Analysis 2

Erste Modulprüfung

Ss 2018

4. Oktober 2018

- Es gibt 7 Aufgaben. Die jeweilige Punktzahl steht am linken Rand.
- Die Maximalpunktzahl ist 40, zum Bestehen sind 16 Punkte hinreichend.
- Die Bearbeitungszeit beträgt 120 Minuten.
- Es sind keine Hilfsmittel zugelassen.
- Bei Aufgabe 1–6 sind alle Schritte zu begründen. Aussagen aus Vorlesung und Übungen dürfen dabei verwendet werden, sofern sie nicht Gegenstand der Aufgabe selbst sind.
- Verwenden Sie pro Aufgabe jeweils ein neues Blatt.
- Abgaben mit Bleistift oder Rotstift sind nicht zulässig.
- Tragen sie bitte Namen, Matrikelnummer sowie Namen Ihres Tutors ein.

Name M-Nr Tutor

1	2	3	4	5	6	7		Σ

⟨5⟩ **Aufgabe 1**

a. Geben Sie die Definition des Randes ∂M einer Menge $M \subset \mathbb{R}^n$.

b. Zeigen Sie, dass $\partial(M^c) = \partial M$ für jede Menge $M \subset \mathbb{R}^n$, wobei M^c das Komplement in $\mathbb{R}^n$ bezeichnet.

c. Bestimmen Sie den Rand der Menge

$$M = \{(x_1, .., x_n) \in \mathbb{R}^n : x_n \neq x_1 + .. + x_{n-1}\}.$$

⟨4⟩ **Aufgabe 2**

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit der Eigenschaft, dass

$$|f(t)| \leqslant \theta\,|t|, \quad t \in \mathbb{R}$$

mit einem festen $\theta \in (0,1)$. Sei $f_n \coloneqq f \circ .. \circ f$ für $n \geqslant 1$ die n-fache Iteration dieser Abbildung. Zeigen Sie:

a. Es gilt

$$|f_n(t)| \leqslant \theta^n\,|t|, \qquad n \geqslant 1, \quad t \in \mathbb{R}.$$

b. Die Folge der Funktionen $F_n = \sum_{k=1}^{n} f_k$ konvergiert gleichmäßig auf jeder kompakten Teilmenge von $\mathbb{R}$.

⟨6⟩ **Aufgabe 3**

Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig, nicht-negativ, und nicht identisch Null auf dem nicht-entarteten Intervall $[a,b]$. Dann gilt:

a.
$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t > 0.$$

b.
$$\int_a^b (t-a)f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant \frac{1}{2M}\left(\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right)^2, \qquad M = \max_{a \leqslant t \leqslant b} f(t).$$

c. In der vorangehenen Ungleichung gilt Gleichheit nur, wenn f konstant ist.

Hinweis zu b.: Man betrachte die Ableitung der Integrale nach den oberen Grenzen.

⟨6⟩ **Aufgabe 4**

Man zeige die Existenz folgender uneigentlicher Integrale und bestimme sie.

a. $\displaystyle\int_0^1 \frac{t\,\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}}$ *b.* $\displaystyle\int_{\sqrt{2018}}^\infty \frac{\mathrm{d}t}{t^2+2018}$ *c.* $\displaystyle\int_0^\infty \mathrm{e}^{-at}\cos(bt)\,\mathrm{d}t, \quad a,b > 0$

⟨7⟩ **Aufgabe 5**
Gegeben sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(0,0) = 0$ und

$$f(x,y) = \frac{x^3}{x^2+y^2}, \qquad (x,y) \neq (0,0).$$

Zeigen Sie:
a. Beide partielle Ableitungen von f existieren und sind auf $\mathbb{R}^2$ beschränkt.
b. Jede Richtungsableitung $\partial_h f(0,0)$ existiert und hat Absolutbetrag $\leqslant 1$.
c. Für jede differenzierbare Kurve $\gamma\colon [-1,1] \to \mathbb{R}^2$ mit $\gamma(0) = 0$ ist die Funktion $g = f \circ \gamma\colon [-1,1] \to \mathbb{R}$ differenzierbar.
d. Die Funktion f ist im Punkt $(0,0)$ *nicht* differenzierbar.

⟨6⟩ **Aufgabe 6**
a. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differenzialgleichung

$$t^2\dot{x} = x - 1, \qquad t > 0.$$

b. Bestimmen Sie diejenige Lösung mit $\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$.
c. Welche Differenzialgleichung erhält man mit der Substitution $t = 1/s$? Wie erhält man damit die Lösung unter *a.*?

⟨6⟩ **Aufgabe 7**
Welche der folgenden Aussagen sind wahr, welche falsch? Für jede falsche Antwort werden 1,5 Punkte abgezogen, fehlende Antworten ergeben Null Punkte.

a. Die Hessische einer C^2-Funktion ist symmetrisch. ○ wahr ○ falsch
b. Die Funktion f mit

$$f(x,y) = \mathrm{e}^{-x}(xy - 1)$$

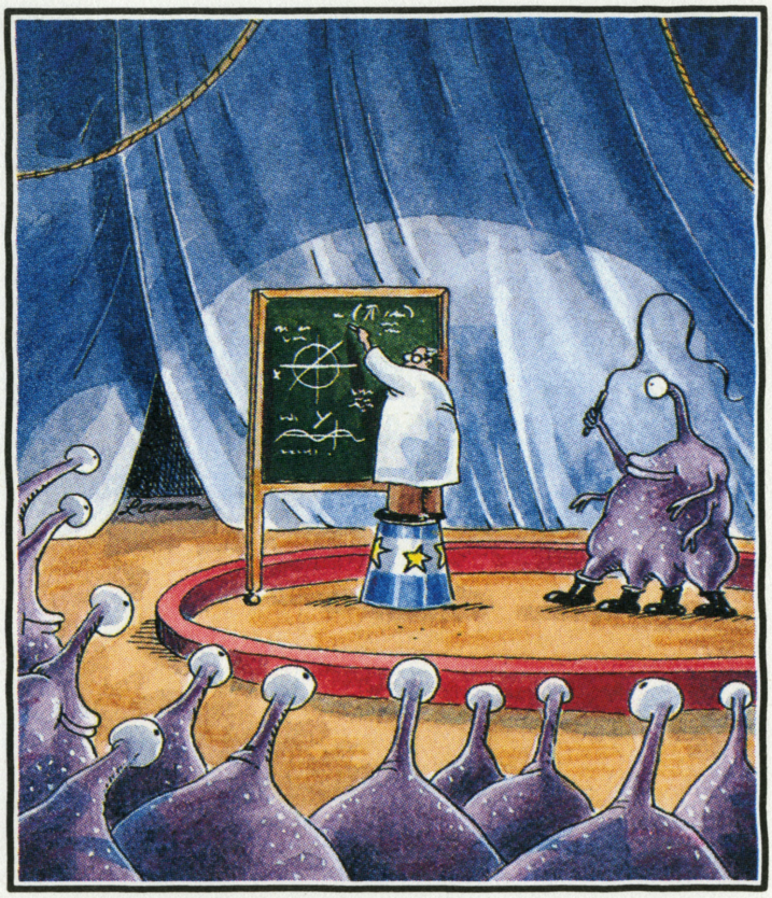
besitzt ein Maximum im Punkt $(0,-1)$. ○ wahr ○ falsch
c. Die Funktion

$$f\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \exp\left(\int_0^x \mathrm{e}^{-1/t^2}\,\mathrm{d}t\right)$$

ist konvex. ○ wahr ○ falsch
d. Die lineare Differenzialgleichung $\dot{x} = Ax$ mit

$$A = \begin{pmatrix} \sqrt{a} & -1 \\ \pi & 0 \end{pmatrix}$$

beschreibt für $a > 2\pi$ einen Strudel. ○ wahr ○ falsch



Abducted by an alien circus company, Professor Doyle is forced to write calculus equations in center ring.