Erste Scheinklausur
Analysis 2
Ss 2018
02.06.2018

- Es gibt 7 Aufgaben. Die jeweilige Punktzahl steht am linken Rand.
- Die Maximalpunktzahl ist 40. Zum Bestehen der Klausur sind 16 Punkte hinreichend.
- Die Bearbeitungszeit beträgt 90 Minuten.
- Es sind keine Hilfsmittel zugelassen.
- In allen Aufgaben sind alle Schritte zu begründen.
- Verwenden Sie pro Aufgabe jeweils ein neues Blatt.
- Abgaben mit Bleistift oder Rotstift sind nicht zulässig.
- Tragen sie bitte Namen, Matrikelnummer sowie Namen Ihres Tutors ein.
- Und nun wie immer: Viel Erfolg!

Name M-Nr Tutor

1	2	3	4	5	6	7		Σ

⟨7⟩ **Aufgabe 1**

a. Geben Sie die Definition dafür, dass $A \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge ist.
b. Geben Sie ein Beispiel einer Menge in $\mathbb{R}^n$, die offen *und* abgeschlossen ist.
c. Untersuchen Sie, ob die Menge $X = \{e^{-n} : n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}$ offen, abgeschlossen oder kompakt ist.
d. Sei $F \subset \mathbb{R}^n$ eine abgeschlossene Menge und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge in F. Sei $x = \lim_{n\to\infty} x_n$. Zeigen Sie, dass $x \in F$.

■ *Lösung*

a. Siehe Skript.
b. $\mathbb{R}^n$ oder $\varnothing$.
c. Die Menge X ist nicht offen, da zum Beispiel $1/e$ ein isolierter Punkt von X ist. Sie ist auch nicht abgeschlossen, da sie ihren Häufungspunkt 0 nicht enthält. Und da sie nicht abgeschlossen ist, kann sie auch nicht kompakt sein.
d. Angenommen, es ist $x \notin F$. Dann liegt x in der offenen Menge F^c, es gibt also auch eine offene Umgebung U von x, die ganz in F^c enthalten ist. In dieser Umgebung können dann keine Glieder der Folge (x_n) liegen. Somit kann x auch kein Grenzwert einer Folge in F sein. Das ist ein Widerspruch. ■

⟨6⟩ **Aufgabe 2**

a. Geben Sie die Definition dafür, dass eine Folge $(f_k)_{k\geqslant 1}$ von Funktionen

$$f_k : [a,b] \to \mathbb{R}$$

(i) punktweise respektive (ii) gleichmäßig gegen eine Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ konvergiert.
b. Untersuchen Sie die Funktionenfolge

$$g_n : [0,2] \to \mathbb{R}, \quad g_n(x) = \left(\frac{x+1}{3}\right)^n$$

auf gleichmäßige Konvergenz.
c. Untersuchen Sie ebenfalls die Funktionenfolge

$$h_n : [0,1] \to \mathbb{R}, \quad h_n(x) = \frac{1}{n}\sqrt{1+n^2x^2}$$

auf gleichmäßige Konvergenz.

■ *Lösung*

a. Siehe Skript.
b. Es ist

$$0 \leqslant \frac{x+1}{3} \begin{cases} < 1, & 0 \leqslant x < 2, \\ = 1, & x = 2, \end{cases}$$

und deshalb

$$\lim_{n\to\infty} g_n(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leqslant x < 2, \\ 1, & x = 2. \end{cases}$$

Da dieser Limes nicht stetig ist, kann die Konvergenz nicht gleichmäßig sein.

c. Für $0 \leqslant x \leqslant 1$ ist

$$\lim_{n\to\infty} h_n(x) = \lim_{n\to\infty} \sqrt{x^2 + 1/n^2} = |x| = x,$$

und

$$\left|\sqrt{x^2 + 1/n^2} - x\right| = \frac{1/n^2}{\left|\sqrt{x^2 + 1/n^2} + x\right|} \leqslant \frac{1/n^2}{\sqrt{1/n^2}} = \frac{1}{n}$$

gleichmäßig für $0 \leqslant x \leqslant 1$. Daher ist die Konvergenz gleichmäßig. *Bemerkung:* Die Folge konvergiert sogar auf ganz $\mathbb{R}$ gleichmäßig gegen $|x|$. ■

⟨6⟩ **Aufgabe 3**

Bestimmen Sie im Falle ihrer Existenz die folgenden Integrale.

a. $\displaystyle\int_0^\infty t^2 \mathrm{e}^{-t^3}\,\mathrm{d}t$ *b.* $\displaystyle\int_1^\infty \log\left(\frac{1}{t}\right)\mathrm{d}t$ *c.* $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1 + \frac{1}{t^{2/3}}}\,\mathrm{d}t$

■ *Lösung*

a. Das Integral existiert:

$$\int_0^\infty t^2 \mathrm{e}^{-t^3}\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{3}\,\mathrm{e}^{-t^3}\Big|_0^\infty = \frac{1}{3}.$$

b. Das Integral existiert nicht:

$$\int_1^\infty \log\left(\frac{1}{t}\right)\mathrm{d}t = -\int_1^\infty \log t\,\mathrm{d}t = -\infty.$$

c. Mit der Substitution $t = u^3$ und $\mathrm{d}t = 3u^2\,\mathrm{d}u$ wird

$$\begin{aligned} \int_0^1 \sqrt{1 + \frac{1}{t^{2/3}}}\,\mathrm{d}t &= \int_0^1 3u^2\sqrt{1 + 1/u^2}\,\mathrm{d}u \\ &= \int_0^1 3u\sqrt{u^2+1}\,\mathrm{d}u = (u^2+1)^{3/2}\Big|_0^1 = \sqrt{8} - 1. \end{aligned}$$ ■

⟨2⟩ **Aufgabe 4**

Sei $f\colon [-1,1] \to \mathbb{R}$ stetig. Zeigen Sie, dass

$$\int_0^\pi f(\sin t)\cos t \,\mathrm{d}t = 0.$$

■ *Lösung* Mit einer Stammfunktion F von f ist aufgrund der Substitutionsregel

$$\int_0^\pi f(\sin t)\cos t \,\mathrm{d}t = F(\sin t)\Big|_0^\pi = F(0) - F(0) = 0. \quad ■$$

⟨6⟩ **Aufgabe 5**

a. Bestimmen Sie

$$\lim_{h\to 0}\int_2^{2+h} \frac{\mathrm{e}^{\sin^2(x)}}{h}\,\mathrm{d}x.$$

b. Bestimmen Sie alle $\lambda \in \mathbb{R}$, für die das Integral

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{\lambda t}\sin(\mathrm{e}^{-t})\,\mathrm{d}t$$

konvergiert.

■ *Lösung*

a. Da der Integrand stetig ist, gilt aufgrund des Riemannschen Lemmas

$$\lim_{h\to 0}\int_2^{2+h} \frac{\mathrm{e}^{\sin^2(x)}}{h}\,\mathrm{d}x = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_2^{2+h} \mathrm{e}^{\sin^2(x)}\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{\sin^2(x)}\Big|_{x=2}.$$

b. Mit der Substitution $x = \mathrm{e}^{-t}$ wird

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{\lambda t}\sin(\mathrm{e}^{-t})\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{\sin x}{x^{\lambda+1}}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{x^\lambda}\,\mathrm{d}x.$$

Da $(\sin x)/x$ auf $[0,1]$ stetig fortgesetzt werden kann, hängt die Konvergenz allein von $1/x^\lambda$ ab. Somit konvergiert das Integral für alle $\lambda < 1$ und divergiert für alle $\lambda \geqslant 1$. ■

⟨5⟩ **Aufgabe 6**

a. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differenzialgleichung

$$\dot{x} = x\cos(2t). \tag{$\dagger$}$$

b. Bestimmen Sie diejenigen Lösungen φ von (†) mit $\lim_{t\to\infty}\varphi(t) = 0$.

c. Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems

$$\dot{x} - x\cos(2t) = \cos(2t), \qquad x(0) = 1.$$

▪ *Lösung*

a. Separation der Variablen ergibt die allgemeine Lösung

$$x(t) = c\exp\left(\frac{\sin 2t}{2}\right), \qquad c \in \mathbb{R}. \tag{$\ddagger$}$$

b. Dazu muss $c = 0$ sein. Dies ist also die (triviale) Nulllösung.

c. Variation der Konstanten in (‡) führt zu

$$\dot{c} = \exp\left(-\frac{\sin 2t}{2}\right)\cos 2t,$$

also

$$c = -\exp\left(-\frac{\sin 2t}{2}\right) + c_0.$$

Zusammen mit der allgemeinen Lösung der homogenen Gleichung ist damit

$$x(t) = c\exp\left(\frac{\sin 2t}{2}\right) - 1$$

die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung. Die Anfagnsbedingung $x(0) = 1$ führt dann zu

$$c = 2.$$

Bemerkung: Dasselbe Ergebnis erhält man schneller, wenn man bemerkt, dass die inhomogene Differenzialgleichung äquivalent ist zu

$$(x+1)^{\cdot} = (x+1)\cos(2t).$$

Man muss also nur die Lösung der homogenen Differenzialgleichung verschieben. ▪

⟨8⟩ **Aufgabe 7**
Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Behauptungen.
a. Jede beschränkte Funktion $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ ist integrierbar.
b. Die Indikatorfunktion jeder Teilmenge von $[0,1]$ ist eine Treppenfunktion.
c. Jede offene Überdeckung von $(0,1)$ besitzt eine endliche Teilüberdeckung.
d. Die Kurve

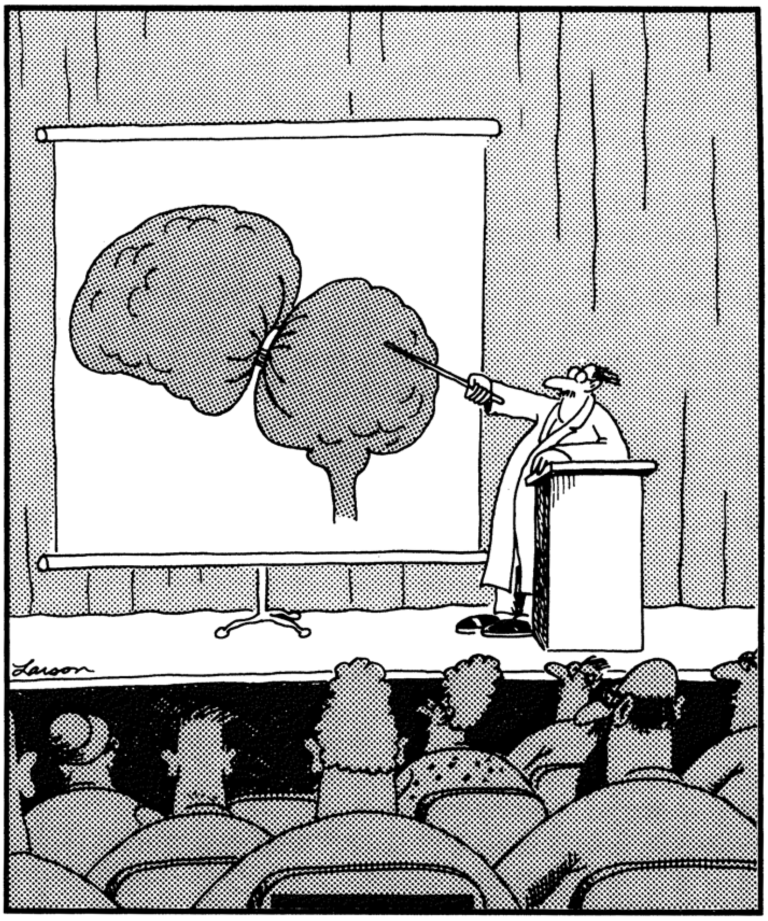
$$\gamma: [-1,1] \to \mathbb{R}^2, \quad \gamma(t) = \begin{pmatrix} t \\ |t| \end{pmatrix}$$

ist rektifizierbar.

■ *Lösung*
a. Falsch. Die Dirichletfunktion ist beschränkt, aber nicht integrierbar.
b. Falsch. Die Indikatorfunktion von $\mathbb{Q} \cap [0,1]$, also wiederum die Dirichletfunktion, ist keine Treppenfunktion.
c. Falsch. Zum Beispiel überdecken die offenen Intervalle

$$I_n = (2^{-n}, 1), \qquad n \geqslant 1,$$

das Intervall $(0,1)$, aber es gibt keine endliche Teilüberdeckung.
d. Richtig. Dies ist der Graph der Betragsfunktion über $[-1,1]$, seine Länge ist $2\sqrt{2}$. ■



Professor Lundquist, in a seminar on compulsive thinkers, illustrates his brain-stapling technique.