R}^n} f$.

Schriftaufgaben

- 51 Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und konvex. Ist $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ konvex, so sind es auch die Mengen

$$\Omega_c = \{x \in \Omega : f(x) < c\}, \quad c \in \mathbb{R}.$$

- 52 Eine C^1 -Funktion $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ist von der Form $f(x) = \langle a, x \rangle + b$ genau dann, wenn sowohl f als auch $-f$ konvex sind.



Voteraufgaben

- 53 Finden Sie zwei 2×2 -Matrizen A und B , für die

$$(A+B)^2 \neq A^2 + 2AB + B^2, \quad e^{A+B} \neq e^A e^B.$$

- 54 Sei P_n der Raum aller reellen Polynome vom Grad kleiner als n , und

$$D: P_n \rightarrow P_n, \quad Dp = p'$$

der Differenziationsoperator.

a. Bestimmen Sie eine Basis in P_n , in der $D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix}$.

b. Bestimmen Sie in dieser Basis e^{Dt} .

c. Zeigen Sie ohne Bezug auf eine Basis, dass

$$e^{Dt} = H^t: P_n \rightarrow P_n, \quad H^t p = p(\cdot + t).$$

- 55 Gegeben ist die homogene lineare Differenzialgleichung zweiter Ordnung,

$$\ddot{u} + 2\alpha\dot{u} + \beta^2 u = 0.$$

- a. Schreiben Sie diese Gleichung als zweidimensionales System erster Ordnung.
b. Beschreiben Sie für $|\alpha| > |\beta|$, $|\alpha| = |\beta|$, und $|\alpha| < |\beta|$ das Phasenportrait.

Schriftaufgaben

- 56 Bestimmen Sie e^J und e^{At} für

$$A = \alpha I + \omega J, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

- 57 Die aus einer Fundamentallösung in einem Koordinatensystem gebildete Matrix $M(t) = [\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)]$ heißt *Fundamentalmatrix*. Für diese gilt

$$M(t)M(t_0)^{-1} = e^{(t-t_0)A}$$

für jedes $t_0 \in \mathbb{R}$. Unter welchen Bedingungen ist $M(t)$ eine 1-Parametergruppe?

Zusatzaufgabe

- 58 a. Ist λ ein Eigenwert von A , so ist e^λ ein Eigenwert von e^A .
b. Es gibt keine reelle 2×2 -Matrix L mit

$$e^L = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

- c. Ist $\|A - I\|$ hinreichend klein, so gibt es einen Operator L mit $e^L = A$.
d. Inwieweit ist L eindeutig bestimmt?



"Well, don't look at me, idiot!... I said we should've flown!"

Votieraufgaben

- 59 Bestimmen sie den Typ der Differenzialgleichung $\dot{x} = Ax$ für folgende Matrizen A , sowie diejenigen Anfangswerte, für die $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$ gilt.

a. $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$ b. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ c. $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ d. $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

- 60 Betrachten sie die inhomogene n -dimensionale Differenzialgleichung $\dot{x} = Ax + b$ mit $\det A \neq 0$. Bestimmen sie eine affine Transformation $x = Py + c$, die diese Gleichung in eine homogene Gleichung $\dot{y} = By$ transformiert. Bestimmen sie damit die allgemeine Lösung dieser Gleichung. Wie sieht diese Lösung aus, wenn $\det A = 0$?

- 61 Betrachten sie im $\mathbb{R}^3$ die Differenzialgleichung $\dot{x} = Ax$ mit $A = \begin{pmatrix} 1 & & \\ 1 & 2 & \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.
- Zu welchem Diagonaloperator ist A ähnlich?
 - Welche Struktur hat die allgemeine Lösung?
 - Bestimmen sie die allgemeine Lösung explizit.
 - Lösen sie damit das Anfangswertproblem mit $x(0) = (2, 4, 3)^\top$.

Schriftaufgaben

- 62 Lösen sie das Anfangswertproblem $\dot{x} = Ax$, $x(0) = x_0$ für folgende A und x_0 .

a. $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $x_0 = \begin{pmatrix} 3 \\ -9 \end{pmatrix}$ b. $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$, $x_0 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$

c. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $x_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}$

- 63 Zeigen sie, dass die Funktionen $e^{\lambda_1 t}, \dots, e^{\lambda_n t}$ linear unabhängig genau dann sind, wenn die λ_k paarweise verschieden sind.

Zusatzaufgabe

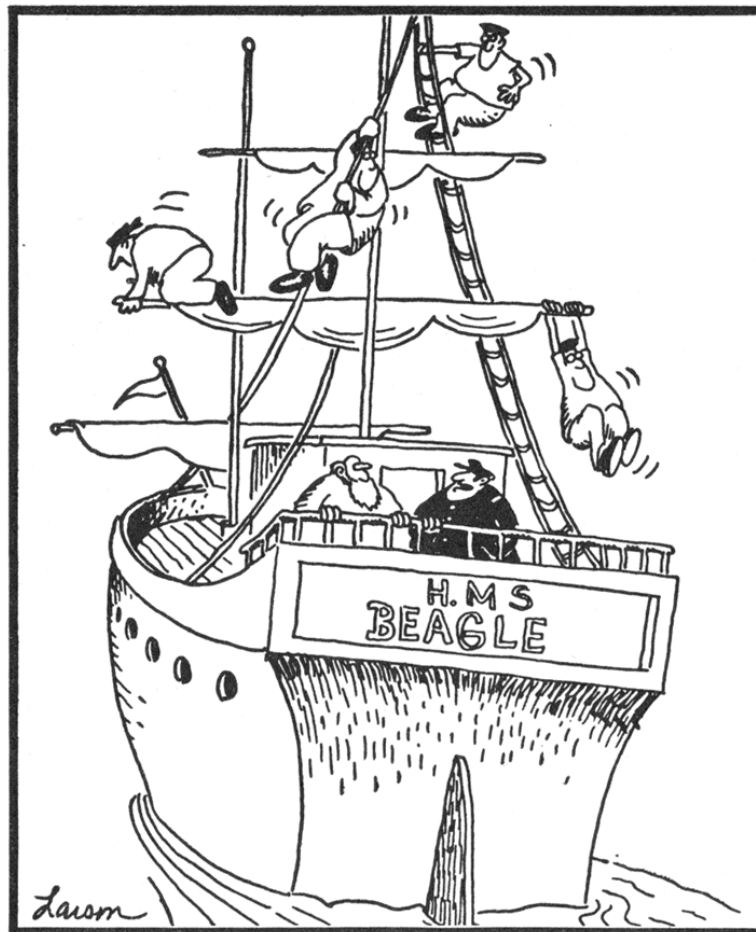
- 64 Zeigen sie: Das Spektrum von A liegt in der rechten komplexen Halbebene genau dann, wenn

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} |\varphi(t)| = \infty$$

für jede Lösung φ von $\dot{x} = Ax$ außer der Gleichgewichtslösung. Es liegt auf der imaginären Achse genau dann, wenn

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{t} \log(1 + |\varphi(t)|) = 0$$

für jede Lösung φ von $\dot{x} = Ax$ außer der Gleichgewichtslösung.



"Well, Mr. Darwin. ...Have you reached any conclusions, so far?"

Votieraufgaben

- 65 a. Sei $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ein Skalarprodukt und ν ein stetiges Vektorfeld auf V , für das mit einer Konstanten $a \geq 0$ gilt

$$\langle \nu(x), x \rangle \leq a(1 + \|x\|^2), \quad x \in V.$$

Dann gilt für jede Lösungskurve φ von ν die Abschätzung

$$\|\varphi^t(x)\| \leq (1 + \|x\|)e^{at}, \quad t \geq 0.$$

b. Was muss vorausgesetzt werden, damit Entsprechendes für $t \leq 0$ gilt?

- 66 Sei $\varphi: (a, b) \rightarrow V$ Lösungskurve eines stetigen Vektorfeldes ν . Ist die Spur von φ in einer kompakten Teilmenge des Definitionsbereiches von ν enthalten, so ist φ gleichmäßig stetig. Falls $b < \infty$, so existiert auch $\lim_{t \nearrow b} \varphi(t)$.

- 67 Sei φ Lösungskurve eines stetigen Vektorfeldes auf einem Gebiet Ω . Ist

$$T = \sup \{t \geq 0 : \varphi([0, t]) \subset \Omega\} < \infty,$$

so existiert zu jeder kompakten Teilmenge $K \subset \Omega$ eine monoton steigende Folge $t_1 < t_2 < \dots \nearrow T$ mit $\varphi(t_n) \notin K$.

Schriftaufgaben

- 68 Welcher Differenzialgleichung genügt die Logarithmusfunktion? Zeichnen Sie die Lösungen im (x, t) -Raum.
- 69 Zeigen sie, dass für die Differenzialgleichung $\dot{x} = t\dot{x}$ der Existenz- und Eindeutigkeitssatz nicht gilt.

Zusatzaufgabe

- 70 Sei ν ein C^1 -Vektorfeld auf V und $\alpha: V \rightarrow \mathbb{R}$ eine positive C^1 -Funktion. Dann besitzen die Vektorfelder ν und $w = \alpha\nu$ dieselben Lösungskurven. Gilt das auch, wenn $\text{›}C^1\text{‹}$ durch $\text{›} \text{lokal lipschitz} \text{‹}$ oder $\text{›} \text{stetig} \text{‹}$ ersetzt wird?



Votieraufgaben

- 71 Transformieren sie die Differenzialgleichung

$$\dot{x} = y + x(1 - x^2 - y^2)$$

$$\dot{y} = -x + y(1 - x^2 - y^2)$$

in Polarkoordinaten. Beschreiben sie die Lösungskurven sowohl in den Polarkoordinaten r, φ als auch den kartesischen Koordinaten x, y .

- 72 Für die Lösungskurven eines lokal lipschitzstetigen Vektorfeldes gilt genau eine der drei folgenden Möglichkeiten. Eine Lösungskurve $\varphi: I \rightarrow V$ ist
- eine *konstante Abbildung*: $\varphi(t) = p$ für alle t , oder
 - eine *injektive Immersion*, oder
 - eine *periodische Immersion*: $\varphi(t + T) = \varphi(t)$ für ein $T > 0$ und alle t .

Hinweis: Eine *Immersion* ist eine differenzierbare Abbildung, deren Ableitung überall maximalen Rang hat.

- 73 a. Bestimmen sie $\int_{\gamma} y^3 dx + x^3 dy$ für

$$\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \gamma(t) = (t^\alpha, t), \quad \alpha \geq 1.$$

- b. Bestimmen sie $\int_{\gamma} x_3 dx_1 + x_1 dx_2 + x_2 dx_3$ für

$$\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \gamma(t) = (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t, t).$$

Zusatzaufgaben

- 74 Sei Φ der maximale Fluss eines lipschitzstetigen Vektorfeldes ν . Dann gilt

$$\Phi_*^t \nu = \nu$$

an allen Punkten, wo die linke Seite definiert ist.

- 75 Das Vektorfeld ν sei von der Form

$$\nu(x) = Ax + \hat{\nu}(x),$$

wobei $\hat{\nu}$ bedeutet, dass der Term bis zur ersten Ableitung bei 0 verschwindet. Dann hat die Zeit-1-Abbildung $\Phi = \Phi^1$ seines Flusses die Form

$$\Phi(x) = \Lambda x + \hat{\Phi}(x)$$

mit $\Lambda = e^A$.



**"Well, of course I did it in cold blood, you idiot!
...I'm a reptile!"**