

Analysis 2
Erste Modulprüfung
Ss 2018
4. Oktober 2018

- Es gibt 7 Aufgaben. Die jeweilige Punktzahl steht am linken Rand.
- Die Maximalpunktzahl ist 40, zum Bestehen sind 16 Punkte hinreichend.
- Die Bearbeitungszeit beträgt 120 Minuten.
- Es sind keine Hilfsmittel zugelassen.
- Bei Aufgabe 1–6 sind alle Schritte zu begründen. Aussagen aus Vorlesung und Übungen dürfen dabei verwendet werden, sofern sie nicht Gegenstand der Aufgabe selbst sind.
- Verwenden Sie pro Aufgabe jeweils ein neues Blatt.
- Abgaben mit Bleistift oder Rotstift sind nicht zulässig.
- Tragen sie bitte Namen, Matrikelnummer sowie Namen Ihres Tutors ein.

Name

M-Nr

Tutor

1	2	3	4	5	6	7		Σ

(5) **Aufgabe 1**

- a. Geben Sie die Definition des Randes ∂M einer Menge $M \subset \mathbb{R}^n$.
 b. Zeigen Sie, dass $\partial(M^c) = \partial M$ für jede Menge $M \subset \mathbb{R}^n$, wobei M^c das Komplement in $\mathbb{R}^n$ bezeichnet.
 c. Bestimmen Sie den Rand der Menge

$$M = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_n \neq x_1 + \dots + x_{n-1}\}.$$

■ **Lösung**

- a. Ein Punkt p gehört zu ∂M , wenn in jeder Umgebung von p Punkte aus M und aus dem Komplement von M liegen.
 b. Die vorangehene Definition ist symmetrisch in M und M^c , da $(M^c)^c = M$. Ein Punkt, der zum Rand von M gehört, gehört somit auch zum Rand von M^c , und umgekehrt.
 c. Die Menge M selbst ist offen und kann daher keine Randpunkte enthalten. Deren Komplement ist die abgeschlossene Menge

$$N = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_n = x_1 + \dots + x_{n-1}\},$$

und jeder ihrer Punkte ist offensichtlich ein Randpunkt von M . Also ist $\partial M = N$. ■

(4) **Aufgabe 2**

Sei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit der Eigenschaft, dass

$$|f(t)| \leq \theta |t|, \quad t \in \mathbb{R}$$

mit einem festen $\theta \in (0, 1)$. Sei $f_n := f \circ \dots \circ f$ für $n \geq 1$ die n -fache Iteration dieser Abbildung. Zeigen Sie:

- a. Es gilt

$$|f_n(t)| \leq \theta^n |t|, \quad n \geq 1, \quad t \in \mathbb{R}.$$

- b. Die Folge der Funktionen $F_n = \sum_{k=1}^n f_k$ konvergiert gleichmäßig auf jeder kompakten Teilmenge von $\mathbb{R}$.

■ **Lösung**

- a. Für $n = 1$ ist dies die Annahme. Induktiv folgt dann

$$|f_{n+1}(t)| = |f(f_n(t))| \leq \theta |f_n(t)| \leq \theta \cdot \theta^n |t| = \theta^{n+1} |t|.$$

- b. Für $m > n \geq 1$ gilt mit der vorangehenden Abschätzung

$$\left| \sum_{k=n}^m f_k(t) \right| \leq \sum_{k=n}^m \theta^k |t| \leq \frac{\theta^n}{1 - \theta} |t|.$$

Auf jeder kompakten Teilmenge von $\mathbb{R}$ ist $|t|$ beschränkt, es gilt also

$$\sup_{t \in K} \left| \sum_{k=n}^m f_k(t) \right| \leq \theta^n M$$

mit einer Konstanten $M < \infty$. Somit konvergiert die Reihe gleichmäßig auf K . ■

(6) **Aufgabe 3**

Sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, nicht-negativ, und nicht identisch Null auf dem nicht-entarteten Intervall $[a, b]$. Dann gilt:

a.
$$\int_a^b f(t) dt > 0.$$

b.
$$\int_a^b (t-a)f(t) dt \geq \frac{1}{2M} \left(\int_a^b f(t) dt \right)^2, \quad M = \max_{a \leq t \leq b} f(t).$$

c. In der vorangehenden Ungleichung gilt Gleichheit nur, wenn f konstant ist.

Hinweis zu b.: Man betrachte die Ableitung der Integrale nach den oberen Grenzen.

■ **Lösung**

a. Da f nicht identisch Null ist, gibt es ein $c \in [a, b]$ mit $f(c) > 0$. Aus Stetigkeitsgründen existiert dann auch ein Intervall $[\alpha, \beta] \subset [a, b]$, so dass

$$f(t) \geq \mu := f(c)/2, \quad t \in [\alpha, \beta].$$

Wegen $f \geq 0$ gilt dann

$$\int_a^b f(t) dt \geq \int_\alpha^\beta f(t) dt \geq \int_\alpha^\beta \mu dt = \mu(\beta - \alpha) > 0.$$

b. Sei

$$g(x) = \int_a^x (t-a)f(t) dt, \quad h(x) = \frac{1}{2M} \left(\int_a^x f(t) dt \right)^2.$$

Es ist $h(a) = g(a) = 0$, und wegen $f(t) \leq M$ für $t \in [a, b]$ auch

$$h'(x) = \frac{1}{M} \left(\int_a^x f(t) dt \right) f(x) \geq (x-a)f(x) = g'(x), \quad x \in [a, b].$$

Daraus folgt $h(x) \geq g(x)$ für alle $x \in [a, b]$, also insbesondere für $x = b$, was die Behauptung ergibt. ■

(6) **Aufgabe 4**

Man zeige die Existenz folgender uneigentlicher Integrale und bestimme sie.

$$a. \int_0^1 \frac{t \, dt}{\sqrt{1-t^2}} \quad b. \int_{\sqrt{2018}}^{\infty} \frac{dt}{t^2 + 2018} \quad c. \int_0^{\infty} e^{-at} \cos(bt) \, dt, \quad a, b > 0$$

■ **Lösung**

a. Es gilt

$$\lim_{r \nearrow 1} \int_0^r \frac{t \, dt}{\sqrt{1-t^2}} = \lim_{r \nearrow 1} -\sqrt{1-t^2} \Big|_0^r = 1 - \lim_{r \nearrow 1} \sqrt{1-r^2} = 1.$$

b. Die Funktion $1/(t^2 + 1)$ ist eine integrierbare Majorante. Mit der Substitution $t = \sqrt{2018}x$ folgt

$$\begin{aligned} \int_{\sqrt{2018}}^{\infty} \frac{dt}{t^2 + 2018} &= \frac{1}{\sqrt{2018}} \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2 + 1} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2018}} \arctan x \Big|_1^{\infty} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2018}} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\pi}{4\sqrt{2018}}. \end{aligned}$$

c. Es ist

$$|e^{-at} \cos(bt) \, dt| \leq e^{-at},$$

und e^{-at} ist über $[0, \infty)$ integrierbar. Zeimalige partielle Integration ergibt dann

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} e^{-at} \cos(bt) \, dt &= \frac{1}{b} e^{-at} \sin(bt) \Big|_0^{\infty} - \frac{a}{b} \int_0^{\infty} e^{-at} \sin(bt) \, dt \\ &= -\frac{a}{b^2} e^{-at} \cos(bt) \Big|_0^{\infty} - \frac{a^2}{b^2} \int_0^{\infty} e^{-at} \cos(bt) \, dt \\ &= \frac{a}{b^2} - \frac{a^2}{b^2} \int_0^{\infty} e^{-at} \cos(bt) \, dt. \end{aligned}$$

Also ist

$$\int_0^{\infty} e^{-at} \cos(bt) \, dt = \frac{b^2}{a^2 + b^2} \frac{a}{b^2} = \frac{a}{a^2 + b^2}. \quad \blacksquare$$

(7) **Aufgabe 5**

Gegeben sei $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(0,0) = 0$ und

$$f(x, y) = \frac{x^3}{x^2 + y^2}, \quad (x, y) \neq (0, 0).$$

Zeigen Sie:

- Beide partielle Ableitungen von f existieren und sind auf $\mathbb{R}^2$ beschränkt.
- Jede Richtungsableitung $\partial_h f(0,0)$ existiert und ist absolut ≤ 1 für $|h| = 1$.
- Die Funktion f ist im Punkt $(0,0)$ *nicht* differenzierbar.
- Für jede differenzierbare Kurve $\gamma: [-1,1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit $\gamma(0) = 0$ ist die Funktion $g = f \circ \gamma: [-1,1] \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar.

■ **Lösung**

- a. Für $(x, y) \neq (0, 0)$ erhält man

$$f_x(x, y) = \frac{x^4 + 3x^2 y^2}{(x^2 + y^2)^2}, \quad f_y(x, y) = -\frac{2x^3 y}{(x^2 + y^2)^2}.$$

Mit $f(x, 0) = x$ und $f(0, y) = 0$ folgt außerdem

$$f_x(0, 0) = 1, \quad f_y(0, 0) = 0.$$

- b. Für $h = (u, v)$ erhält man

$$\begin{aligned} \partial_h f(0, 0) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (f(0 + tu, 0 + tv) - f(0, 0)) \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \frac{t^3 u^3}{t^2 u^2 + t^2 v^2} = \frac{u^3}{u^2 + v^2}. \end{aligned}$$

- c. Denn $\partial_h f(0, 0)$ ist nicht linear in h .

d. In den Punkten t mit $\gamma(t) \neq 0$ ergibt sich dies aus der Kettenregel. In Punkten $\gamma(t) = 0$ kann man diese jedoch nicht anwenden, da f dort tatsächlich nicht differenzierbar ist – siehe d. Man kann aber direkt argumentieren. Sei dazu der Einfachheit halber $t = 0$. Mit $\gamma(0) = 0$ und $\dot{\gamma}(0) = (u, v)$ ist dann

$$\gamma(t) = (ut, vt) + O(t^2).$$

Für $(u, v) \neq (0, 0)$ ist dann

$$\begin{aligned} f(\gamma(t)) &= \frac{u^3 t^3 + O(t^4)}{u^2 t^2 + v^2 t^2 + O(t^3)} \\ &= t \frac{u^3 + O(t)}{u^2 + v^2 + O(t)} = t \frac{u^3}{u^2 + v^2} + O(t^2). \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$(f \circ \gamma)'(0) = \frac{u^3}{u^2 + v^2}.$$

Für $(u, v) = (0, 0)$ ergibt sich $f(\gamma(t)) = O(t^2)$ und damit $(f \circ \gamma)'(0) = 0$. ■

(6) **Aufgabe 6**

a. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differenzialgleichung

$$t^2 \dot{x} = x - 1, \quad t > 0.$$

b. Bestimmen Sie diejenige Lösung mit $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$.

c. Welche Differenzialgleichung erhält man mit der Substitution $t = 1/s$? Wie erhält man damit die Lösung unter a.?

■ **Lösung**

a. Eine spezielle Lösung ist $x(t) \equiv 1$. Für $x \neq 1$ separiert man die Variablen zu

$$\frac{\dot{x}}{x-1} = \frac{1}{t^2}$$

und erhält

$$|x-1| = ce^{-1/t}, \quad c > 0.$$

Die Diskussion der Fälle $x-1 > 0$ und $x-1 < 0$ führt insgesamt zur allgemeinen Lösung

$$x(t) = 1 + ce^{-1/t}, \quad c \in \mathbb{R}.$$

b. Es ist

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (1 + ce^{-1/t}) = 1 + c.$$

Die gesuchte Lösung erhält man also mit $c = -1$.

c. Setzen wir $y(s) = x(1/s)$, so erhalten wir

$$y'(s) = -\dot{x}(1/s)/s^2 = -t^2 \dot{x}(1/s) = -x(1/s) + 1 = 1 - y(s),$$

also die Differenzialgleichung

$$y' = 1 - y.$$

Deren allgemeine Lösung ist

$$y(s) = 1 + ce^{-s}, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Mit $s = 1/t$ erhalten wir daraus wieder die allgemeine Lösung von a. ■

(6) **Aufgabe 7**

Welche der folgenden Aussagen sind wahr, welche falsch? Für jede falsche Antwort werden 1,5 Punkte abgezogen, fehlende Antworten ergeben Null Punkte.

- a. Die Hessische einer C^2 -Funktion ist symmetrisch. ☐ wahr ☐ falsch
 b. Die Funktion f mit

$$f(x, y) = e^{-x}(xy - 1)$$

besitzt ein Maximum im Punkt $(0, -1)$. ☐ wahr ☐ falsch

- c. Die Funktion

$$f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \exp\left(\int_0^x e^{-1/t^2} dt\right)$$

ist konvex. ☐ wahr ☐ falsch

- d. Die lineare Differenzialgleichung $\dot{x} = Ax$ mit

$$A = \begin{pmatrix} \sqrt{a} & -1 \\ \pi & 0 \end{pmatrix}$$

beschreibt für $a > 2\pi$ einen Strudel. ☐ wahr ☐ falsch

■ **Lösung**

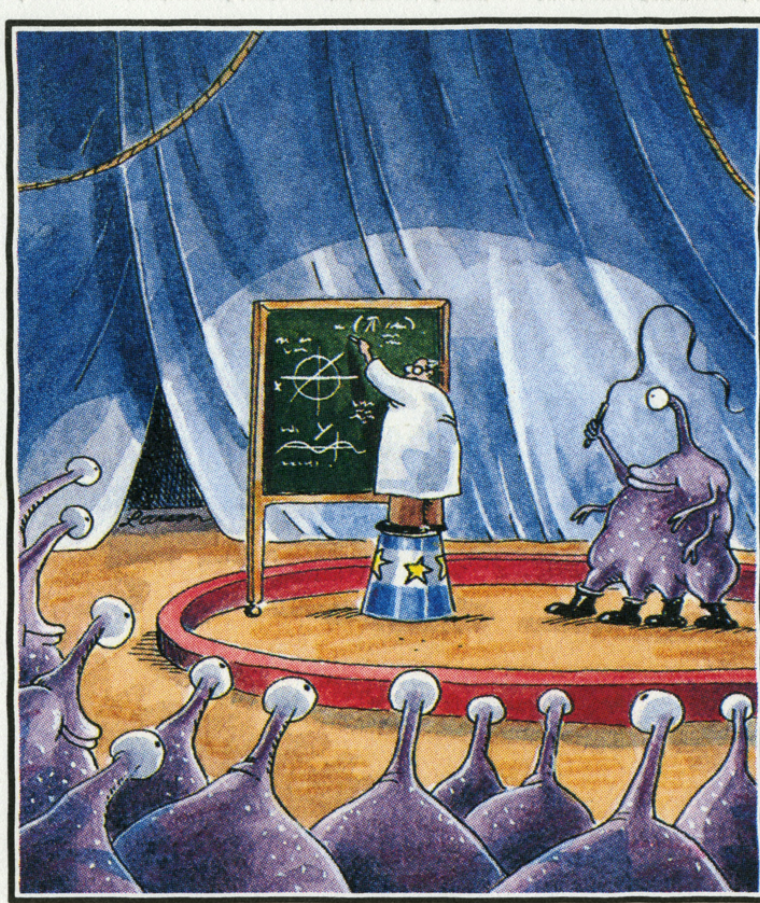
- a. Wahr. Das folgt aus dem Lemma von Schwarz.
 b. Falsch. Denn für $g(x) = f(x, -1) = -e^{-x}(x + 1)$ gilt

$$g'(x) = xe^{-x}, \quad g''(x) = e^{-x}(1 - x),$$

also $g'(-) = 0$ und $g''(0) = 1 > 0$. Daher kann f bei $(0, -1)$ kein Maximum haben.

- c. Falsch. Denn f ist für $x > 0$ offensichtlich streng monoton steigend. Eine streng monoton steigende, konvexe Funktion muss aber unbeschränkt sein, da ja auch ihre Ableitung monoton steigen muss.

- d. Falsch. Die Eigenwerte von A sind $(\sqrt{a} \pm \sqrt{a - 4\pi})/2$ und sind komplex konjugiert nur für $a < 4\pi$. ■



**Abducted by an alien circus company,
Professor Doyle is forced to write calculus
equations in center ring.**