V1

1.1)

i) • Für jedes feste $n \in \mathbb{N}$ ist das Intervall $[n^3, n^3+1]$ abgeschlossen. Also ist M_1 als Vereinigung abg. Mengen wieder abgeschlossen.

• Es gilt

$$1 \in M_1 \text{ und } 1 \in \partial M_1 \Rightarrow M_1 \cap \partial M_1 \neq \emptyset$$

Also ist M_1 nicht offen.

• Eine Menge in $\mathbb{R}^n, n \in \mathbb{N}$ ist genau dann kompakt, wenn sie abgeschlossen und beschränkt ist. Es gilt

$$1 \leq x \leq 2018^3 + 1 \quad \forall x \in M_1$$

Also ist M_1 kompakt.

ii) • Sei $x_n := (\frac{1}{n}, 1), n \in \mathbb{N} \Rightarrow x_n \in M_2 \; \forall n \in \mathbb{N}$

Weiter gilt

$$\lim_{n \to \infty} x_n = (0,1) \notin M_2$$

D.h. $\overline{M_2} \neq M_2$ und M_2 ist nicht abgeschlossen.

• Seien $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ mit $r_1 < r_2$, dann ex. ein $r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ mit

$$r_1 < r < r_2 \quad \text{(siehe Vorlesung)}$$

Daraus folgt $\mathring{M}_2 = \emptyset$. Also ist M_2 nicht offen

• Da M_2 nicht ~~kompakt~~ abgeschlossen ist, ist M_2 auch nicht kompakt.

iii)

- Offensichtlich gilt

$$\mathring{M}_3 = M_3$$

Also ist M_3 offen

- Sei $x_n := \left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right)$, dann folgt $x_n \in M_3 \ \forall n \in \mathbb{N}$ und

$$\lim_{n\to\infty} x_n = (0,0) \notin M_3$$

- Also ist M_3 nicht abgeschlossen und damit nicht kompakt.

iv) Sei $f: \mathbb{R}\setminus\{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) := e^{x\sin\left(\frac{1}{x}\right)} + |x|$

$$\Rightarrow \quad M_4 = f^{-1}(\{1\})$$

f ist stetig und da Urbilder abg. Mengen unter stetigen Funktionen wieder abg. sind, ist M_4 abgeschlossen.

Sei $x_n := \frac{1}{\pi n} \Rightarrow f(x_n) = \underbrace{e^{\frac{1}{\pi n}\sin(\pi n)}}_{=1} + \frac{1}{\pi n} \neq 1 \ \forall n \in \mathbb{N}$

$$\Rightarrow x_n \notin M_4 \ \forall n \in \mathbb{N}$$

Da aber

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0 \in M_4$$

gilt, kann kein $\varepsilon > 0$ existieren, so dass $B_\varepsilon(0) \subseteq M_4$ gilt.

Für jedes Element $x \in M_4$ gilt

$$\underbrace{e^{x\sin\left(\frac{1}{x}\right)}}_{>0} + |x| = 1$$

Damit gilt $|x| < 1$ und die Menge M_4 ist kompakt.

1.2

GA: $f^{-1}: f(K) \to \mathbb{R}^n$ ist nicht stetig.

Dann ex. $\varepsilon > 0$ und eine Folge $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $f(K)$ mit

$$y_n \xrightarrow{n \to \infty} y \in f(K) \text{ und } |f^{-1}(y_n) - f^{-1}(y)| \geq \varepsilon \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Da f injektiv ist, ex. zu jedem y_n ein eindeutiges $x_n \in K$ mit

$$f(x_n) = y_n \quad \text{und} \quad f(x) = y$$

für ein $x \in K$. Damit folgt

$$|x_n - x| = |f^{-1}(y_n) - f^{-1}(y)| \geq \varepsilon \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (*)$$

Insbesondere folgt $x_n \not\to x$.

Da K kompakt ist, ex. eine konvergente Teilfolge $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$, so dass

$$x_{n_k} \xrightarrow{k \to \infty} \hat{x} \in K$$

Da f stetig ist, folgt

$$y \xleftarrow{k \to \infty} y_{n_k} = f(x_{n_k}) \xrightarrow{k \to \infty} f(\hat{x})$$

GW ist eindeutig
$$\Rightarrow \quad y = f(\hat{x}) \quad \Rightarrow \quad \hat{x} = f^{-1}(y) = x$$

$$\Rightarrow \quad x_{n_k} \xrightarrow{k \to \infty} x \quad \lightning \text{ zu } (*)$$

1.3

ii) $x = 0 \Rightarrow f_n(x) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Sei $x > 0 \Rightarrow 0 \leq f_n(x) = \frac{nx}{n^2x^2+1} = \frac{1}{nx + \underbrace{\frac{1}{nx}}_{>0}} \leq \frac{1}{nx} \longrightarrow 0$

Also konv. f_n punktweise gegen $f \equiv 0$.

Weiter gilt

$$f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow \sup_{x \in [0,1]} f_n(x) \geq \frac{1}{2}$$

$\Rightarrow$ f_n konv. nicht glm. gegen f.

i) Es gilt

$$0 \leq \frac{1}{n} e^{-\frac{x}{n}} \leq \frac{1}{n} \xrightarrow{n \to \infty} 0$$

$\Rightarrow$ f_n konv. glm. gegen $f \equiv 0$.

iii) Sei $x \in \mathbb{R}$ fest. Dann gilt wegen der Stetigkeit von $\sin(\cdot)$

$$\lim_{n \to \infty} \sin\left(\frac{x}{n}\right) = \sin\left(\lim_{n \to \infty} \frac{x}{n}\right) = \sin(0) = 0$$

$\Rightarrow$ f_n konv. punktweise gegen $f \equiv 0$.

Weiter gilt $f_n\left(\frac{\pi n}{2}\right) = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Also kann f_n nicht glm. konvergieren.

iv) Es gilt für $x \neq 0$

$$f_n(x) = x \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{2}{2+x}\right)^k \xrightarrow{n \to \infty} x \frac{1}{1 - \frac{2}{2+x}} = 2 + x$$

$$\Rightarrow \lim_{n \to \infty} f_n(x) = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ 2+x, & x > 0 \end{cases}$$

Da f_n stetig sind und f eine Unstetigkeitsstelle in $x=0$ hat, kann f_n nicht glm. gegen f konvergieren. (siehe Vorlesung)

1.4

Nach Vorlesung ist eine stetige Funktion auf kompakten Mengen gleichmäßig stetig, d.h.

$$\forall \varepsilon_1 > 0 \; \exists \delta_1 > 0 : \; |x-y| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon_1 \quad (*)$$

Da $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ glm. gegen g konvergiert, gilt

$$\forall \varepsilon_2 > 0 \; \exists N \in \mathbb{N} : \; |g_n(x) - g(x)| < \varepsilon_2$$

für alle $x \in A$. Sei $\varepsilon_1 > 0$ fest, dann ex. ein $\delta_1 > 0$, so dass

$$|x-y| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon_1$$

gilt. Wähle nun $\varepsilon_2 := \delta_1$, dann ex. ein $N \in \mathbb{N}$ mit

$$|g_n(x) - g(x)| < \delta_1 \quad \forall n \geq N.$$

Damit folgt nach $(*)$ sofort

$$|f(g_n(x)) - f(g(x))| < \varepsilon_1 .$$

D.h. $h_n := f \circ g_n$ konvergiert glm. gegen $h := f \circ g$.

V2

2.1)

i) $$\int \cos(3x) e^{\sin(3x)+3} dx = \frac{1}{3} e^{\sin(3x)+3} + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

ii) Wir unterscheiden zwischen $\alpha = -1$ und $\alpha \neq -1$

1. Fall: $\alpha \neq -1$

Partielle Integration liefert

$$\int \underset{\uparrow}{x^\alpha} \underset{\downarrow}{\ln(x)} dx = \frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1} \ln(x) - \frac{1}{\alpha+1} \int x^\alpha dx + c$$

$$= \frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1} \ln(x) - \frac{1}{(\alpha+1)^2} x^{\alpha+1} + c$$

2. Fall: $\alpha = -1$

$$\int \frac{\ln(x)}{x} dx \underset{\frac{du}{dx} = \frac{1}{x}}{\overset{u = \ln(x)}{=}} \int u \, du = \frac{1}{2} u^2 + c = \frac{1}{2} (\ln(x))^2 + c$$

iii)

$$\int \frac{e^{2x}}{e^x + 1} dx \underset{\frac{du}{dx} = u}{\overset{u = e^x}{=}} \int \frac{u^2}{u+1} \cdot \frac{1}{u} du = \int \frac{u+1}{u+1} - \frac{1}{u+1} du$$

$$= u - \ln(u+1) + c = e^x - \ln(e^x + 1) + c$$

iv) Wir verwenden $\frac{d}{dx}(\tan(x)) = \frac{1}{\cos^2(x)}$ und integrieren partiell:

$$\int \frac{x}{\cos^2(x)} dx = x \tan(x) - \int \tan(x) dx + C = x \tan(x) + \ln(|\cos(x)|) + c$$

2.2

i) $$\int_0^{\ln(e-1)} \frac{e^x-1}{e^x+1}\,dx = \int_0^{\ln(e-1)} \frac{e^x}{e^x+1} - \int_0^{\ln(e-1)} \frac{1}{e^x+1}\,dx$$

$$= \ln(e^x+1)\Big|_0^{\ln(e-1)} - \int_0^{\ln(e-1)} \frac{e^x+1}{e^x+1}\,dx + \int_0^{\ln(e-1)} \frac{e^x}{e^x+1}\,dx$$

$$= \ln(e^x+1)\Big|_0^{\ln(e-1)} - x\Big|_0^{\ln(e-1)} + \ln(e^x+1)\Big|_0^{\ln(e-1)}$$

$$= 2\Big(\underbrace{\ln(e-1+1)}_{=\ln(e)=1} - \underbrace{\ln(e^0+1)}_{=\ln(2)}\Big) - \ln(e-1)$$

$$= 2 - 2\ln(2) - \ln(e-1)$$

ii) $$\int_2^{\sqrt{13}} x\sqrt{x^2-4}\,dx \underset{\frac{du}{dx}=2x}{\overset{u=x^2-4}{=}} \frac{1}{2}\int_0^9 \sqrt{u}\,du = \frac{1}{2}\,\frac{2}{3}\,u^{\frac{3}{2}}\Big|_0^9 = \frac{1}{3}9^{\frac{3}{2}} = 9$$

iii) $$\int_{-2}^{-1} \frac{21x^2-1}{x-7x^3}\,dx = -\int_{-2}^{-1} \frac{1-21x^2}{x-7x^3}\,dx = -\ln(x-7x^3)\Big|_{-2}^{-1}$$

$$= -\big(\ln(-1+7) - \ln(-2+7\cdot 8)\big)$$

$$= -\ln\left(\frac{6}{54}\right) = -\ln\left(\frac{1}{9}\right) = \ln(9)$$

iv) Für das unbestimmte Integral gilt

$$\int e^{\sqrt{x+1}}\,dx \underset{\frac{du}{dx}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{x+1}}}{\overset{u=\sqrt{x+1}}{=}} 2\int u e^u\,du \overset{\text{partiell}}{=} 2e^u(u-1) = 2e^{\sqrt{x+1}}(\sqrt{x+1}-1)$$

$$\Rightarrow \int_0^1 e^{\sqrt{x+1}}\,dx = 2e^{\sqrt{x+1}}(\sqrt{x+1}-1)\Big|_0^1 = 2e^{\sqrt{2}}(\sqrt{2}-1)$$

2.3

a) Sei $x \in \mathbb{R}$ mit $x \neq (2k+1)\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ und $u := \tan(\frac{x}{2})$.

Dann gilt

i) $$\frac{2u}{1+u^2} = \frac{2\tan(\frac{x}{2})}{1+\frac{\sin^2(\frac{x}{2})}{\cos^2(\frac{x}{2})}} = 2\frac{\frac{\sin(\frac{x}{2})}{\cos(\frac{x}{2})}}{\frac{1}{\cos^2(\frac{x}{2})}}$$

$$= 2\sin(\tfrac{x}{2})\cos(\tfrac{x}{2})$$

$$= 2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2i}\left(e^{i\frac{x}{2}} - e^{-i\frac{x}{2}}\right)\left(e^{i\frac{x}{2}} + e^{-i\frac{x}{2}}\right)$$

$$= \frac{1}{2i}\left(e^{ix} - e^{-ix}\right) = \sin(x)$$

ii)

$$\frac{1-u^2}{1+u^2} = \cos^2(\tfrac{x}{2}) - \sin^2(\tfrac{x}{2}) = \frac{1}{4}\left(e^{ix} + 2 + e^{-ix}\right) + \frac{1}{4}\left(e^{ix} - 2 + e^{-2ix}\right)$$

$$= \cos(x)$$

b) Substituiere $u = \tan(\frac{x}{2}) \Rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{1}{2\cos^2(\frac{x}{2})} = \frac{1}{1+\cos(x)} \overset{a)}{=} \frac{1+u^2}{2}$

Damit folgt

$$\int \frac{1}{\sin(x)+\cos(x)+1}\,dx = \int \frac{1}{\frac{2u}{1+u^2} + \frac{1-u^2}{1+u^2} + 1} \cdot \frac{2}{1+u^2}\,du = \int \frac{2}{2(u+1)}\,du$$

$$= \ln(|\tan(\tfrac{x}{2})|) + C$$

2.4

Ziel: Finde jeweils ein Intervall $[a,b]$ mit einer Intervallzerlegung $Z=(t_0,\dots,t_n)$, eine Treppenfkt. φ_n mit $\varphi_n\big|_{(t_{k-1},t_k)} = c_k$ und

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} c_k (t_k - t_{k-1}),$$

so dass φ_n gleichmäßig gegen eine Funktion f konvergiert. Dann folgt

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \int_a^b f(x)\,dx$$

i) Betrachte die Intervallzerlegung $Z=\{t_k=\frac{k}{n}\,;\,k=0,\dots,n\}$ des Intervalls $[0,1]$ und die Treppenfunktion

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right), & x\in(t_{k-1},t_k) \\ 1, & x=0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Dann konvergiert φ_n glm. gegen f, wobei $f(x)=\cos(\pi x)$.
Nach Definition folgt

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \underbrace{\frac{1}{n}}_{=t_k-t_{k-1}} \underbrace{\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)}_{=c_k} = \int_0^1 \cos(\pi x)\,dx = \frac{1}{\pi}\sin(\pi x)\Big|_0^1 = 0$$

ii) Es gilt

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{n}{k^2+n^2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \cdot \frac{n^2}{k^2+n^2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \frac{1}{\left(\frac{k}{n}\right)^2+1}$$

Wähle $Z = \left\{ \frac{k}{n} = t_k \mid k = 0, \dots, n \right\}$ und

$$\varphi_n(x) := \begin{cases} \frac{1}{\left(\frac{k}{n}\right)^2+1} & , \; x \in (t_{k-1}, t_k) \\ 1 & , \; x = 0 \\ 0 & , \; \text{sonst} \end{cases}$$

Dann konvergiert φ_n glm. auf $[0,1]$ gegen die Funktion

$$x \mapsto f(x) = \frac{1}{x^2+1}.$$

Damit folgt

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{k^2+n^2} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \underbrace{\frac{1}{n}}_{t_k - t_{k-1}} \underbrace{\frac{1}{\left(\frac{k}{n}\right)^2+1}}_{c_k} = \int_0^1 \frac{1}{x^2+1} dx$$

$$= \arctan\Big|_0^1 = \arctan(1) = \frac{\pi}{4}$$

iii) Es gilt

$$\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{n}{k^2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{(n+k)^2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \frac{n^2}{(n+k)^2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \frac{1}{\left(1+\frac{k}{n}\right)^2}$$

Wähle $Z = \left\{ t_k = \frac{k}{n} \mid k = 0, \dots, n \right\}$ und $\varphi_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{\left(1+\frac{k}{n}\right)^2} & , \; x \in (t_{k-1}, t_k) \\ 1 & , \; x = 0 \\ 0 & , \; \text{sonst} \end{cases}$

$\Rightarrow \quad \varphi_n \xrightarrow{\text{glm.}} f \; , \; f(x) = \frac{1}{(1+x)^2}$

Damit folgt $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{n}{k^2} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \frac{1}{\left(1+\frac{k}{n}\right)^2} = \int_0^1 \frac{1}{(x+1)^2} dx = \frac{1}{2}$

2.5

a) Es gilt

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)\sin^{n-1}(x)\,dx = \underbrace{-\cos(x)\sin^{n-1}(x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}}_{=0} + (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(x)\sin^{n-2}(x)\,dx$$

$$= (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin^2(x))\sin^{n-2}(x)\,dx = (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n$$

$$\Leftrightarrow \quad I_n = (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n$$

$$\Leftrightarrow \quad I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2} \quad \text{mit } I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{\pi}{2},\ I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)\,dx = 1$$

b) Nach a) gilt

$$I_{2n} = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdots\frac{2n-1}{2n}$$

$$I_{2n+1} = \frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdots\frac{2n}{2n+1}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{I_{2n+1}}{I_{2n}} = \left(\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdots\frac{2n}{2n+1}\right)\left(\frac{2}{\pi}\cdot\frac{2}{1}\cdot\frac{4}{3}\cdots\frac{2n}{2n-1}\right)$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(\frac{2\cdot 2}{1\cdot 3}\cdot\frac{4\cdot 4}{3\cdot 5}\cdots\frac{2n\cdot 2n}{(2n-1)(2n+1)}\right) = \frac{2}{\pi}\prod_{k=1}^{n}\frac{(2k)^2}{(2k-1)(2k+1)}$$

(Wir müssen also $\lim_{n\to\infty} \frac{I_{2n+1}}{I_{2n}} = 1$ zeigen)

Wegen $1 \geq \sin(x) \geq 0 \ \forall x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ folgt $\sin^{2n}(x) \geq \sin^{2n+1}(x) \geq \sin^{2n+2}(x)$

$$\Rightarrow \quad I_{2n} \geq I_{2n+1} \geq I_{2n+2}$$

$$\Rightarrow \quad 1 \geq \frac{I_{2n+1}}{I_{2n}} \geq \frac{I_{2n+2}}{I_{2n}} = \frac{2n+1}{2n+2} \xrightarrow{n\to\infty} 1$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty}\frac{I_{2n+1}}{I_{2n}} = 1 \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}\frac{(2k)^2}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{\pi}{2}$$

V3

3.1)

i) Es gilt

$$\int_1^\infty \frac{x^2}{x^4+4x^2+1}\,dx \leq \int_1^\infty \frac{x^2}{x^4}\,dx = \lim_{R\to\infty}\int_1^R \frac{1}{x^2}\,dx$$

$$= \lim_{R\to\infty} -\frac{1}{x}\Big|_1^R = \lim_{R\to\infty}\left(-\frac{1}{R}+1\right) = 1$$

Damit konvergiert das Integral nach dem Majorantenkriterium.

ii) Es gilt

$$\int_{-1}^1 \frac{\sin(e^{\sqrt{x+1}})}{\sqrt{x+1}}\,dx \leq \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{x+1}}\,dx = \lim_{R\to -1}\int_R^1 \frac{1}{\sqrt{x+1}}\,dx$$

$$= \lim_{R\to -1} 2\sqrt{x+1}\Big|_R^1 = \lim_{R\to -1}\left(2\sqrt{2}-2\sqrt{R+1}\right)$$

$$= 2\sqrt{2}$$

Damit konvergiert das Integral nach dem Majorantenkriterium.

iii) Es gilt

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x}-\frac{1}{\sin(x)} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\sin(x)-x}{x\sin(x)} \overset{\text{l'Hospital}}{=} \lim_{x\to 0^+}\frac{\cos(x)-1}{\sin(x)+x\cos(x)}$$

$$\overset{\text{l'Hospital}}{=} \lim_{x\to 0^+}\frac{-\sin(x)}{\cos(x)+\cos(x)-x\sin(x)} = 0$$

Damit lässt sich die Funktion $x \mapsto \frac{1}{x}-\frac{1}{\sin(x)}$ auf $[0,1]$ stetig fortsetzen und wir können aus der Vorlesung folgern, dass das Integral $\int_0^1 \frac{1}{x}-\frac{1}{\sin(x)}\,dx$ konvergiert.

3.2

a) Sei $x \in \mathbb{R}$ beliebig. Hauptsatz d. Integralrechnung liefert

$$f(x) = f(0) + \int_0^x f'(y)\,dy$$

Damit folgt unmittelbar

$$|f(x)| \leq |f(0)| + \int_0^x \underbrace{|f'(y)|}_{\geq 0}\,dy$$

$$\leq |f(0)| + \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} |f'(y)|\,dy}_{< \infty \text{ n.V.}} < \infty$$

Wähle $C := |f(0)| + \int_{-\infty}^{\infty} |f'(y)|\,dy$

$$\rightarrow \qquad |f(x)| \leq C \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Also ist die Funktion beschränkt.

b) Die Umkehrung gilt <u>nicht</u>.

Gegenbeispiel: Sei $f(x) := \cos(x)$, dann ist f offensichtlich stetig differenzierbar auf ganz $\mathbb{R}$ und beschränkt.

Weiter gilt aber

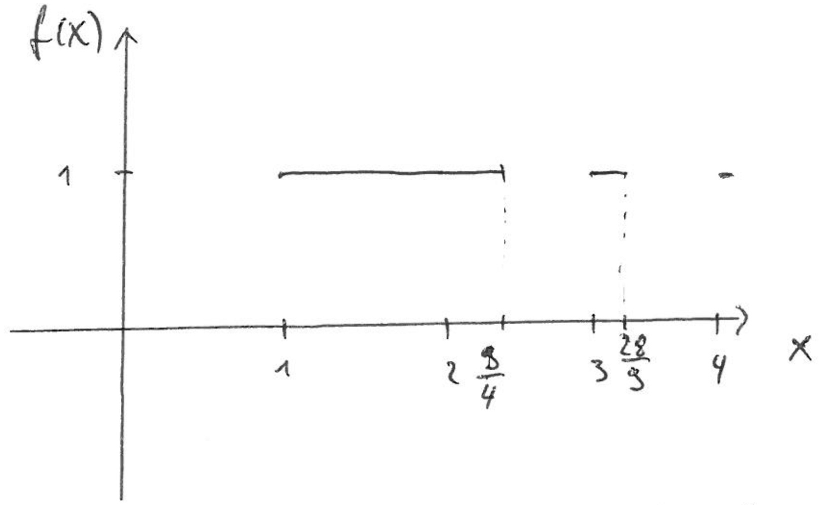
$$\int_{-\infty}^{\infty} |\sin(x)|\,dx \geq \int_0^{\infty} |\sin(x)|\,dx \geq \sum_{k=0}^{\infty} \int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi} |\sin(x)|\,dx$$

$$\underset{\uparrow}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi} \sin(x)\,dx = \sum_{k=0}^{\infty} 2 = \infty.$$

Es gilt $\sin(x) \geq 0 \;\forall x \in [2k\pi, (2k+1)\pi]$, $k \in \mathbb{Z}$.

3.3

Wir skizzieren f.



Das n-te Flächenstück, das der Graph von f mit der x-Achse einschließt, hat die Fläche $\int_n^{n+\frac{1}{n^2}} f(x)\,dx = \frac{1}{n^2}$. Damit folgt

$$\int_1^\infty f(x)\,dx = \sum_{n=1}^\infty \int_n^{n+\frac{1}{n^2}} f(x)\,dx = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2} < \infty$$

Die Existenz des uneigentl. Integrals folgt aus der Nichtnegativität von f.
Andererseits gilt

$$\sum_{n=1}^\infty f(n) = \sum_{n=1}^\infty 1 = \infty$$

Das Beispiel steht nicht im Widerspruch zum Integralvergleichskriterium, da f nicht monoton ist.
Das Beispiel zeigt auch, dass für die Konvergenz des uneigentlichen Integrals nicht notwendig $\lim_{x\to\infty} f(x)=0$ gelten muss (im Gegensatz zur Konvergenz von Reihen)

3.4

i) Sei $f(x) = \frac{e^{-2\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$, dann ist f offensichtlich positiv und monoton fallend (Zähler ist fallend, Nenner ist wachsend)

Wegen

$$\int_1^\infty \frac{e^{-2\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx \overset{u=\sqrt{x}}{=} 2\int_1^\infty e^{-2u}\,du = \lim_{R\to\infty} -e^{-2u}\Big|_1^R = e^{-2} < \infty$$

konvergiert die Reihe nach dem IVK.

ii) Die Funktion $f(x) = \frac{1}{x\ln(\ln(x))}$ ist nicht-negativ und monoton fallend für $x \geq 3$. Weiter gilt

$$\int_3^\infty \frac{1}{x\ln(\ln(x))}\,dx \overset{u=\ln(x)}{=} \int_{\ln(3)}^\infty \frac{1}{\ln u}\,du \overset{\ln(u)<u}{\geq} \int_{\ln(3)}^\infty \frac{1}{u}\,du = \infty$$

Damit divergiert die Reihe nach dem IVK.

c) Sei $f(x) = \frac{\ln(\ln(x))}{x(\ln(x))^2}$, dann gilt $f(x) \geq 0$ für $x \geq 3$.

Weiter gilt

$$\frac{d}{dx}f(x) = \frac{-\left(\ln(\ln(x)) + \frac{1}{\ln(x)}\right)}{(x\ln(\ln(x)))^2} < 0, \text{ denn}$$

$\ln(\ln(x)) > 0$ und $\frac{1}{\ln(x)} > 0$ für $x \geq 3$.

Mit

$$\int_3^\infty \frac{\ln(\ln(x))}{x(\ln(x))^2}\,dx \overset{u=\ln(x)}{=} \int_{\ln(3)}^\infty \frac{\ln(u)}{u^2}\,du \overset{\text{Aufg. 2.1 ii)}}{=} \lim_{R\to\infty}\left(-\frac{\ln(u)}{u} - \frac{1}{u}\Big|_{\ln(3)}^R\right)$$

$$= \frac{\ln(\ln(3))}{\ln(3)} + \frac{1}{\ln(3)} < \infty$$

folgt die Konvergenz der Reihe nach dem IVK.

V4

Zusatzaufgabe: Konvergiert das uneigentliche Integral $\int_0^\infty \sin(x^3)\,dx$?

Antwort: Ja!

Es gilt

$$\int_0^\infty \sin(x^3)\,dx = \underbrace{\int_0^1 \sin(x^3)\,dx}_{\leq C_1,\ \text{da } x \mapsto \sin(x^3) \text{ stetig in } [0,1] \text{ ist}} + \int_1^\infty \sin(x^3)\,dx$$

Weiter gilt

$$\lim_{R\to\infty} \int_1^R \sin(x^3)\,dx \overset{u=x^3}{\underset{\frac{du}{dx}=3x^2}{=}} \lim_{R\to\infty} \int_1^R \frac{\sin(u)}{3u^{\frac{2}{3}}}\,du$$

$$\overset{\text{Partielle}}{\underset{\text{Integration}}{=}} \underbrace{\lim_{R\to\infty} \frac{-\cos(u)}{3u^{\frac{2}{3}}}\Bigg|_1^R}_{=0+\frac{\cos(1)}{3}=C_2} - \lim_{R\to\infty} \frac{2}{9} \int_1^R \frac{\cos(u)}{u^{\frac{5}{3}}}\,du$$

Für das letzte Integral gilt:

$$\lim_{R\to\infty} \int_1^R \frac{\cos(u)}{u^{\frac{5}{3}}}\,du \leq \lim_{R\to\infty} \int_1^R \frac{1}{u^{\frac{5}{3}}}\,du = \lim_{R\to\infty} -\frac{3}{2x^{\frac{2}{3}}}\Bigg|_1^R$$

$$= \frac{3}{2}$$

Damit folgt insgesamt

$$\int_0^\infty \sin(x^3)\,dx < \infty$$

4.1

a) Es gilt

$$\dot{x} - e^{t-x} = e^{t} \iff \dot{x} = e^{t}(e^{-x}+1)$$

Trennung der Variablen liefert

$$\int \frac{1}{e^{-x}+1}\,dx = \int e^{t}\,dt$$

Rechtes Integral:

$$\int e^{t}\,dt = e^{t} + c$$

Linkes Integral:

$$\int \frac{1}{e^{-x}+1}\,dx \underset{\frac{du}{dx}=-u}{\overset{u=e^{-x}}{=}} \int \frac{-1}{u(u+1)}\,du \overset{PBZ}{=} \int \frac{1}{u+1}\,du - \int \frac{1}{u}\,du$$

$$= \ln\left(\frac{u+1}{u}\right) = \ln(e^{x}+1)$$

D.h.

$$e^{x(t)} = \exp(e^{t}+c) - 1$$

und damit

$$x(t) = \ln(\tilde{c}\,e^{e^{t}} - 1)$$

AWP: $x(0) = \ln(\tilde{c}e - 1) \overset{!}{=} 0 \iff \tilde{c} = \frac{2}{e}$

$$\Rightarrow \quad x(t) = \ln\left(\frac{2}{e}e^{e^{t}} - 1\right)$$

b) $$(t^2-3t+2)\dot{x} = \frac{1}{2}x - \frac{1}{x} = \frac{x^2-2}{2x}$$

Trennung der Variablen liefert

$$\int \frac{2x}{x^2-2}\,dx = \int \frac{1}{t^2-3t+2}\,dt$$

Rechte Seite:

$$\int \frac{1}{t^2-3t+2}\,dt \overset{PBZ}{=} \int \frac{1}{t-2}\,dt - \int \frac{1}{t-1}\,dt = \ln\left(\frac{t-2}{t-1}\right) + c$$

Linke Seite:

$$\int \frac{2x}{x^2-2}\,dx \overset{\left(\frac{f'}{f}\right)}{=} \ln(x^2-2)$$

D.h.

$$\ln(x^2-2) = \ln\left(\frac{t-2}{t-1}\right) + c$$

Wir erhalten damit zunächst die Lösungen

$$x_\pm(t) = \pm\sqrt{2 + \tilde{c}\,\frac{t-2}{t-1}}$$

AWP: $x(3) = -3$ (damit fällt x_+ weg)

$$\Rightarrow \quad 2 + \tilde{c}\,\frac{3-2}{3-1} \overset{!}{=} 9 \iff \tilde{c} = 14$$

Damit folgt

$$x(t) = -\sqrt{2 + 14\,\frac{t-2}{t-1}}$$

c) Es handelt sich um eine inhomogene DGL von der Form

$$\dot{x} = a(t)x + b(t)$$

Variation der Konstanten liefert die Lösung

$$x(t) = e^{\int_{t_0}^{t} a(s)\,ds} \left(x(0) + \int_{t_0}^{t} e^{-\int_{t_0}^{s} a(u)\,du} \, b(s)\,ds \right) \quad \text{(siehe Skript)}$$

Hier: $a(s) = -2s$, $b(s) = s e^{-s^2}$, $t_0 = 0$, $x(0) = 0$

Einsetzen liefert

$$x(t) = e^{-t^2} \Big(0 + \underbrace{\int_0^t e^{s^2} \cdot e^{-s^2} \cdot s\,ds}_{= \frac{1}{2}t^2} \Big) = \frac{1}{2} e^{-t^2} \cdot t^2$$

d) Bei der DGL

$$\ddot{x} = 2x^3$$

handelt es sich um eine DGL zweiter Ordnung.
Wir multiplizieren beide Seiten mit $\dot{x}$:

$$\dot{x}\ddot{x} = 2x^3 \cdot \dot{x} \qquad (1)$$

Nach der Kettenregel gilt

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\dot{x}^2\right) = \dot{x}\ddot{x} \quad \text{und} \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}x^4\right)$$

Damit müssen wir nur noch

$$\frac{1}{2}\dot{x}^2 = \frac{1}{2}x^4 + c, \quad \dot{x}(0) = 1 = x(0)$$

lösen. Wir erhalten die beiden Lösungen der Ableitungen

$$\dot{x}_{\pm} = \pm\sqrt{x^4 + \tilde{c}}$$

Das AWP liefert $1 = \pm\sqrt{1+\tilde{c}}$, d.h. $\tilde{c} = 0$ und $\dot{x}(t) = x^2(t) \overset{\text{T.d.V.}}{\Rightarrow} -\frac{1}{x} = t + \tilde{c} \overset{\text{AWP}}{\Rightarrow} x(t) = \frac{1}{1-t}$

4.2

a) Es handelt sich um eine separierbare DGL. Trennung der Variablen liefert

$$\int \frac{1}{x^2+1}\,dx = \int 8t\,dt, \quad \text{d.h.} \quad \arctan(x) = 4t^2 + c$$

Die Lösung ist also gegeben

$$x(t) = \tan(4t^2 + c)$$

Aus $x(0) = 1$ folgt $c = \frac{\pi}{4} \pmod{\pi\mathbb{Z}}$. Damit $4t^2 + c \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ gilt, muss $t \in (-\frac{\sqrt{\pi}}{4}, \frac{\sqrt{\pi}}{4})$ gelten. Damit ist

$$I = \left(-\frac{\sqrt{\pi}}{4}, \frac{\sqrt{\pi}}{4}\right)$$

das maximale Existenzintervall.

b) Trennung der Variablen liefert

$$\int e^{-x}\,dx = \int \cos(t)\,dt \Rightarrow e^{-x} = -\sin(t) + c \Rightarrow x(t) = -\ln(-\sin(t) + c).$$

Die Lösung ist genau dann auf ganz $\mathbb{R}$ definiert, wenn

$$-\sin(t) + c > 0 \text{ für alle } t \in \mathbb{R} \text{ gilt.}$$

Das ist genau dann erfüllt, wenn $x(0) = x_0 < 0$ gilt, denn

$$x_0 = -\ln(c) < 0 \Leftrightarrow c > 1 \Leftrightarrow -\sin(t) + c > 0 \ \forall t \in \mathbb{R}.$$

c)

(i) $\dot{x} = \frac{x(1-tx)}{t} = \frac{x}{t} - x^2$ (1)

Hinweis: Eine DGL von der Form

$$\dot{x} = f(t)\,x(t) + g(t)\,x^{\alpha}(t) \quad , \quad \alpha \neq 0,1$$

heißt bernoullische Differentialgleichung.
Hier ~~kann~~ man die Substitution

$$z(t) := (x(t))^{1-\alpha}$$

nutzen, dann erhält man

$$\dot{z} = (1-\alpha)\left(f(t)z(t) + g(t)\right),$$

was man z.B. mit Variation der Konstanten lösen kann.
Bei (1) handelt es sich um eine bernoullische DGL, deswegen substituieren wir

$$z(t) = \frac{1}{x(t)} \qquad (\alpha = 2)$$

Damit führen wir (1) zurück auf

$$\dot{z} = -\frac{z}{t} + 1$$

Variation d. Konstanten liefert

$$z(t) = \frac{1}{t}\left(c + \frac{1}{2}t^2\right)$$

Rücksubstitution:

$$x(t) = \frac{1}{z(t)} = \frac{t}{c + \frac{1}{2}t^2}$$

(ii)

Es gilt

$$\dot{x} = \frac{x^2 + 2tx}{t^2} = \left(\frac{x}{t}\right)^2 + 2\left(\frac{x}{t}\right) =: f\left(\frac{x}{t}\right)$$

mit $f(z) = z^2 + 2z$

Substitution: $z = \frac{x}{t} \Rightarrow \dot{z} = \frac{z^2 + z}{t}$

Trennung der Variablen liefert

$$\ln\left(\frac{z}{z+1}\right) = \ln(t) + C$$

$$\Rightarrow \quad \frac{z}{z+1} = \hat{c}\, t$$

Rücksubstitution:

$$\frac{\frac{x}{t}}{\frac{x}{t} + 1} = \hat{c}\, t \quad \Rightarrow \quad x(t) = \frac{\hat{c}\, t^2}{1 - \hat{c}\, t}$$

Beim Separieren kommen außerdem die konstanten Lösungen $z = -1$ und $z = 0$ hinzu. Also sind

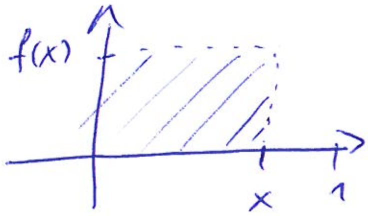
$$x(t) = -t \quad \text{und} \quad x(t) \equiv 0$$

ebenfalls Lösungen.

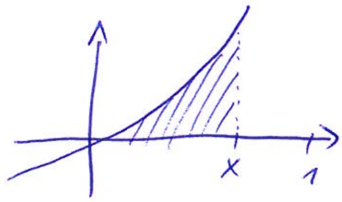
4.3

Sei $x \in (0,1]$

Fläche des Rechtecks $\hat{=}$ $x \cdot f(x)$



Fläche unter dem Graphen von $f \hat{=} \int_0^x f(y)dy$



Die zweite Bedingung liefert die Gleichung

$$x f(x) = n \cdot \int_0^x f(y)dy \quad \forall x \in [0,1]$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}(x f(x)) = \frac{d}{dx}\left(n \int_0^x f(y)dy\right) \underset{\text{d. Integralrechnung}}{\overset{\text{Hauptsatz}}{=}} n \cdot f(x)$$

$$\Leftrightarrow \quad x f'(x) = n-1\ f(x)$$

Trennung der Variablen:

$$\ln(f) = (n-1)\ln(x) + c \quad \Rightarrow \quad f(x) = e^c x^{n-1}$$

Bedingung (i): $\quad f(1) = e^c \overset{!}{=} a \quad (\Leftrightarrow) \quad c = \ln(a)$

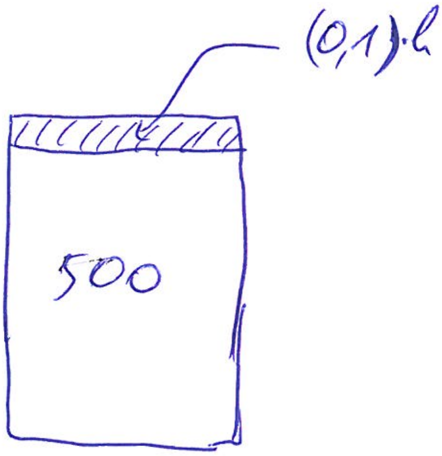
$$\Rightarrow \quad f(x) = a \cdot x^{n-1}$$

4.4

Wir rechnen in den Einheiten Liter und Sekunde.

Sei $V(t)$ das Volumen von dem Whisky zum Zeitpunkt t.

Wir befüllen das Fass $h>0$ Sekunden lang mit Wasser



Setze $A(t) := \dfrac{V(t)}{500 + (0,1)\cdot h}$

Ausgelassener Whisky: $A(t)\cdot(0,1)\cdot h$

$$\Rightarrow \quad V(t+h) = V(t) - A(t)\cdot(0,1)\cdot h$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{V(t+h) - V(t)}{h} = -\frac{V(t)}{500+(0,1)\cdot h}\cdot(0,1)$$

Da die Flüssigkeit sofort abfliesst, muss $h \to 0$ betrachtet werden, d.h.

$$V'(t) = -\frac{1}{5000} V(t)$$

Trennung der Variablen:

$$\ln(V) = \int \frac{1}{v}\, dv = -\frac{1}{5000} t + c \quad \Rightarrow \quad V(t) = \tilde{c}\, e^{-\frac{1}{5000}t}$$

AWP: $V(0) = 500 \Rightarrow V(t) = 500\, e^{-\frac{1}{5000}t}$

10% Whisky $\hat{=}$ 50 Liter

$\Rightarrow V(t_0) \overset{!}{=} 50 \Leftrightarrow 50\, e^{-\frac{1}{5000}t_0} = 50 \Leftrightarrow t_0 = -5000 \ln\left(\frac{1}{10}\right) \approx$ 3 Stunden und 12 Min.

V5

5.1

a) Wir betrachten o.B.d.A

$$y(x) = x^{\frac{3}{2}}, \quad x \in [0, 2018]$$

Parametrisierung:

$$\gamma : [0, 2018] \to \mathbb{R}^2, \quad \gamma(t) = \begin{pmatrix} t \\ t^{\frac{3}{2}} \end{pmatrix}$$

$$\to \quad \dot{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{3}{2}\sqrt{t} \end{pmatrix}, \quad \|\dot{\gamma}(t)\| = \sqrt{1 + \frac{9}{4}t}$$

Für die Bogenlängenfunktion gilt somit

$$s(t) = \int_0^t \|\dot{\gamma}(y)\| \, dy = \int_0^t \sqrt{1 + \frac{9}{4}y} \, dy$$

$$= \frac{8}{27}\left(1 + \frac{9}{4}t\right)^{\frac{3}{2}} - \frac{8}{27}$$

Die gesuchte Länge ist damit

$$L(\gamma) = s(2018) = \frac{8}{27}\left(1 + \frac{9}{4} 2018\right)^{\frac{3}{2}} - \frac{8}{27}$$

b) Die Bogenlängenfunktion $t \mapsto s(t)$ ist stetig und streng monoton wachsend, besitzt also eine Umkehrfunktion $y \mapsto s^{-1}(y)$, $y \in [0, L(\gamma)]$. Setze

$$\varphi(y) := \gamma(s^{-1}(y)), \quad y \in [0, L(\gamma)],$$

und bezeichne $b(y)$ die Bogenlängenfunktion von φ, dann gilt

$$b(y) = s(s^{-1}(y)) = y.$$

D.h. die Länge des Teilweges $\varphi([0, y_0])$ ist y_0.
Konkret ist die Umkehrfunktion gegeben durch

$$s^{-1}(y) = \left(\frac{8}{27} + y\right)^{\frac{2}{3}} - \frac{4}{9}$$

Damit ist

$$\varphi(y) := \begin{pmatrix} s^{-1}(y) \\ (s^{-1}(y))^{\frac{3}{2}} \end{pmatrix}$$

die gesuchte Parametrisierung.

5.2

a) Die Surjektivität von γ folgt aus der Surjektivität der ersten Komponenten.

Für die Differenzierbarkeit von γ müssen wir nur die Differenzierbarkeit von

$$t \mapsto t^2 \cos\left(\frac{\pi}{t^2}\right) =: f(t)$$

in $t=0$ nachweisen. Es gilt nach Definition $f(0)=0$, d.h.

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(h)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} h \underbrace{\cos\left(\frac{\pi}{h^2}\right)}_{|\cdot|\leq 1} = 0$$

Damit ist γ differenzierbar in $[0,1]$.

b) Wir betrachten die Zerlegung $T=(t_0,\dots,t_n)$ mit

$$0 = t_0 < t_1 = \frac{1}{\sqrt{n}} < t_2 = \frac{1}{\sqrt{n-1}} < \dots < \frac{1}{\sqrt{2}} < 1 = t_n$$

Es gilt $\gamma\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{n}}, \frac{1}{n} \underbrace{\cos(n\pi)}_{=(-1)^n}\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{n}}, \frac{(-1)^n}{n}\right)$

$$\Rightarrow \quad \sum_T(\gamma) = \sum_{k=1}^{n} \|\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})\|_2 \geq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

$\Rightarrow \quad \sup_T \sum_T(\gamma) = \infty$, also ist γ nicht rektifizierbar.

5.3

a)

Homogenität:

$f\in C([0,1]),\ \lambda\in\mathbb{C} \Rightarrow \|\lambda f\|_1 = \int_0^1 |\lambda f(x)|dx = |\lambda|\int_0^1 |f(x)|dx = |\lambda|\,\|f\|_1$

Subadditivität:

$f,g\in C([0,1]) \Rightarrow \|f+g\|_1 = \int_0^1 |f(x)+g(x)|dx \leq \int_0^1 |f(x)|dx + \int_0^1 |g(x)|dx = \|f\|_1 + \|g\|_1$

Definitheit:

$f\in C([0,1]),\ \|f\|_1 = 0$ gegeben. Angenommen, $f(x_0)\neq 0$ für ein $x_0\in[0,1]$.
Da f stetig ist, existiert ein $\varepsilon>0$ mit $f(x)\neq 0\ \forall\, x\in[x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon]$

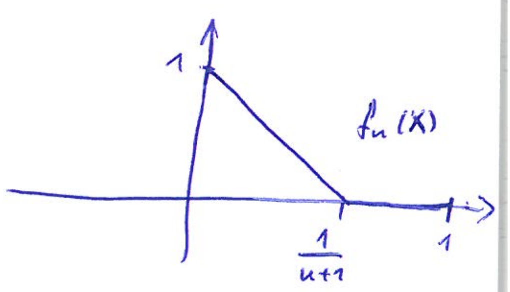
$$\Rightarrow \int_0^1 |f(x)|dx \geq \int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} |f(x)|dx \geq (x_0+\varepsilon-(x_0-\varepsilon))\cdot \underbrace{\min_{x\in[x_0-\varepsilon,x_0+\varepsilon]} |f(x)|}_{=C_0>0}$$

$$= 2\varepsilon\cdot C_0 > 0 \quad \lightning$$

Also gilt $f(x)=0\ \forall x\in[0,1]$.
Damit ist $\|\cdot\|_1$ eine Norm auf $C([0,1])$.

$C([0,1],\|\cdot\|_1)$ ist kein Banachraum:

Sei z.B. $f_n(x) := \begin{cases} 0, & x\in(\frac{1}{n+1}, 1] \\ 1-(n+1)x, & x\in[0,\frac{1}{n+1}] \end{cases}$



$\Rightarrow f_n\in C([0,1],\|\cdot\|_1)\ \forall n\in\mathbb{N}$. Weiter gilt offensichtlich

$$\|f_n - f_m\|_1 \longrightarrow 0, \text{ aber } f_n \xrightarrow{n} f,\ f(x) = \begin{cases} 1, & x=0 \\ 0, & x\in(0,1] \end{cases}$$

Da $f\notin C([0,1])$, kann $C([0,1],\|\cdot\|_1)$ nicht vollst. sein.

b)

Homogenität:

$f \in C([0,1])$, $\lambda \in \mathbb{C} \Rightarrow \|\lambda f\|_\infty = \sup_x |\lambda f(x)| = |\lambda| \sup_x |f(x)| = |\lambda| \, \|f\|_\infty$

Subadditivität:

$f, g \in C([0,1]) \Rightarrow \|f+g\|_\infty = \sup_x |f(x)+g(x)| \leq \sup_x |f(x)| + \sup_x |g(x)| = \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$

Definitheit:

$f \in C([0,1])$, $\|f\|_\infty = 0 \Rightarrow \sup_x |f(x)| = 0 \Rightarrow f(x) = 0 \ \forall x \in [0,1]$.

$C([0,1], \|\cdot\|_\infty)$ ist ein Banachraum:

Sei $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $C([a,b], \|\cdot\|_\infty)$, d.h. zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ mit

$$\|f_n - f_m\|_\infty < \varepsilon \quad \text{für } n, m \geq N_\varepsilon.$$

Für jedes $x \in [0,1]$ folgt

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq \sup_{y \in [0,1]} |f_n(y) - f_m(y)| = \|f_n - f_m\|_\infty < \varepsilon$$

für $n, m \geq N_\varepsilon$. Damit ist $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $\mathbb{R}$. Da $\mathbb{R}$ vollständig ist, existiert ein Grenzwert $f(x)$. D.h. es gilt

$$|f(x) - f_n(x)| = \lim_{m \to \infty} |f_m(x) - f_n(x)| \leq \varepsilon \quad \text{für } n \geq N_\varepsilon$$

Da N_ε unabh. von x gewählt wurde, konvergiert die Folge (f_n) gleichmäßig gegen f. Da f_n stetig ist für jedes $n \in \mathbb{N}$, ist die Grenzfunktion f auch stetig (siehe Vorlesung). D.h. es gilt $f \in C([0,1])$ und $C([0,1], \|\cdot\|_\infty)$ ist vollständig.

c) Seien $f, g \in C([0,1])$ und $\lambda \in \mathbb{C}$

$$\Rightarrow \quad A(f+\lambda g) = f(1) + \lambda g(1) = A(f) + \lambda A(g)$$

Damit ist A linear.

d) Da A linear ist, gilt nach Vorlesung

A ist beschränkt $\Leftrightarrow$ A ist stetig im Nullpunkt

Sei $f_n(x) := x^n$, $n \in \mathbb{N}$ $\Rightarrow \|f_n\|_1 = \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} \Big|_0^1$

$$= \frac{1}{n+1}$$

Damit gilt $f_n \in C([0,1], \|\cdot\|_1)$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Weiter gilt

$$\|f_n\|_1 = \frac{1}{n+1} \longrightarrow 0, \quad n \to \infty$$

Damit konvergiert f_n gegen die Nullfunktion. Nun gilt jedoch

$$Af_n = f_n(1) = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow \quad A(\lim_{n\to\infty} f_n) = A(0) \underset{\uparrow}{=} 0 \neq 1 = \lim_{n\to\infty}(Af_n)$$

(gilt für jede lineare Abbildung)

Sei nun $f_n \in C([0,1], \|\cdot\|_\infty)$ mit $\|f_n\|_\infty \xrightarrow{n\to\infty} 0$

D.h. es gilt

$$\sup_{x\in[0,1]} |f_n(x)| \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

Daraus folgt jedoch unmittelbar

$$\lim_{n\to\infty} Af_n = \lim_{n\to\infty} f_n(1) = 0$$

Also ist A beschränkt bezüglich der Norm $\|\cdot\|_\infty$.

5.4

(i) Sei $a_1 \in \mathbb{R}$ beliebig aber fest und $h_1 \in \mathbb{R}$, dann gilt

$$f_1(a_1+h_1) = \begin{pmatrix} 1 + a_1 + h_1 \\ (a_1+h_1)^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + a_1 + h_1 \\ a_1^2 + 2a_1h_1 + h_1^2 \end{pmatrix}$$

$$= f_1(a_1) + \begin{pmatrix} 1 \\ 2a_1 \end{pmatrix} h_1 + \begin{pmatrix} 0 \\ h_1^2 \end{pmatrix}$$

Setze $L_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 2a_1 \end{pmatrix}$, dann gilt

$$f_1(a_1+h_1) - f(a_1) - L_1 h_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ h_1^2 \end{pmatrix}$$

Damit folgt

$$\lim_{h_1 \to 0} \frac{\| f_1(a_1+h_1) - f(a_1) - L_1 h_1 \|_2}{|h_1|} = \lim_{h_1 \to 0} \frac{1}{|h_1|} \cdot \underbrace{\sqrt{0 + h_1^4}}_{|h_1|^2} = \lim_{h_1 \to 0} |h_1| = 0$$

ii) Sei $a_2 = \begin{pmatrix} a_{21} \\ a_{22} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ fest und $h_2 = \begin{pmatrix} h_{21} \\ h_{22} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$, dann gilt

$$f_2(a_2+h_2) = (a_{21}+h_{21})^2 + (a_{22}+h_{22})^2$$

$$= a_{21}^2 + a_{22}^2 + 2a_{21}h_{21} + 2a_{22}h_{22} + h_{21}^2 + h_{22}^2$$

$$= f_2(a_2) + \underbrace{\begin{pmatrix} 2a_{21} & 2a_{22} \end{pmatrix}}_{=: L_2} \begin{pmatrix} h_{21} \\ h_{22} \end{pmatrix} + \|h_2\|_2^2$$

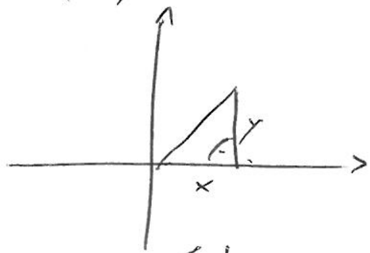
$$= f_2(a_2) + L_2 \cdot h_2 + \|h_2\|_2^2$$

$$\Rightarrow \lim_{h_2 \to \binom{0}{0}} \frac{| f_2(a_2+h_2) - f_2(a_2) - L_2 \cdot h_2 |}{\|h_2\|_2} = \lim_{h_2 \to \binom{0}{0}} \frac{\|h_2\|^2}{\|h_2\|} = \lim_{h_2 \to \binom{0}{0}} \|h_2\| = 0$$

7.1

Für $(x,y) \neq (0,0)$ ist $g(x,y) = (x^2+y^2)\sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)$

$r^2 \sin\left(\frac{1}{r^2}\right)$



Betrachte $\frac{|g(x,y) - \overbrace{g(0,0)}^{=0} - 0|}{\|(x,y)\|_{\mathbb{R}^2}}$

$$= \frac{|g(x,y)|}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$= \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} \left|\sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)\right| = \sqrt{x^2+y^2}\, \overbrace{\left|\sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)\right|}^{\leq 1}$$

$$\leq \sqrt{x^2+y^2} = \|(x,y)\|_{\mathbb{R}^2} \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0$$

$\Rightarrow$ g ist diffb. in $(0,0)$.

$(D\, g(0,0) = 0)$

<u>Zeige</u> Part. Abl. nich stetig in $(0,0)$

$$\partial_x g(x,y) = \frac{\partial}{\partial x} g(x,y) = 2x \sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) + \cancel{(x^2+y^2)} \cos\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) \cdot \frac{-1}{(x^2+y^2)^2} \cdot 2x$$

$$= 2x \sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) - \frac{2x}{x^2+y^2} \cos\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)$$

<u>Idee</u> $\frac{1}{x^2+y^2} = 2\pi k \iff x^2+y^2 = \frac{1}{2\pi k} = \frac{1}{4\pi k} + \frac{1}{4\pi k}$

funktioniert für z.B.

$$x = \frac{1}{\sqrt{4\pi k}} = \frac{1}{2\sqrt{\pi k}}$$

$$y = \frac{1}{\sqrt{4\pi k}}$$

Betrachte also Folge $(x_k)_{k \geq 1}$

mit Gliedern $x_k = \left(\frac{1}{\sqrt{4\pi k}}, \frac{1}{\sqrt{4\pi k}}\right)^T \in \mathbb{R}^2$.

$(k\to\infty) \downarrow$

0

Damit folgt $\partial_x g(x_k) = \frac{2}{2\sqrt{\pi k}} \overbrace{\sin(2\pi k)}^{=0} - \frac{1}{\sqrt{\pi k}}(2\pi k) \overbrace{\cos(2\pi k)}^{=1}$

$$= -2\sqrt{\pi k} \longrightarrow -\infty \quad (k\to\infty)$$

$\square$

7.2 (a) $f: (0,\infty) \times (0,\infty) \to \mathbb{R}^2$

$$f(x,y) = \begin{pmatrix} xy \\ \frac{\sqrt{x}}{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(x,y) \\ f_2(x,y) \end{pmatrix}$$

$$Jf(x,y) = \begin{pmatrix} \partial_1 f_1(x,y) & \partial_2 f_1(x,y) \\ \partial_1 f_2(x,y) & \partial_2 f_2(x,y) \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} \partial_1 = \partial_x \\ \partial_2 = \partial_y \end{matrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \partial_1 (xy) & \partial_2 (xy) \\ \partial_1 \left(\frac{\sqrt{x}}{y}\right) & \partial_2 \left(\frac{\sqrt{x}}{y}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y & x \\ \frac{1}{2\sqrt{x}y} & -\frac{\sqrt{x}}{y^2} \end{pmatrix}$$

(b) $g: \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{R} \quad : \quad g(x,y) = \log(x^2+y^2)$

$$Jg(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{2x}{x^2+y^2} & \frac{2y}{x^2+y^2} \end{pmatrix}$$

(c) $h: (0,\infty) \times (0,\infty) \to \mathbb{R} \quad : \quad h = g \circ f$

$$Jh(x,y) = J(g\circ f)(x,y) = Jg(f(x,y)) \circ Jf(x,y)$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{2\overbrace{(xy)}^{f_1(x,y)}}{(xy)^2 + \underbrace{\left(\frac{\sqrt{x}}{y}\right)^2}_{f_2(x,y)}} & \frac{2\frac{\sqrt{x}}{y}}{(xy)^2+\left(\frac{\sqrt{x}}{y}\right)^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y & x \\ \frac{1}{2y\sqrt{x}} & -\frac{\sqrt{x}}{y^2} \end{pmatrix} =$$

Anm $\quad J(g\circ f)(x,y) = Jg(f(x,y)) = Jg\big(\underbrace{f_1(x,y)}_{\in\mathbb{R}}, \underbrace{f_2(x,y)}_{\in\mathbb{R}}\big)$

$$= \begin{pmatrix} \frac{2xy^2 + \frac{1}{y^2}}{(xy)^2 + \frac{x}{y^2}} & \cancel{\frac{1}{y^2}} \; \frac{2x^2y - 2\frac{x}{y^3}}{(xy)^2 + \frac{x}{y^2}} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{2xy^4+1}{x^2y^4+x} & \frac{2xy^4-2}{xy^5+y} \end{pmatrix}$$

7.3 $\quad f(x,y) = (x^3y^2)(1-x-y) = x^3y^2 - x^4y^2 - x^3y^3$

<u>Notw. Bedingung:</u> $\quad \nabla f(x,y) = 0$

$$0 \overset{!}{=} \nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} \partial_x f(x,y) \\ \partial_y f(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x^2y^2(1-x-y) - x^3y^2 \\ 2x^3y(1-x-y) - x^3y^2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3x^2y^2 - 4x^3y^2 - 3x^2y^3 \\ 2x^3y - 2x^4y - 3x^3y^2 \end{pmatrix}$$

$$x \neq 0 \neq y \quad \left| \begin{array}{lll} 3 - 4x - 3y = 0 & \mid :(x^2y^2) & \text{(i)} \\ 2 - 2x - 3y = 0 & \mid :(x^3y) & \text{(ii)} \end{array} \right.$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{(i)} - \text{(ii)}: \quad 0 = 3 - 4x - 3y - 2 + 2x + 3y \\ \qquad\qquad = 1 - 2x \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{\underline{x_0 = \frac{1}{2}}}$$

$$3 - 4\cdot\frac{1}{2} - 3y = 0 \Leftrightarrow 3 - 2 - 3y = 0 \Rightarrow \underline{\underline{y_0 = \frac{1}{3}}}$$

Kandidat für Extremum $\vec{p} := (x_0, y_0)^T = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)^T$

$\cancel{2\frac{2}{3}}$

<u>Prüfe mit Satz 15</u>

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} \partial^2_{xx} f(x,y) & \partial^2_{xy} f(x,y) \\ \partial^2_{yx} f(x,y) & \partial^2_{yy} f(x,y) \end{pmatrix}$$

Anm. $(Hf(x,y))_{12} = (Hf(x,y))_{21}$ nach Lm. von Schwarz

$$= \begin{pmatrix} 6xy^2 - 12x^2y^2 - 6xy^3 & 6x^2y - 8x^3y - 9x^2y^2 \\ 6x^2y - 8x^3y - 9x^2y^2 & 2x^3 - 2x^4 - 6x^3y \end{pmatrix}$$

$$Hf(x_0,y_0) = \begin{pmatrix} 6\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{9} - 12\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{9} - 6\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{27} & 6\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3} - 8\cdot\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{3} - 9\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{9} \\ \dots & 2\cdot\frac{1}{8} - 2\cdot\frac{1}{16} - 6\cdot\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$\frac{1}{4} - \frac{1}{3} = \frac{3-4}{12} = -\frac{1}{12}$

$$= \begin{pmatrix} \cancel{\frac{1}{3}} - \cancel{\frac{1}{3}} - \frac{1}{9} & \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \\ \dots & \frac{1}{4} - \frac{1}{8} - \frac{1}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{9} & -\frac{1}{12} \\ -\frac{1}{12} & -\frac{1}{8} \end{pmatrix}$$

$$-Hf(x_0,y_0) = \begin{pmatrix} \frac{1}{9} & \frac{1}{12} \\ 1/12 & \frac{1}{8} \end{pmatrix} \qquad \det(-Hf(x_0,y_0))$$

$$= \frac{1}{72} - \frac{1}{144} > 0, \quad \frac{1}{9} > 0$$

$\Rightarrow -Hf(x_0,y_0)$ ist pos. definit,

also ist $Hf(x_0,y_0)$ neg definit

$\Rightarrow$ f besitzt ein lokales Maximum in p.

$$T_p^{2} f(h) = \sum_{|\alpha| \leq 2} \frac{1}{\alpha!} \partial^\alpha f(p) h^\alpha \qquad \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \alpha \in \mathbb{N}_0^2$$

$$\alpha! = \alpha_1! \alpha_2!$$

$$h = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{1}(\partial^{\overset{\alpha}{=}(0,0)} f)(p)\, h^{\overset{\alpha}{=}(0,0)} + \frac{1}{1}(\partial^{(1,0)} f)(p)\, h^{(1,0)}$$

$$+ \frac{1}{1}(\partial^{(0,1)} f)(p)\, h^{(0,1)} + \frac{1}{2}(\partial^{(2,0)} f)(p)\, h^{(2,0)} + \frac{1}{2}(\partial^{(0,2)} f)(p)\, h^{(0,2)}$$

$$+ \cancel{1} (\partial^{(1,1)} f)(p)\, h^{(1,1)} \quad *$$

$$= f(p) + (\partial_x f)(x_0,y_0) \cdot h_1 + (\partial_y f)(x_0,y_0) \cdot h_2$$

$$+ \frac{1}{2}(\partial_x^2 f)(x_0,y_0)\, h_1^2 + \frac{1}{2}(\partial_y^2 f)(x_0,y_0)\, h_2^2$$

$$+ (\partial_{xy} f)(x_0,y_0)\, h_1 h_2$$

$$=$$

§ 1

(i) $(t_1+t_2)A \subseteq t_1A + t_2A$

Sei $x \in (t_1+t_2)A \overset{\text{Def}}{\Rightarrow} \exists a \in A: \; x = (t_1+t_2)a \overset{\text{Def}}{=} t_1 a + t_2 a \in (t_1A + t_2A)$

(ii) $t_1A + t_2A \subseteq (t_1+t_2)A$

Sei $x \in t_1A + t_2A \Rightarrow \exists a_1, a_2 \in A: \; x = t_1a_1 + t_2a_2$

A konvex $\Rightarrow \forall \lambda \in [0,1]$ ist $\lambda a_1 + (1-\lambda)a_2 \in A$

$\Rightarrow \forall \lambda \in [0,1] \; \exists a_\lambda \in A: \quad \lambda a_1 + (1-\lambda)a_2 = a_\lambda \in A$

$\Rightarrow \dfrac{t_1}{t_1+t_2} a_1 + \left(1 - \dfrac{t_1}{t_1+t_2}\right) a_2 = \dfrac{t_1}{t_1+t_2} a_1 + \dfrac{t_2}{t_1+t_2} a_2 = a \in A$

$\Rightarrow t_1 a_1 + t_2 a_2 = (t_1+t_2) a \in (t_1+t_2) A$ $\square$

z.B. für $A = \{0, x_0\} \subset \mathbb{R}^n$ mit $x_0 \neq 0$ ist für $t_1 = 1 = t_2$

- $(t_1+t_2)A = 2A = \{0, 2x_0\}$
- $t_1A + t_2A = A + A = \{a + \tilde{a} \mid a, \tilde{a} \in A\} = \{0, 0+x_0, x_0+x_0\}$
  $= \{0, x_0, 2x_0\}$

8.2 $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konvex

(a) <u>$f+g$ konvex?</u> Seien $x, y \in \mathbb{R}$ und $t \in [0,1]$, dann

$$
\begin{aligned}
(f+g)((1-t)x + ty) &\overset{\text{def}}{=} f((1-t)x+ty) + g((1-t)x+ty) \\
&\overset{\text{konv.}}{\leq} (1-t) f(x) + t f(y) + (1-t) g(x) + t \cdot g(y) \\
&= (1-t)[f(x)+g(x)] + t[f(y)+g(y)] \\
&= (1-t)(f+g)(x) + t(f+g)(y) \qquad \square
\end{aligned}
$$

(b) <u>$f \cdot g$ konvex?</u> $\left.\begin{array}{l} f(x) = x \\ g(x) = -x \end{array}\right\} (f \cdot g)(x) = -x^2$ ~~konkav~~ anti-konvex.

(c) <u>$(f \circ g)$ konvex?</u> $\left.\begin{array}{l} f(x) = -x \\ g(x) = x^2 \end{array}\right\} (f \circ g)(x) = f(g(x)) = -x^2$ anti-konvex

8.3 Da $x_i > 0$, ist es äquivalent zu zeigen, dass

$$\log \prod_{j=1}^{N} x_j^{\lambda_j} \leq \log \sum_{j=1}^{N} \lambda_j x_j .$$

$$\frac{d^2}{dx^2} \log x = \frac{d}{dx} \frac{1}{x} = -\frac{1}{x^2} < 0$$

log anti-konv. auf $(0, \infty)$

$$\cancel{\log \sum_{j=1}^{N} x_j^{\lambda_j} =}$$

$$\log\left(\prod_{j=1}^{N} x_j^{\lambda_j}\right) = \sum_{j=1}^{N} \log(x_j^{\lambda_j}) = \sum_{j=1}^{N} \lambda_j \log x_j \leq \log \sum_{j=1}^{N} \lambda_j x_j \quad \square$$

<u>Anm</u> Für $\lambda_j = \frac{1}{N}$ $\left(\Rightarrow \sum_{j=1}^{N} \lambda_j = \sum_{j=1}^{N} \frac{1}{N} = N \cdot \frac{1}{N} = 1\right)$, folgt

$$\sqrt[N]{x_1 \cdots x_N} = \prod_{j=1}^{N} x_j^{\frac{1}{N}} \leq \sum_{j=1}^{N} \frac{1}{N} x_j = \frac{x_1 + \ldots + x_N}{N}$$

8-4

$f = (f_1, \dots, f_m)^T$, $\quad \cdot\, f_j : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ konv

$\qquad\qquad\qquad\quad\;\; \cdot\, g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ konv, m.w.

(a) Sei $t \in [0,1]$ beliebig und $x, y \in A$, dann folgt

$$h(tx + (1-t)y) \overset{\text{Def } h}{=} g\begin{pmatrix} f_1(tx + (t-1)y) \\ \vdots \\ f_m(tx + (t-1)y) \end{pmatrix}$$

$$\underset{g \text{ m.w.}}{\overset{f \text{ konv.}}{\leq}} g\begin{pmatrix} t f_1(x) + (t-1) f_1(y) \\ \vdots \\ t f_m(x) + (t-1) f_m(y) \end{pmatrix}$$

$$= g\left(t \begin{pmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_m(x) \end{pmatrix} + (1-t) \begin{pmatrix} f_1(y) \\ \vdots \\ f_m(y) \end{pmatrix} \right)$$

$$\overset{g \text{ konv.}}{\leq} t \cdot g\begin{pmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_m(x) \end{pmatrix} + (1-t) \cdot g\begin{pmatrix} f_1(y) \\ \vdots \\ f_m(y) \end{pmatrix}$$

$$\overset{\text{def}}{=} t\, g(f(x)) + (1-t)\, g(f(y))$$

$$\overset{\text{Def}}{=} t\, h(x) + (1-t)\, h(y)$$

(b) f anti-konvex, $0 < f(x) < \infty \;\; \forall x$, $\quad F(x) = \dfrac{1}{f(x)}$

$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$F(x) = \tilde{g}(\tilde{f}(x))$ mit $\tilde{g} : x \mapsto \frac{-1}{x}$, $\quad \tilde{f}(x) = -f(x) < 0$

konvex für $x < 0$, m.w. $\qquad\qquad$ konvex $x \in \mathbb{R}^n$

$\overset{a)}{\Longrightarrow}$ Beh.

$-\tilde{f}$ bildet ab nach $(-\infty, 0)$

9.1 $\quad \ddot{u} \overset{(*)}{=} -\omega^2 u - \varrho \dot{u} \qquad , \omega > 0, \varrho \geq 0$

Setze $\quad u = x_1$, $\dot{u} = x_2 \quad \Rightarrow \quad \cancel{\dot{u} = \dot{x}_2}$, $\dot{x}_2 = \ddot{u}$, dann ist unser

System darstellbar durch

$$\underline{\underline{\dot{x}}} = \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{u} \\ \ddot{u} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u \\ \dot{u} \end{pmatrix} = \underline{\underline{Ax}}$$

Wir mischen a), b), d)

mit der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & -\varrho \end{pmatrix}.$$

Dies gilt wegen

$$Ax = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & -\varrho \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & -\varrho \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ \dot{u} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{u} \\ \underbrace{-\omega^2 u - \varrho \dot{u}}_{\overset{(*)}{=} \ddot{u}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{u} \\ \ddot{u} \end{pmatrix} = \dot{x}$$

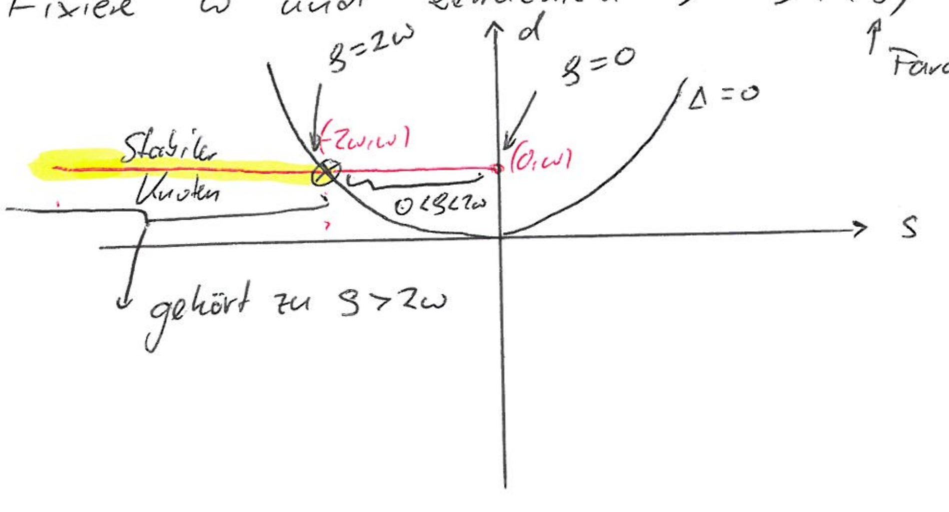
<u>Klassifikation</u>: Berechne d, s, Δ

- $d = \det A = \omega^2 \overset{\text{n.V.}}{>} 0$
- $s = \operatorname{tr} A = -\varrho \overset{\text{n.V.}}{\leq} 0$
- $\Delta = s^2 - 4d = (-\varrho)^2 - 4\omega^2 = \varrho^2 - 4\omega^2 = (\varrho - 2\omega)(\varrho + 2\omega) \overset{!}{=} 0$

$\Leftrightarrow \boxed{\varrho = 2\omega}$

Fixiere ω und betrachten $A = A(\varrho)$

↑ Parameter

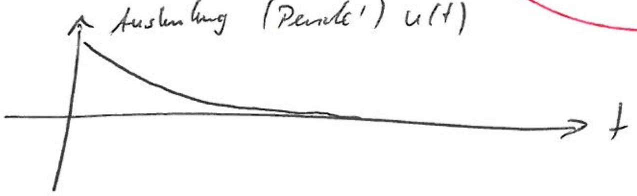


Betrachte $\gamma > 2\omega$ $\iff -\gamma < -2\omega$

$\Rightarrow \Delta > 0 \rightsquigarrow$ Knoten

$\Rightarrow S = -\gamma < -2\omega < 0 \rightsquigarrow$ stabil

„überdämpftes System"



Satz 11 liefert: "Alle Lösungen konvergieren gegen das GGW = 0"

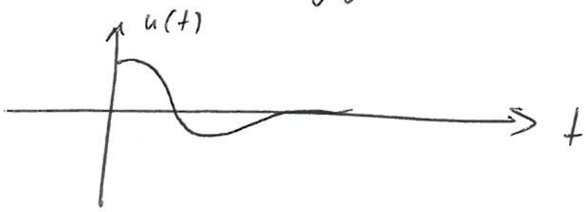
Betrachte $\gamma = 2\omega$ ⊛

$\Rightarrow$ $\Delta = 0$ $(\Delta = S^2 - 4d = \gamma^2 - 4(2\omega)^2 = 0)$ $\rightsquigarrow$ entarteter Knoten

$S = -\gamma = \overset{-2\omega}{\cancel{2\omega}} \overset{<}{\cancel{=}} 0$ $\rightsquigarrow$ stabil

Satz 13 $\Rightarrow$ "Alle Lösungen konv. gegen das GGW ~~im~~ = 0"

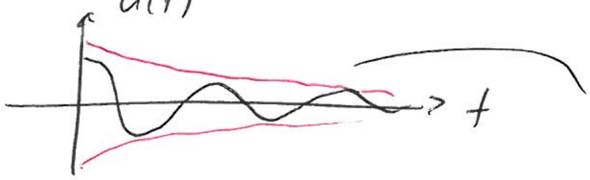
„aperiodischer Grenzfall"



$0 \boxed{<} \gamma < 2\omega$ $\Rightarrow$ $\Delta < 0$ $\rightsquigarrow$ ~~Kn~~ Strudel

$S = -\gamma \boxed{<} 0$ $\rightsquigarrow$ stabil

„gedämpfte Schwingung"



später $e^{-\frac{\gamma}{2}t}$

nach Satz 15 $\Rightarrow$ „Alle Lösungen konv. gegen das GGW = 0 ohne ~~asy~~ asympt. Richtung"

$0 = \gamma$ $\Rightarrow$ $\Delta < 0$, $S = 0$ $\overset{\text{Satz 15}}{\Rightarrow}$ Zentrum

Satz 15 $\Rightarrow$ Alle Lösungen sind T-periodisch mit Periode $T = \frac{2\pi}{\omega}$ und Frequenz ω.

9.1 c) Zur gedämpften Schwingung $(0<\delta<2\omega) \Rightarrow \Delta < 0$

A ist halbeinfach, der zug. Satz liefert die Lösung

$$u(t) = a e^{\alpha t} \cos(\mu t) + b e^{\alpha t} \sin(\mu t) \quad , \quad a,b \in \mathbb{R}$$

für die Eigenwerte

$$\lambda = \alpha + i\mu, \quad \bar{\lambda} = \alpha - i\mu = -\delta/2 - i\sqrt{\omega^2 - \delta^2/4}$$

ausrechnen von $\sigma(A)$

$$= -\delta/2 + i\sqrt{\omega^2 - \delta^2/4}$$

D.h. mit $\begin{array}{l} a = r\sin(\tau) \\ b = r\cos(\tau) \end{array} \Bigg| \Rightarrow a^2+b^2 = r^2(\sin^2\tau + \cos^2\tau) = r^2$

gilt für u

$$u(t) = r\sin(\tau)\cos(\mu t)\, e^{\alpha t} + r\cos(\tau)\sin(\mu t)\, e^{\alpha t}$$

$$= r e^{\alpha t}\left[\sin(\tau)\cos(\mu t) + \cos(\tau)\sin(\mu t)\right]$$

$$= \underset{\text{Amplitude}}{r}\, e^{\alpha t} \sin(\mu t + \tau)$$

Phase

reduzierte Frequenz

Weiter ist $T = \frac{2\pi}{\mu} \longrightarrow \begin{cases} \infty & \delta \to 2\omega \\ \omega & \delta \downarrow 0 \end{cases}$

9.3, denn "9.2 < 9.3" $\left[9.2 \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \right]$ ← ist bereits Jordan

$$\begin{aligned} \dot{u}_1 &= 3u_1 + 0 + 0 \\ \dot{u}_2 &= 0 + 3u_2 + u_3 \\ \dot{u}_3 &= u_1 + 0 + 2u_3 \end{aligned} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

① Char. Polynom bzw dessen Linearfaktoren

$$\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda E) = (3-\lambda)(3-\lambda)(2-\lambda)$$

$$\Rightarrow \left| \begin{array}{l} \lambda_1 = 2 \rightsquigarrow v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \lambda_2 = 3 \rightsquigarrow v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \lambda_3 = 3 \end{array} \right.$$

Da der Eigenraum zum Eigenwert $\lambda_2 = \lambda_3$ ~~Ha~~ Dimension 1 hat (also alg. Vfh. > geom. Vfh.), nutzen wir Jordankette(n) zur Bestimmung des Hauptvektors v_3. Diese erfüllt

$$(A - \lambda_3 E)v_3 = (A - 3E)v_3 \stackrel{!}{=} v_2, \quad \text{sei } v_3 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x - z = 0 \\ z = 1 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 1 = z \\ y \text{ bel.} \end{array} \right\},$$

also z.B.

$$v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Trafo-Matrix (um A auf Jordan-Normalform zu bekommen, da $\exp A$ "schwierig" zu berechnen ist; $Te^J T^{-1} = e^{TJT^{-1}} = e^A$ ist deutlich einfacher)

$$T = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow T^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Rechnen

Damit gilt $T^{-1} A T = J_A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

und somit

$$e^{tA} = T e^{tJ} T^{-1} = \begin{pmatrix} e^{3t} & 0 & 0 \\ e^{2t} + te^{3t} - e^{3t} & e^{3t} & -e^{2t} \\ e^{3t} - e^{2t} & 0 & e^{2t} \end{pmatrix}$$

$$e^{tJ} = \begin{pmatrix} e^{2t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{3t} & te^{3t} \\ 0 & 0 & e^{3t} \end{pmatrix}$$

9.4

$$\dot{x} = Ax \quad \text{mit} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\chi_A(\lambda) = (1-\lambda)\left[(2-\lambda)^2 + 9\right] \overset{!}{=} 0$$

$$\lambda_1 = 1$$
$$\lambda_2 = 2+3i$$
$$\lambda_3 = 2-3i$$

liefern EV

$$w_1 = \begin{pmatrix} -10 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad w_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -i \\ 1 \end{pmatrix} = v + iu$$
$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\overset{\text{Lin}}{\Rightarrow} \varphi(t) = a e^{\lambda_1} w_1$$
$$+ e^{t \operatorname{Re} \lambda_2} \left(b \sin(t \operatorname{Im} \lambda_2) + c \cos(t \operatorname{Im} \lambda_2) \right)$$
$$+ e^{t \operatorname{Re} \lambda_3} \left(b \cos(t \operatorname{Im} \lambda_3) + c \sin(t \operatorname{Im} \lambda_3) \right)$$

$$= a e^{t} w_1 + e^{2t} \big[\overbrace{b \sin(3t) + c \cos(3t)}^{\sin(3t+\tau)} \big]$$
$$+ e^{2t} \big[\underbrace{b \cos(3t) - c \sin(3t)}_{\cos(3t+\tau)} \big]$$

Jetzt $b = r \cos \tau$
$a = r \cdot \sin(\tau)$

$$T = \begin{pmatrix} w_1 & \underset{\operatorname{Re} w_2}{u} & \underset{\operatorname{Im} w_2}{v} \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{3\times 3}$$

$$B = T^{-1} A T = \begin{pmatrix} \Lambda_1 & \\ & \Lambda_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{3\times 3} \quad \text{Blockdiagonalmatr.}$$

$$\Lambda_2 = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

- Berechne e^{tB}
- Berechne $T e^{tB} T^{-1} = e^{tA}$

10.1 a. $\dot{x} = 1 + t x^2, \quad x_0 = x(0) = 0$

$\Rightarrow v(t, x) = 1 + t x^2$

Picard-Iteration: $\varphi_n = T^n \varphi_0 = T^n x_0$ mit

$$(T\varphi)(t) := x_0 + \int_0^t v(s, \varphi(s))\, ds$$

$$\Rightarrow \varphi_1(t) = T\varphi_0(t) = \underbrace{x_0}_{=0} + \int_0^t (1 + s \cdot \underbrace{\varphi_0^2(s)}_{=0})\, ds = \int_0^t ds = t$$

$$\Rightarrow \varphi_2(t) = T^2\varphi_0(t) = T\varphi_1(t) = 0 + \int_0^t (1 + s\,\varphi_1^2(s))\, ds$$

$$= \int_0^t (1 + s^3)\, ds = t + \frac{t^4}{4}$$

$$\Rightarrow \varphi_3(t) = T\varphi_2(t) = 0 + \int_0^t \left(1 + s\left[s + \frac{s^4}{4}\right]^2\right) ds$$

$$= \int_0^t 1 + s^3 + \frac{s^9}{16} + \frac{s^6}{2}\, ds = t + \frac{t^4}{4} + \frac{t^7}{14} + \frac{t^{10}}{160}$$

Nachtrag:

Hier die Schaubilder betrachten...

10.1. b. $v(t, \varphi)$ mit $v(t, x, y) = \begin{pmatrix} t^2 y - x y^2 \\ x^3 - y + t \end{pmatrix}, \quad \varphi_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\varphi_1(t) = \underbrace{\varphi_0}_{=0} + \int_0^t v(s, \underbrace{\varphi_0(s)}_{=(0,0)^T})\, ds = \int_0^t \begin{pmatrix} 0 \\ s \end{pmatrix} ds = \begin{pmatrix} 0 \\ s^2/2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \varphi_2(t) = \int_0^t v(s, \varphi_1(s))\, ds = \int_0^t \begin{pmatrix} s^2 \cdot \frac{s^2}{2} - 0 \cdot (s^2/2)^2 \\ 0^3 - s^2/2 + s \end{pmatrix} ds$$

$$= \int_0^t \begin{pmatrix} s^4/2 \\ s - s^2/2 \end{pmatrix} ds = \begin{pmatrix} t^5/10 \\ t^2/2 - t^3/6 \end{pmatrix}$$

10.2

$$\begin{cases} \dot{x} = |x(t)|^\alpha, & \alpha \geq 0, \quad t \in [0,T], \quad T > 0 \\ x(0) = 0 \end{cases}$$

$y \mapsto |y|^\alpha$ ist stetig $\forall \alpha \geq 0$

$\boxed{\text{Sei } 0 \leq \alpha < 1}$ $\overset{x \not\equiv 0}{\Rightarrow}$ $\int |x|^{-\alpha} dx = \int 1 \, dt = t + c$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{1-\alpha} |x|^{1-\alpha} = t + c$$

$$\Leftrightarrow |x| = \left((t+c)(1-\alpha) \right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \qquad \left(\frac{1}{1-\alpha} \in (0, \infty) \right)$$

$$\overset{x(0)=0 \Rightarrow c=0}{\Rightarrow} x(t) = \pm \left(t \underbrace{(1-\alpha)}_{>0} \right)^{\underset{>0}{\frac{1}{1-\alpha}}}$$

$$\overset{VZ}{\Rightarrow} \underbrace{x(t) = \left(t(1-\alpha) \right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \quad \vee \quad x(t) \equiv 0.}$$

mehrere Lösungen, da $y \mapsto y^\alpha$ für $0 \leq \alpha < 1$ <u>nicht</u> Lipschitz ist.

$\boxed{\text{Sei } \alpha = 1}$ $\overset{x \not\equiv 0}{\Rightarrow}$ $\int \frac{1}{|x|} dx = t + c \quad \Rightarrow \ln |x| = t + c$

$$\Rightarrow |x| = e^c e^t \neq 0$$

$\Rightarrow$ $x(t) = 0$ ist eind. Lösung ($y \mapsto y$ ist Lipschitz)

$\boxed{\text{Sei } \alpha > 1}$ $\overset{x \not\equiv 0}{\Rightarrow}$ $\frac{|x|^{1-\alpha}}{1-\alpha} = t + c \overset{c=0}{\Rightarrow} \underbrace{|x|^{1-\alpha}}_{\geq 0} = \underbrace{(1-\alpha)}_{<0, \text{ da } \alpha > 1} \underbrace{t}_{t \geq 0} < 0$

$\Rightarrow$ $x(t) = 0$ ist eind. Lösung ($y \mapsto y^\alpha$ ist Lipschitz für $\alpha \geq 1$)

$\underline{\underline{10.3}}$ $k \in C([0,1], \mathbb{R})$, $f(x) - \int_0^1 k(x,y) f(y)\, dy = g(x) \quad \forall x \in [0,1]$, (*)

$$\gamma := \sup_{x\in[0,1]} \int_0^1 |k(x,y)|\, dy$$

Zeige ① $\gamma < 1 \Rightarrow \forall g \in C([0,1]) \ \exists f \in C([0,1])$: (*) gilt

② Dieses f erfüllt $\|f\|_\infty \le \frac{1}{1-\gamma} \|g\|_\infty$

Beweis ① Ziel ist die Anwendung des BFPS (Satz 9 in Kap. 17)

Sei $\underbrace{E \text{ ein Banachraum}}_{(i)}$, $\underbrace{X \subset E \text{ abg.}}_{(ii)}$, $\underbrace{T: X \to X \text{ Kontraktion}}_{(iii)}$ $\Rightarrow \exists!$ Fixpunkt von T

auf den Operator T mit

$$(Tf)(x) = g(x) + \int_0^1 k(x,y) f(y)\, dy \quad \forall x \in [0,1] \quad (**)$$

$$\Leftrightarrow \quad Tf = g + \int_0^1 k(\cdot, y) f(y)\, dy.$$

Dann würde mit dem BFPS gelten

$$\exists f_0 \in C([0,1]) : \underline{\underline{Tf_0}} = \underbrace{g + \int_0^1 k(\cdot,y) f_0(y) dy = \underline{\underline{f_0}}}_{\Leftrightarrow\ f_0 - \int_0^1 k(\cdot,y) f_0(y) dy = g}$$

und ① wäre bewiesen.

(i) $E = C([0,1], \|\cdot\|_\infty)$ ist Banach nach Vorlesung.
(ii) Wähle $X = E = C([0,1])$, ist also abgeschlossen
(iii) a) $T: X \to X$, T ist Selbstabbildung

Die rechte Seite von (**) ist als Komposition stetiger Funktionen stetig, also $Tf \in X$

b) T ist Kontraktion

Zeige also $\exists \Theta \in (0,1) : \|Tu - Tv\|_\infty \le \Theta \cdot \|u - v\|_\infty \quad \forall u, v \in X$

$$\|Tu - Tv\|_\infty \overset{\text{Def}}{\underset{(**)}{=}} \sup_{0\le x\le 1} \left| \cancel{g(x)} + \int_0^1 k(x,y) u(y)\, dy - \cancel{g(x)} - \int_0^1 k(x,y) v(y)\, dy \right|$$

$$\overset{\int \text{linear}}{=} \sup_{0\le x\le 1} \left| \int_0^1 dy\, k(x,y) \big(u(y) - v(y)\big) \right|$$

10.3(2)

Dreiecks-Ugl
$$\leq \sup_{0\leq x\leq 1} \int_0^1 \Big(|k(x,y)| \underbrace{|u(y)-v(y)|}_{\leq \sup_{0\leq \tilde{y}\leq 1} |u(\tilde{y})-v(\tilde{y})| = \|u-v\|_\infty} \Big)\, dy$$

$\leftarrow$ unabh. von y

$$\leq \sup_{0\leq x\leq 1} \|u-v\|_\infty \cdot \int_0^1 |k(x,y)|\, dy$$

$$= \|u-v\|_\infty \sup_{0\leq x\leq 1} \int_0^1 |k(x,y)|\, dy \overset{\text{Def}}{=} \gamma \cdot \|u-v\|_\infty$$

Da $\gamma < 1$ war, ist $T: X \to X$ eine Kontraktion.

Damit ist (1) bewiesen.

(2) In Teil (1) haben wir gezeigt, dass $\forall g\ \exists f: Tf = f$.
Für dieses f gilt

$$\|f\|_\infty \overset{\text{Def}}{=} \sup_{0\leq x\leq 1} |f(x)| \overset{Tf=f}{=} \sup_{0\leq x\leq 1} \left| g(x) - \int_0^1 k(x,y) f(y)\, dy \right|$$

$$\underset{\Delta\text{-Ugl.}}{\overset{\text{VL}}{\leq}} \sup_{0\leq x\leq 1} |g(x)| + \sup_{0\leq x\leq 1} \left| \int_0^1 k(x,y) f(y)\, dy \right|$$

$$\leq \underbrace{\text{— '' —}}_{} + \sup_{0\leq x\leq 1} \int_0^1 |k(x,y)| \underbrace{|f(y)|}_{\leq \|f\|_\infty}\, dy$$

$$\leq \|g\|_\infty + \|f\|_\infty \cdot \underbrace{\sup_{0\leq x\leq 1} \int_0^1 |k(x,y)|\, dy}_{\gamma}$$

$$\Rightarrow \|f\|_\infty \leq \|g\|_\infty + \gamma \|f\|_\infty$$

$$\Leftrightarrow \|f\|_\infty (1-\gamma) \leq \|g\|_\infty$$

$$\Leftrightarrow \|f\|_\infty \leq \frac{1}{1-\gamma} \|g\|_\infty . \qquad \square$$

11.1 a. $f(\underbrace{x_1, x_2, x_3}_{=x}) = x_1^2 + x_1 x_2 + \frac{1}{2} x_2 x_3^2$

$$\Rightarrow \quad df = \sum_{n=1}^{n=3} a_n \, dx_n \qquad \text{mit } a_n(x) = df(e_n)(x)$$
$$= \sum_{n=1}^{3} \partial_n f \, dx_n \qquad = Df e_n(x)$$
$$= \partial_n f(x) \quad \forall x$$

Mit
$$\partial_1 f(x) = 2x_1 + x_2$$
$$\partial_2 f(x) = x_1 + \frac{1}{2} x_3^2$$
$$\partial_3 f(x) = x_2 x_3 \qquad \text{folgt}$$

$$df \, [\text{crossed out}] = (2x_1 + x_2)\, dx_1 + (x_1 + \tfrac{1}{2} x_3^2)\, dx_2 + (x_2 x_3)\, dx_3$$

---

b. $v(x) = v(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} x_1 x_3^2 \\ x_1^2 x_3^2 + 2 \\ x_3 - x_1 \end{pmatrix}, \quad \alpha_v(\cdot) = \langle v, \cdot \rangle$

$$\Rightarrow \quad \alpha_v = \sum_{n=1}^{3} a_n \, dx_n \qquad \text{mit } a_n = \alpha_v(e_n) = \langle v, e_n \rangle = v_n$$
$$= \sum_{n=1}^{3} v_n \, dx_n$$

Also ist
$$\alpha_v \, [\text{crossed out}] = (x_1 x_3^2)\, dx_1 + (x_1^2 x_3^2 + 2)\, dx_2 + (x_3 - x_1)\, dx_3 .$$

11.4 $\alpha = (2xy + z^3)\, dx + x^2 dy + 3xz^2 dz$

Für eine Stammfunktion F muss gelten

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2xy + z^3, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = x^2, \quad \frac{\partial F}{\partial z} = 3xz^2$$

$$\overset{\int}{\Rightarrow} \quad F(x,y,z) = x^2 y + xz^3 + R_x(y,z) \quad = 0$$
$$F(x,y,z) = x^2 y + R_y(x,z)$$
$$F(x,y,z) = xz^3 + R_z(x,y)$$

$$\Bigg\} \; F(x,y,z) = x^2 y + xz^3 + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

11.2

$\alpha = x\,dy - y\,dx$

$\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2 : \gamma(t) = e^t \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$

Sei $a<b$ $\quad \int_\gamma \alpha = \int_a^b \alpha(\gamma(t))\,[\dot\gamma(t)]\,dt$

① $\alpha(\gamma(t)) = e^t \cos t\, dy - e^t \sin t\, dx$ $\qquad$ ② $\dot\gamma(t) = e^t \begin{pmatrix} \cos t - \sin t \\ \sin t + \cos t \end{pmatrix}$

Also $\overset{②}{\Rightarrow} \alpha(\gamma(t))\,\dot\gamma(t) =$

$$\Big(\underbrace{e^t \cos t}_{\text{Koeff}}\, \underbrace{dy}_{\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}} - \underbrace{e^t \sin t}_{\text{Koeff}}\, \underbrace{dx}_{\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}}\Big) \begin{pmatrix} e^t(\cos t - \sin t) \\ e^t(\sin t + \cos t) \end{pmatrix}$$

$$= \left(e^t \cos t\, dy - e^t \sin t\, dx\right)\left(e^t(\cos t - \sin t)\,\vec{e}_x + e^t(\sin t + \cos t)\,\vec{e}_y\right)$$

duale Basis zu $(\vec{e}_x, \vec{e}_y)$ in $\mathbb{R}^2$

$dx\, e_x = 1, \quad dx\, e_y = 0$
$dy\, e_x = 0 \quad dy\, e_y = 1$

$$= e^{2t} \cos t (\sin t + \cos t) - e^{2t} \sin t (\cos t - \sin t)$$

$$= e^{2t}\left[\cancel{\cos t \sin t} + \cos^2 t - \cancel{\sin t \cos t} + \sin^2 t\right]$$

$$= e^{2t}$$

$$\Rightarrow \int_\gamma \alpha = \int_a^b e^{2t}\, dt = \frac{1}{2}\left(e^{2b} - e^{2a}\right) \quad \square$$