Prof. Dr. J. Pöschel
Dr. Ulrich Linden
Andreas Bitter, M.Sc. 12.04.18

Analysis II - Vortragsübung 1

Hab Geduld, alle Dinge sind schwierig, bevor sie einfach werden.
–Französisches Sprichwort

1.1. Untersuchen Sie, ob die Mengen

(i) $M_1 := \bigcup_{n=1}^{2018} [n^3, n^3+1]$, **(ii)** $M_2 := \left\{ \left(\frac{1}{n_1}, \frac{1}{n_2} \right) \ : n_1, n_2 \in \mathbb{Z}\backslash\{0\} \right\}$,

(iii) $M_3 := \bigcup_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n} \right) \times (0, n)$, **(iv)** $M_4 := \left\{ x \in \mathbb{R}\backslash\{0\} \ : e^{x \sin\left(\frac{1}{x}\right)} = 1 - |x| \right\} \cup \{0\}$,

offen, abgeschlossen oder kompakt sind.

1.2. Sei $K \subseteq \mathbb{R}^n$ eine kompakte Menge und $f : K \to \mathbb{R}^n$ eine injektive und stetige Funktion. Zeigen Sie, dass die Inverse $f^{-1} : f(K) \to \mathbb{R}^n$ ebenfalls stetig ist.

1.3. Untersuchen Sie die Funktionenfolgen

(i) $f_n : [0, \infty) \to \mathbb{R},\ f_n(x) := \frac{1}{n} e^{-\frac{x}{n}}$, **(ii)** $f_n : [0,1] \to \mathbb{R},\ f_n(x) := \frac{nx}{n^2x^2+1}$,

(iii) $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f_n(x) := \sin\left(\frac{x}{n}\right)$, **(iv)** $f_n : [0,1] \to \mathbb{R},\ f_n(x) := \sum_{k=0}^{n} \frac{x}{\left(1+\frac{x}{2}\right)^k}$,

auf punktweise und gleichmäßige Konvergenz.

1.4. Sei $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine auf einer Menge $A \subseteq \mathbb{R}$ definierte Funktionenfolge mit Werten in einer kompakten Menge $B \subseteq \mathbb{R}$, die gleichmäßig gegen eine Funktion $g : A \to B$ konvergiert. Sei weiterhin $f : B \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Zeigen Sie, dass die Funktionenfolge $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$, definiert durch

$$h_n : A \to B,\ h_n(x) := f\left(g_n(x)\right),$$

gleichmäßig gegen die Funktion $h := f \circ g$ konvergiert.

poschel@mathematik.uni-stuttgart.de
ulrich.linden@mathematik.uni-stuttgart.de andreas.bitter@mathematik.uni-stuttgart.de

Prof. Dr. J. Pöschel
Dr. Ulrich Linden
Andreas Bitter, M.Sc. 19.04.18

Analysis II - Vortragsübung 2

In der Mathematik muss man mit allem rechnen.
(Werner Mitsch)

2.1. Berechnen Sie die folgenden unbestimmten Integrale.

$$\textbf{(i)} \int \cos(3x)e^{\sin(3x)+3}\,\mathrm{d}x,\ \textbf{(ii)} \int x^\alpha \ln(x)\,\mathrm{d}x, \alpha\in\mathbb{R},\ \textbf{(iii)} \int \frac{e^{2x}}{e^x+1}\,\mathrm{d}x,\ \textbf{(iv)} \int \frac{x}{\cos^2(x)}\mathrm{d}x.$$

2.2. Berechnen Sie

$$\textbf{(i)} \int_0^{\ln(e-1)} \frac{e^x-1}{e^x+1}\,\mathrm{d}x,\quad \textbf{(ii)} \int_2^{\sqrt{13}} x\sqrt{x^2-4}\,\mathrm{d}x,\quad \textbf{(iii)} \int_{-2}^{-1} \frac{21x^2-1}{x-7x^3}\,\mathrm{d}x,\quad \textbf{(iv)} \int_0^1 e^{\sqrt{x+1}}\,\mathrm{d}x.$$

2.3. **(a)** Sei $x\in\mathbb{R},\ x\neq(2k+1)\pi\ \forall k\in\mathbb{Z}$, und $u:=\tan\left(\frac{x}{2}\right)$. Zeigen Sie

$$\textbf{(i)}\ \sin(x)=\frac{2u}{1+u^2}, \qquad \text{und} \qquad \textbf{(ii)}\ \cos(x)=\frac{1-u^2}{1+u^2}.$$

(b) Nutzen Sie Aufgabenteil **(a)** zur Berechnung des unbestimmten Integrals

$$\int \frac{1}{\sin(x)+\cos(x)+1}\,\mathrm{d}x.$$

2.4. Fassen Sie die folgenden Summen $S_n, n\in\mathbb{N}$ jeweils als Integrale von Treppenfunktionen auf und berechnen Sie damit die Grenzwerte $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$.

$$\textbf{(i)}\ S_n := \sum_{k=1}^n \frac{1}{n}\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right), \qquad \textbf{(ii)}\ S_n := \sum_{k=1}^n \frac{n}{k^2+n^2}, \qquad \textbf{(iii)}\ S_n := \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{n}{k^2}.$$

2.5. Sei

$$I_n := \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x)\,\mathrm{d}x,\ n\in\mathbb{N}_0.$$

(a) Zeigen Sie die folgende Rekursionsformel

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2},\ n\geq 2.$$

(b) Folgern Sie aus **(a)**, dass

$$\prod_{n=1}^\infty \frac{(2n)^2}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{\pi}{2}$$

gilt.

poschel@mathematik.uni-stuttgart.de
ulrich.linden@mathematik.uni-stuttgart.de andreas.bitter@mathematik.uni-stuttgart.de

Prof. Dr. J. Pöschel
Dr. Ulrich Linden
Andreas Bitter, M.Sc. 26.04.18

Analysis II - Vortragsübung 3

Es gibt mehr Leute, die kapitulieren, als solche, die scheitern.
(Henry Ford)

3.1. Untersuchen Sie die folgenden uneigentlichen Integrale auf Konvergenz.

$$\textbf{(i)} \int_1^\infty \frac{x^2}{x^4+4x^2+1}\,\mathrm{d}x, \qquad \textbf{(ii)} \int_{-1}^1 \frac{\sin(e^{\sqrt{x+1}})}{\sqrt{x+1}}\,\mathrm{d}x, \qquad \textbf{(iii)} \int_0^1 \frac{1}{x} - \frac{1}{\sin(x)}\,\mathrm{d}x.$$

3.2. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion.

(a) Angenommen, es gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f'(x)|\,\mathrm{d}x < \infty.$$

Zeigen Sie, dass die Funktion f dann beschränkt ist.

(b) Angenommen, die Funktion f ist beschränkt. Kann daraus die Konvergenz von

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f'(x)|\,\mathrm{d}x$$

gefolgert werden?

3.3. Gegeben sei die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) := \begin{cases} 1, & \exists\, n \in \mathbb{N} : x \in [n, n+\frac{1}{n^2}) \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass das uneigentliche Integral

$$\int_1^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$$

konvergiert, aber die Reihe

$$\sum_{n=1}^\infty f(n)$$

divergiert. Warum ist das kein Widerspruch zum Integralvergleichskriterium?

3.4. Untersuchen Sie folgende Reihen mit Hilfe des Integralvergleichskriteriums auf Konvergenz.

$$\textbf{(i)} \sum_{n=1}^\infty \frac{e^{-2\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}, \qquad \textbf{(ii)} \sum_{n=3}^\infty \frac{1}{n\ln(\ln(n))}, \qquad \textbf{(iii)} \sum_{n=3}^\infty \frac{\ln(\ln(n))}{n(\ln(n))^2}.$$

poschel@mathematik.uni-stuttgart.de
ulrich.linden@mathematik.uni-stuttgart.de andreas.bitter@mathematik.uni-stuttgart.de

Prof. Dr. J. Pöschel
Dr. Ulrich Linden
Andreas Bitter, M.Sc. 03.05.18

Analysis II - Vortragsübung 4

Nichts ist getan, wenn noch etwas zu tun übrig ist.
(Carl Friedrich Gauß)

4.1. Lösen Sie folgende Anfangswertprobleme

(a) $\dot{x} - e^{t-x} = e^t$ mit $x(0) = 0$,

(b) $(t^2 - 3t + 2)\dot{x} = \frac{1}{2}x - \frac{1}{x}$ mit $x(3) = -3$,

(c) $\dot{x} = -2tx + te^{-t^2}$ mit $x(0) = 0$,

(d) $\ddot{x} = 2x^3$ mit $x(0) = 1,\ \dot{x}(0) = 1$.

4.2. **(a)** Lösen Sie das folgende Anfangswertproblem

$$\dot{x} = 8t(1 + x^2), \quad x(0) = 1,$$

und geben Sie das maximale Existenzintervall an, d.h. das größte Intervall, auf dem die Lösung definiert ist.

(b) Für welche $x_0 \in \mathbb{R}$ ist die Lösung des Anfangswertproblems

$$\dot{x} = e^x \cos(t), \quad x(0) := x_0 \in \mathbb{R},$$

global, d.h. auf ganz $\mathbb{R}$ definiert?

(c) Lösen Sie folgende Differenzialgleichungen jeweils durch eine geeignete Substitution

(i) $\dot{x} = \dfrac{x(1 - tx)}{t}$, **(ii)** $\dot{x} = \dfrac{x^2 + 2tx}{t^2}$.

4.3. Sei $n \in \mathbb{N}$ und $a \in \mathbb{R}$ mit $a > 0$. Finden Sie eine Funktion $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ mit folgenden Eigenschaften:

(i) $f(1) = a$.

(ii) Für jedes $x_0 \in [0, 1]$ ist der Flächeninhalt des Rechtecks $[0, x_0] \times [0, f(x_0)]$ $n-$mal so groß wie jener der Fläche unter dem Graphen $\{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq x_0\}$.

4.4. Ein Fass enthält zum Zeitpunkt $t = 0$ genau 500 Liter Whisky.
Pro Sekunde fließen 100 ml Wasser in das Fass und zur gleichen Zeit fließen 100 ml der ideal durchmischten Flüssigkeit wieder ab. Bestimmen Sie für jede Zeit t das in der verdünnten Flüssigkeit enthaltene Volumen des Whiskys. Nach welcher Zeit besteht die verdünnte Flüssigkeit nur noch zu 10% aus Whisky?

poschel@mathematik.uni-stuttgart.de
ulrich.linden@mathematik.uni-stuttgart.de andreas.bitter@mathematik.uni-stuttgart.de

Prof. Dr. J. Pöschel
Dr. Ulrich Linden
Andreas Bitter, M.Sc. 17.05.18

Analysis II - Vortragsübung 5

Das Ergebnis habe ich schon, jetzt brauche ich nur noch den Weg, der zu ihm führt.
Carl Friedrich Gauß (1777-1855)

5.1. Gegeben sei die *Neilsche Parabel*

$$y^2(x) = x^3.$$

(a) Berechnen Sie die Länge der entsprechenden Kurven für $0 \leq x \leq 2018$.

(b) Parametrisieren Sie die entsprechenden Kurven nach ihrer Bogenlänge.

5.2. Gegeben sei die Kurve

$$\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2,\ \gamma(t) := \begin{cases} (0,0), & t = 0 \\ \left(t, t^2 \cos\left(\pi t^{-2}\right)\right), & t \in (0,1]. \end{cases}$$

(a) Zeigen Sie, dass γ injektiv und differenzierbar ist.

(b) Zeigen Sie, dass γ nicht rektifizierbar ist.

5.3. Sei $C([0,1])$ der Raum aller stetigen Funktionen $f : [0,1] \to \mathbb{R}$. Wir definieren auf diesem Raum die Abbildungen

$$\|\cdot\|_1 : C([0,1]) \to \mathbb{R},\ f \mapsto \|f\|_1 := \int_0^1 |f(x)|\,\mathrm{d}x,$$
$$\|\cdot\|_\infty : C([0,1]) \to \mathbb{R},\ f \mapsto \|f\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|.$$

(a) Zeigen Sie, dass es sich bei $\|\cdot\|_1$ um eine Norm handelt und dass der Raum $C([0,1])$ bezüglich dieser Norm kein Banachraum ist.

(b) Zeigen Sie, dass es sich bei $\|\cdot\|_\infty$ um eine Norm handelt und dass der Raum $C([0,1])$ bezüglich dieser Norm ein Banachraum ist.

(c) Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$A : (C([0,1])) \to \mathbb{R}, f \mapsto Af := f(1).$$

linear ist.

(d) Zeigen Sie, dass die lineare Abbildung aus Aufgabenteil **(c)** bezüglich der Norm $\|\cdot\|_1$ nicht beschränkt, aber bezüglich der Norm $\|\cdot\|_\infty$ beschränkt ist, d.h.

$$\sup_{f\neq 0} \frac{|Af|}{\|f\|_1} = \infty \qquad \text{und} \qquad \sup_{f\neq 0} \frac{|Af|}{\|f\|_\infty} < \infty.$$

5.4. Zeigen Sie, dass die Funktionen

$$\textbf{(i)}\ f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2,\ f_1(x) := \begin{pmatrix} 1+x \\ x^2 \end{pmatrix}, \qquad \textbf{(ii)}\ f_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f_2(x,y) := x^2 + y^2$$

total differenzierbar sind.

poschel@mathematik.uni-stuttgart.de
ulrich.linden@mathematik.uni-stuttgart.de andreas.bitter@mathematik.uni-stuttgart.de

Prof. Dr. J. Pöschel
Dr. Ulrich Linden
Andreas Bitter, M.Sc. 01.06.2018

Analysis II - Vortragsübung 6

Dont't panic.
Douglas Adams (1952-2001)

Dieses Blatt dient als Vorbereitung auf die kommende Scheinklausur.

6.1. **(a)** Berechnen Sie die folgenden Integrale

$$\textbf{(i)} \int_1^e \frac{\ln(x)}{x}\,\mathrm{d}x, \qquad \textbf{(ii)} \int_0^3 \frac{9}{9+x^2}\,\mathrm{d}x, \qquad \textbf{(iii)} \int_0^1 x^{-3}e^{-\frac{1}{x}}\,\mathrm{d}x.$$

(b) Bestimmen Sie alle reellen $\alpha > -1$, so dass das Integral

$$\int_1^\infty \frac{x}{2(x^2+2)} - \frac{\alpha}{x+1}\,\mathrm{d}x$$

konvergiert und berechnen Sie für diese α den Wert des Integrals.

(c) Seien $a, b \in \mathbb{R}, a < b$ und $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine monoton wachsende Funktion. Zeigen Sie

$$f(a) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq f(b).$$

6.2. Sei $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ eine monoton fallende Funktion mit $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$. Zeigen Sie, dass das folgende uneigentliche Integral konvergiert.

$$\int_0^\infty \sin(x)f(x)\,\mathrm{d}x$$

Hinweis: Leibniz-Kriterium für Reihen.

6.3. **(a)** Bestimmen Sie alle Lösungen folgender Differenzialgleichung.

$$\dot{x}(t) + 3x(t) = 0$$

(b) Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems

$$\dot{x}(t) + 3x(t) = e^t, \qquad x(0) := x_0 \in \mathbb{R}.$$

(c) Bestimmen Sie $x_0 \in \mathbb{R}$, so dass $x(1) = 1$ gilt.

(d) Gegeben sei das folgende Anfangswertproblem

$$\frac{\cos(t)\dot{y}(t)}{y(t) + 2\sin(t)} = e^{\sin(t^2)},\ y(0) = 1.$$

Berechnen Sie $\dot{y}(0)$.

poschel@mathematik.uni-stuttgart.de
ulrich.linden@mathematik.uni-stuttgart.de andreas.bitter@mathematik.uni-stuttgart.de

Prof. Dr. J. Pöschel
Dr. Ulrich Linden
Andreas Bitter, M.Sc. 01.06.2018

6.4. **(a)** Untersuchen Sie die Funktionenfolgen $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$, gegeben durch

$$\begin{aligned} f_n :&[0,\infty) \to \mathbb{R},\ f_n(x) := \frac{1}{1+nx}, \\ g_n :&[0,\infty) \to \mathbb{R},\ g_n(x) := x f_n(x), \\ h_n :&[0,\infty) \to \mathbb{R},\ h_n(x) := g_n(nx), \end{aligned}$$

auf punktweise und gleichmäßige Konvergenz.

(b) Sei für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Funktion $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ein Polynom. Konvergiere weiterhin die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass die Grenzfunktion f ebenfalls ein Polynom ist.

6.5. **(a)** Untersuchen Sie, ob die Mengen

(i) $M_1 := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : xy < 1\right\}$, **(ii)** $M_2 := \left\{x \in [0,2\pi] \ : \int_0^x \sin(t\sqrt{t})\,\mathrm{d}t = \frac{\sin(x\sqrt{x})}{2\pi}\right\}$

offen, abgeschlossen oder kompakt sind.

(b) Gegeben sei eine nichtleere Menge $V \subseteq \mathbb{C}$ und die Abbildung

$$d_V(\cdot) : \mathbb{C} \to \mathbb{R},\ d_V(z) := \inf_{v\in V} |v - z| \tag{1}$$

(i) Zeigen Sie, dass das Infimum in (1) angenommen wird, wenn V abgeschlossen ist.

(ii) Folgern Sie aus **(i)**, dass V genau dann abgeschlossen in $\mathbb{C}$ ist, wenn

$$V = \{z \in \mathbb{C} : d_V(z) = 0\}$$

gilt.

6.6. Gegeben seien $a > 0$, $b \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ und

$$\gamma : [0,a] \to \mathbb{R}^2,\ \gamma(t) := e^{bt}\begin{pmatrix}\cos(t)\\ \sin(t)\end{pmatrix}.$$

(a) Zeigen Sie, dass γ rektifizierbar ist.

(b) Berechnen Sie die Bogenlänge $s_{a,b}$ von γ in Abhängigkeit von a und b.

(c) Untersuchen Sie, für welche $b \in \mathbb{R}$ der Grenzwert $\lim\limits_{a\to\infty} s_{a,b}$ existiert.

6.7. Beweisen oder widerlegen Sie folgende Behauptungen.

(a) Die Funktion $f : [-1,1] \to \mathbb{R},\ f(x) := \cos(x^2)$ besitzt mindestens eine Stammfunktion.

(b) Konvergiert für eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ das Integral $\int_1^\infty |f(x)|\,\mathrm{d}x$, dann konvergiert auch das Integral $\int_1^\infty |f(x)|^2\,\mathrm{d}x$.

(c) Konvergiert für eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ das Integral $\int_1^\infty |f(x)|^2\,\mathrm{d}x$, dann konvergiert auch das Integral $\int_1^\infty |f(x)|\,\mathrm{d}x$.

(d) Ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig und die Menge $M := \{x \in \mathbb{R} \ : f(x) \neq 0\}$ beschränkt, dann ist f auf ganz $\mathbb{R}$ integrierbar.

(e) Ist eine Kurve γ nicht rektifizierbar, dann ist sie auch nicht lipschitz.

poschel@mathematik.uni-stuttgart.de
ulrich.linden@mathematik.uni-stuttgart.de andreas.bitter@mathematik.uni-stuttgart.de

Prof. Dr. J. Pöschel
Simon Barth, M.Sc.
Robin Lang, M.Sc.

Vortragsübung 7

Das Ergebnis habe ich schon, jetzt brauche ich nur noch den Weg, der zu ihm führt.
(Carl Friedrich Gauß; 1777 - 1855)

7.1. Sei $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$g(x,y) := \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) & (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass g in $(0,0)$ differenzierbar aber nicht partiell stetig differenzierbar ist.

7.2. Berechnen Sie die Jacobi-Matrix der folgenden Abbildungen

(a) $f : (0,\infty) \times (0,\infty) \to \mathbb{R}^2 \;:\; (x,y) \mapsto \begin{pmatrix} xy \\ \frac{\sqrt{x}}{y} \end{pmatrix}$;

(b) $g : \mathbb{R}^2 \backslash \{0\} \to \mathbb{R} \;:\; (x,y) \mapsto \log(x^2+y^2)$;

(c) $h : (0,\infty) \times (0,\infty) \to \mathbb{R} \;:\; h = g \circ f$.

7.3. Bestimmen Sie Art und Lage der lokalen Extrema der Abbildung

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \;:\; (x,y) \mapsto x^3y^2(1-x-y)$$

und geben Sie in den Extremstellen p das Taylorpolynom $T_p^2 f$ an. Zu Übungszwecken werden wir hierbei die Schreibweise mit Multiindices nutzen.

poschel@mathematik.uni-stuttgart.de
simon.barth@mathematik.uni-stuttgart.de robin.lang@mathematik.uni-stuttgart.de

Vortragsübung 8 - Konvexe Funktionen

Mathematics is the science of what is clear by itself.
(Carl Gustav Jacob Jacobi; 1804 - 1851)

8.1. Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ nicht leer und seien $t_1, t_2 > 0$. Zeigen Sie: Ist A konvex, so gilt

$$(t_1 + t_2)A = t_1 A + t_2 A.$$

Gilt die Aussage im Allgemeinen auch für nicht konvexe Mengen A?

Hinweis: Für $t > 0$ und $A, \tilde{A} \subset \mathbb{R}^n$ definieren wir

$$tA := \{ta \mid a \in A\} \subset \mathbb{R}^n, \quad \textit{sowie} \quad A + \tilde{A} = \{a + \tilde{a} \mid a \in A,\ \tilde{a} \in \tilde{A}\} \subset \mathbb{R}^n.$$

8.2. Seien $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konvexe Funktionen. Beweisen oder widerlegen Sie:

(a) $f + g$ ist konvex.

(b) fg ist konvex.

(c) $f \circ g$ ist konvex.

8.3. Seien $x_1, \dots, x_N > 0$ und $\lambda_1, \dots, \lambda_N \geq 0$ und $\sum_{j=1}^{N} \lambda_j = 1$. Beweisen Sie

$$\prod_{j=1}^{N} x_j^{\lambda_j} \leq \sum_{j=1}^{N} \lambda_j x_j.$$

8.4. Wir haben in Aufgabe **8.2** gesehen, dass – ohne weitere Voraussetzungen – die Komposition konvexer Funktionen im Allgemeinen nicht konvex ist. Wir wollen nun zeigen, dass (wachsende) Monotonie der äußeren Funktion dieses Problem behebt.

(a) Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ nicht leer und konvex, sowie $f = (f_1, \dots, f_m)^T : A \to \mathbb{R}^m$ mit

$$f_j : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

konvex für alle $j = 1, \dots, m$. Sei weiter

$$g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$$

konvex und komponentenweise monoton wachsend, jeweils bezüglich einer konvexen Menge M mit $\mathrm{Bild}(f) \subset M \subset \mathbb{R}^m$, d.h. für $y_1, y_2 \in M$ gelte

$$y_1 \leq y_2 \ \textit{komponentenweise} \quad \Rightarrow \quad g(y_1) \leq g(y_2).$$

Beweisen Sie, dass $h = g \circ f \ : \ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ konvex auf A ist.

(b) Zeigen Sie damit, dass für anti-konvexes $f : \mathbb{R}^n \to (0, \infty)$ die Funktion $h = 1/f$ konvex ist.

poschel@mathematik.uni-stuttgart.de
simon.barth@mathematik.uni-stuttgart.de robin.lang@mathematik.uni-stuttgart.de

Prof. Dr. J. Pöschel
Simon Barth, M.Sc.
Robin Lang, M.Sc.

Vortragsübung 9 - Linaren Differenzialgleichungen

Beweisen muss ich diesen Käs', sonst ist die Arbeit unseriös.
(Friedrich Wille; 1935-1992)

9.1. Harmonischer Oszillator mit Dämpfung

Zur Frequenz $\omega > 0$ und dem Reibungskoeffizienten $\varrho \geq 0$ betrachten wir die Differenzialgleichung des gedämpften Oszillators

$$\ddot{u} = -\omega^2 u - \varrho \dot{u},$$

wobei $\dot{u} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} u$ ist.

(a) Klassifizieren Sie das daraus resultierende zweidimensionale System vollständig.

(b) Skizzieren Sie das *Spur-Determinanten-Diagramm* und markieren Sie dort die betreffenden Bereiche.

(c) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung $u : t \mapsto u(t)$ in der Form

$$u(t) = r\mathrm{e}^{-\varrho/2} \sin\left(t\sqrt{\omega^2 - \varrho^2/4} + \tau\right)$$

mit Amplitude r und Phase τ.

(d) Interpretieren Sie die Ergebnisse physikalisch und skizzieren Sie den Graphen von u im Fall von $0 \leq \varrho < 2\omega$. Durch welchen Term ist die Einhüllende charakterisiert?

9.2. Darstellende Matrix gegeben in Jordan-Normalform

Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem des DGL-Systems

$$\begin{aligned} \dot{u}_1 &= u_1 + u_2 \\ \dot{u}_2 &= u_2 \\ \dot{u}_3 &= 2u_3. \end{aligned}$$

9.3. Darstellende Matrix mit Eigenwert algebraischer Vielfachheit 2

Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem des DGL-Systems

$$\begin{aligned} \dot{u}_1 &= 3u_1 \\ \dot{u}_2 &= 3u_2 + u_3 \\ \dot{u}_3 &= u_1 + 2u_3. \end{aligned}$$

9.4. Darstellende Matrix mit komplexen Eigenwerten

Betrachten Sie das lineare System $\dot{x} = Ax$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die allgemeine Lösung φ und die 1−Parametergruppe (e^{tA}).

poschel@mathematik.uni-stuttgart.de
simon.barth@mathematik.uni-stuttgart.de robin.lang@mathematik.uni-stuttgart.de

Vortragsübung 10 - Existenz und Eindeutigkeit

Die Mathematik allein befriedigt den Geist durch ihre außerordentliche Gewißheit.
(Johannes Kepler; 1571 - 1630)

10.1. Picard-Lindelöf Iterationen in einer und zwei Dimensionen
Berechnen Sie die ersten beiden nicht trivialen Picard-Lindelöf Iterationen zu den Differenzialgleichungen gegeben durch

a. $\dot{x} = 1 + tx^2, \quad x(0) = x_0 = 0;$

b. $\dot{\varphi} = \nu(t; \varphi)$ mit dem zeitabhängigen Vektorfeld

$$\nu(t; x, y) = (t^2 y - xy^2,\ x^3 - y + t)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^2, \qquad \varphi_0 = (0,\ 0)^{\mathrm{T}}.$$

10.2. Zur Existenz und Eindeutigkeit
Zu festem $\alpha \geq 0$ und $T > 0$ betrachten wir das Awp

$$\dot{x} = |x|^{\alpha}, \qquad x(0) = 0,$$

für $x : [0, T] \to \mathbb{R}$. Untersuchen Sie, wann die in der Vorlesung behandelten Existenz- und Eindeutigkeitssätze gelten und lösen Sie das Awp; geben Sie im Falle der Nichteindeutigkeit mindestens zwei verschiedene Lösungen an.

10.3. Zum Banach'schen Fixpunktsatz – die Fredholm'sche Integralgleichung
Sei $k : [0, 1] \times [0, 1] \to \mathbb{R}$ – genannt *Integralkern* – stetig und sei

$$\gamma := \sup_{x \in [0,1]} \int_0^1 |k(x, y)| \,\mathrm{d}y.$$

Zeigen Sie: Ist $\gamma < 1$, so hat

$$f(x) - \int_0^1 k(x, y) f(y) \,\mathrm{d}y = g(x) \qquad \textit{für alle } x \in [0, 1]$$

für beliebiges $g \in C([0, 1])$ genau eine Lösung $f \in C([0, 1])$. Diese genügt der Abschätzung

$$\|f\|_{\infty} \leq \frac{1}{1 - \gamma} \|g\|_{\infty}.$$

poschel@mathematik.uni-stuttgart.de
simon.barth@mathematik.uni-stuttgart.de robin.lang@mathematik.uni-stuttgart.de

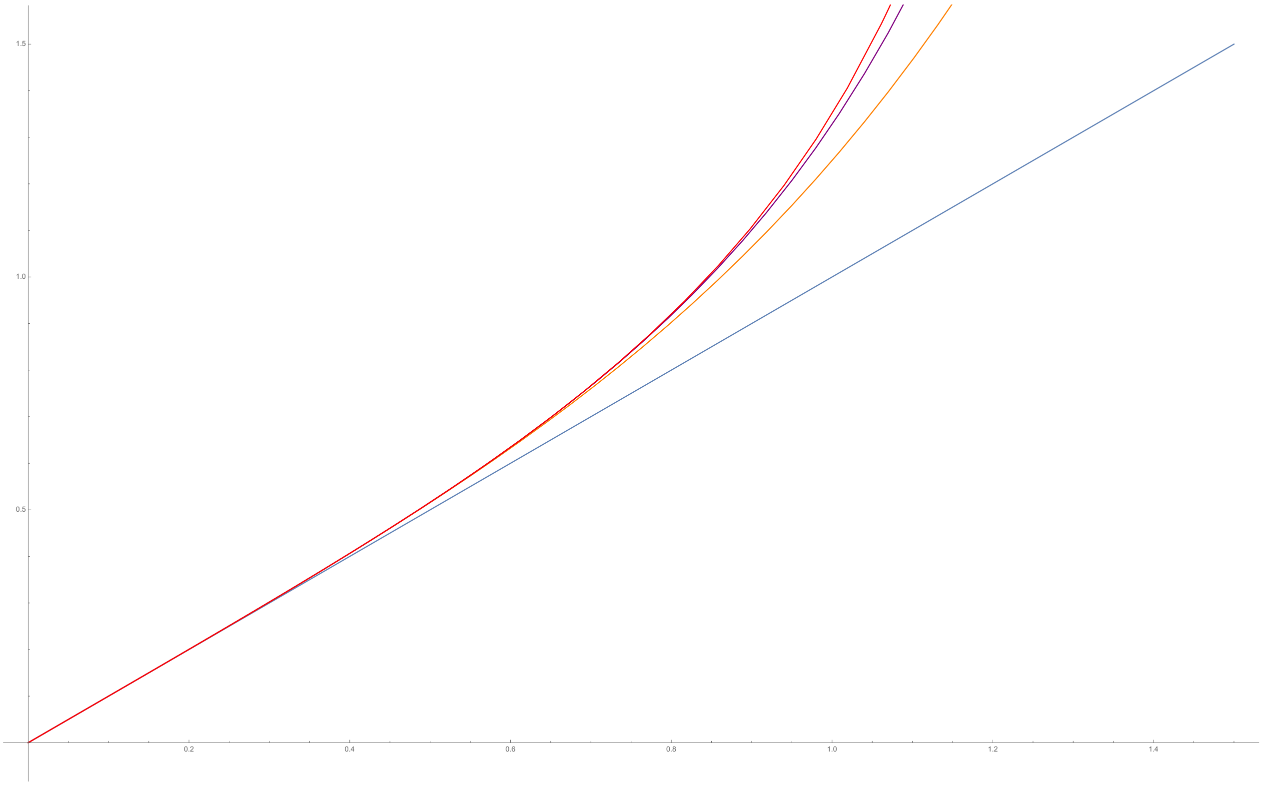

Abbildung 1: Zu Aufgabe 10.1 **a.** Die ersten drei iterationen $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ und die numerisch bestimmte Lösung des Anfangswertproblems $\dot{x} = 1 + tx^2,\ x(0) = 0$.

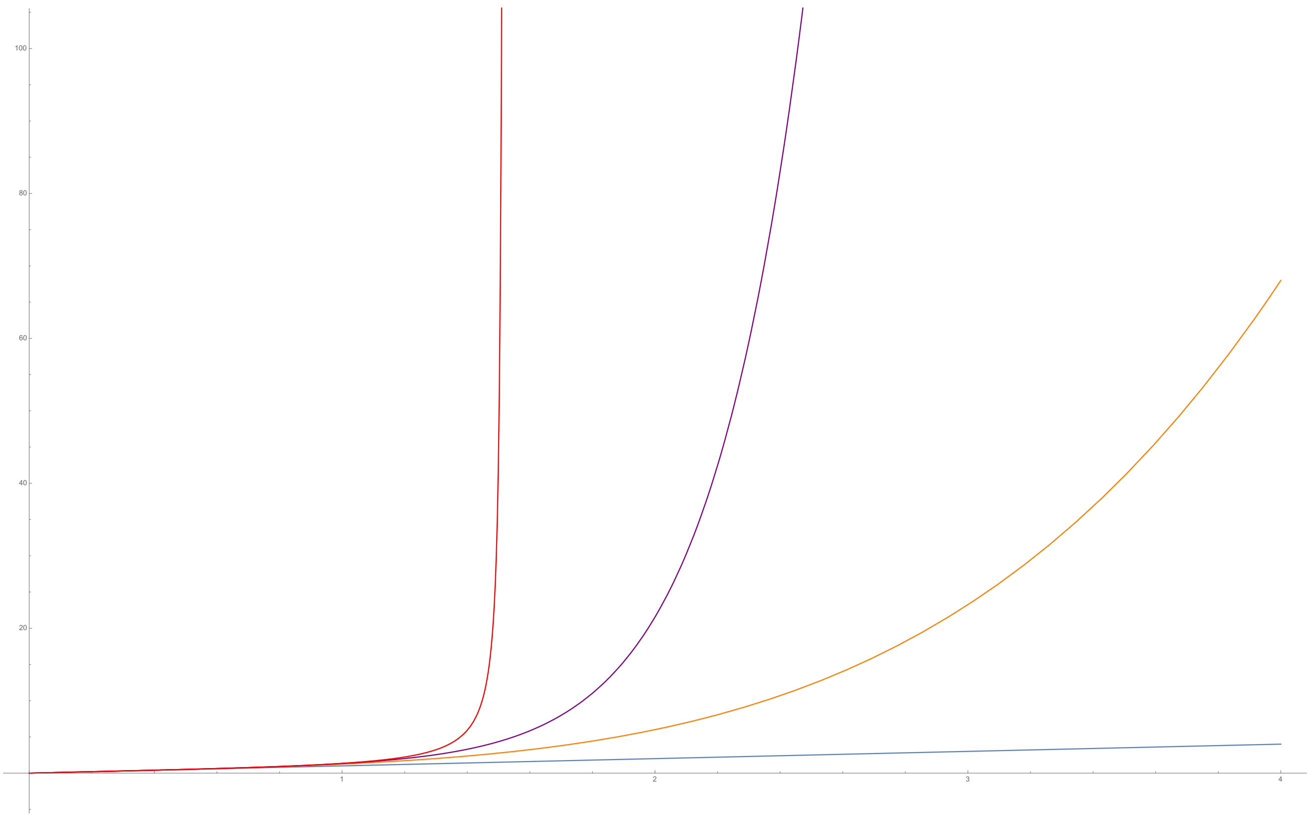

Abbildung 2: Zu Aufgabe 10.1 **a.** Bezeichnungen wie oben; Schaubild in anderer Skalierung

poschel@mathematik.uni-stuttgart.de
simon.barth@mathematik.uni-stuttgart.de robin.lang@mathematik.uni-stuttgart.de

Prof. Dr. J. Pöschel
Simon Barth, M.Sc.
Robin Lang, M.Sc.

Vortragsübung 11 - Pfaffsche Formen

Die Mathematiker sind eine Art Franzosen: Redet man zu ihnen, so übersetzen sie es in ihre Sprache, und dann ist es alsobald ganz etwas anderes.
(Johann Wolfgang von Goethe; 1749 - 1832)

11.1. Bestimmen Sie

a. das Differenzial der Funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f : (x_1, x_2, x_3) \mapsto x_1^2 + x_1 x_2 + \frac{1}{2} x_2 x_3^2;$$

b. die vom Vektorfeld

$$\nu(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} x_1 x_3^2 \\ x_1^2 x_3^2 + 2 \\ x_3 - x_1 \end{pmatrix}$$

induzierte 1-Form α_ν.

11.2. Bestimmen Sie $\int_\gamma \alpha$ zu

$$\alpha = x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x, \qquad \gamma \ : \ [a,b] \to \mathbb{R}^2 \ : \ \gamma(t) = e^t \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}.$$

11.3. Besitzt eine stetige 1-Form α eine Stammfunktion, also existiert A mit $\mathrm{d}A = \alpha$, so heißt α *exakt*. Sei $\varphi : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ stetig. Zeigen Sie, dass die 1-Form α mit

$$\alpha := \sum_{k=1}^{n} a_k \mathrm{d}x_k, \qquad a_k(x) := x_k \varphi\left(\|x\|_e\right), \qquad x = (x_1, \ldots, x_n)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^n$$

exakt ist.

11.4. Bestimmen Sie die Stammfunktion von

$$\alpha = (2xy + z^3)\mathrm{d}x + x^2\mathrm{d}y + 3xz^2\mathrm{d}z.$$

poschel@mathematik.uni-stuttgart.de
simon.barth@mathematik.uni-stuttgart.de robin.lang@mathematik.uni-stuttgart.de