10

Ergänzungen

10.1 Topologische Grundbegriffe

Der Begriff der Stetigkeit ist eng mit dem Begriff der Umgebung verbunden. Dieser Begriff, und die damit verbundenen Begriffe wie *offene* und *abgeschlossene Menge*, spielen eine fundamentale Rolle für die Analysis.

Wir führen diese Begriffed hier nur für normierte Räume ein, da dies für unsere Zwecke völlig ausreicht und noch hinreichend anschaulich ist.

■ Offene Mengen

Sei E ein beliebiger normierter Raum. Mit Hilfe der δ-Umgebungen eines Punktes a in E,

$$U_\delta(a) \coloneqq \{x \in E : \ \|x - a\| < \delta\},$$

definieren wir den grundlegenden topologischen Begriff der *offenen Menge*.

1 **Definition** *Eine Teilmenge A eines normierten Raumes E heißt offen, wenn sie mit jedem Punkt auch eine δ-Umgebung dieses Punktes enthält. Zu jedem $a \in A$ existiert also ein $\delta > 0$, so dass $U_\delta(a) \subset A$.* ⋊

⊳ *Beispiele* A. In $\mathbb{R}$ mit der Betragsnorm $|\cdot|$ ist jedes offene Intervall

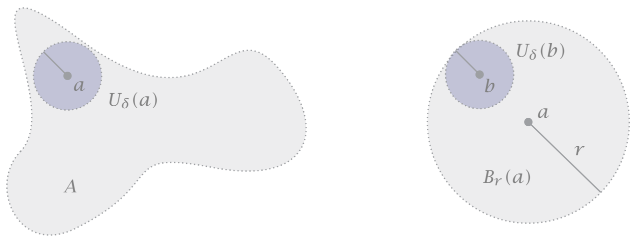
$$(a, b) \subset \mathbb{R}, \qquad -\infty \leqslant a < b \leqslant \infty,$$

topologisch offen. Denn für jedes $c \in (a, b)$ ist $\delta = \min\{c - a, b - c, 1\} > 0$, und für dieses δ gilt

$$U_\delta(c) = (c - \delta, c + \delta) \subset (a, b).$$

Dies gilt auch für $a = -\infty$ und $b = \infty$. Die Bezeichnung ›offenes Intervall‹ ist somit konsistent mit der obigen Definition von ›offen‹.

Abb 1 Offene Menge A und offene Kugel $B_r(a)$



B. Die Intervalle $\varnothing$ und $\mathbb{R}$ sind ebenfalls offen in $\mathbb{R}$.

C. In einem normierten Raum E ist jede *offene Kugel*

$$B_r(a) := \{x \in E : \|x - a\| < r\}, \qquad r > 0,$$

topologisch offen. Denn für $b \in B_r(a)$ ist $\rho = \|b - a\| < r$ und $\delta = r - \rho > 0$. Damit gilt $U_\delta(b) \subset B_r(a)$, denn für jedes $x \in U_\delta(b)$ ist

$$\|x - a\| \leqslant \|x - b\| + \|b - a\| < \delta + \rho = r.$$

Da jeder Punkt in $B_r(a)$ eine solche Umgebung besitzt, ist $B_r(a)$ offen. Die Bezeichnung ›offene Kugel‹ ist somit konsistent mit der obigen Definition.

D. Ein abgeschlossenes Intervall $[a, b]$ ist *nicht* offen in $\mathbb{R}$, denn jede Umgebung von a oder b enthält auch Punkte, die nicht zu $[a, b]$ gehören.

E. Ein-Punkt-Mengen sind nicht offen.

F. Die reelle Gerade $\mathbb{R}$ ist offen in $\mathbb{R}$, aber aufgefasst als Teilmenge des $\mathbb{R}^2$ ist $\mathbb{R}$ nicht offen. Daher ist es gelegentlich wichtig anzugeben, auf welchen Raum man sich bezieht, wenn man von einer offenen Menge spricht. ◂

Der folgende Satz beschreibt die grundlegenden topologischen Eigenschaften offener Mengen.

2 **Satz** *In einem normierten Raum E gilt:*

(i) *$\varnothing$ und E sind offen.*

(ii) *Die Vereinigung beliebig vieler offener Mengen ist offen.*

(iii) *Der Durchschnitt endlich vieler offener Mengen ist offen.* ⋊

Bemerkung In der allgemeinen Theorie topologischer Räume spielen diese Eigenschaften die Rolle von *Axiomen* für Familien offener Mengen. Eine beliebige Familie von Teilmengen einer Menge X heißt eine *Topologie auf X*, wenn sie diese drei Eigenschaften besitzt. ⊸

⟪⟪⟪ (i) Die leere Menge ist offen, da es gar keine Punkte gibt, für die eine Umgebung gebraucht wird. E ist offen, da E jede Umgebung enthält.

(ii) Sei $(A_\lambda)_{\lambda\in I}$ eine beliebige Familie offener Teilmengen von E und

$$a \in \bigcup_{\lambda\in I} A_\lambda.$$

Dann ist $a \in A_\mu$ für wenigstens ein $\mu \in I$. Da A_μ offen ist, enthält A_μ auch eine Umgebung $U_\delta(a)$ von a. Somit gilt auch

$$U_\delta(a) \subset A_\mu \subset \bigcup_{\lambda\in I} A_\lambda.$$

Also ist die Vereinigung ebenfalls offen.

(iii) Sei $(A_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ eine *endliche* Familie offener Teilmengen von E und

$$a \in \bigcap_{1\leqslant k\leqslant n} A_k.$$

Dann gibt es zu jedem $1 \leqslant k \leqslant n$ ein $\delta_k > 0$ derart, dass $U_{\delta_k}(a) \subset A_k$. Es ist $\delta = \min\{\delta_1, .., \delta_n\} > 0$, und für dieses δ gilt dann

$$U_\delta(a) \subset U_{\delta_k}(a) \subset A_k, \qquad 1 \leqslant k \leqslant n.$$

Also gilt auch

$$U_\delta(a) \subset \bigcap_{1\leqslant k\leqslant n} A_k.$$

Somit ist auch dieser Durchschnitt offen. ⟫⟫⟫

Bemerkungen *a.* Die Indexmenge I in (ii) ist völlig beliebig. Sie kann auch überabzählbar sein.

b. Wesentlich für (iii) ist offensichtlich, dass das Minimum *endlich* vieler positiver Zahlen wieder positiv ist. Dies gilt *nicht* für unendlich viele positive Zahlen, und (iii) ist im Allgemeinen auch falsch für unendlich viele Durchschnitte. So ist beispielsweise

$$\bigcap_{n\geqslant 1} (-2^{-n}, 2^{-n}) = \{0\}$$

nicht offen. ⊸

■ Abgeschlossene Mengen

Abgeschlossene Mengen werden als Komplemente offener Mengen erklärt.

Definition *Eine Teilmenge A eines normierten Raumes E heißt abgeschlossen, wenn ihr Komplement $A^c = E \setminus A$ offen ist.* ⋊

⊳ *Beispiele* A. Die Intervalle $\varnothing$ und $\mathbb{R}$ sind abgeschlossen, denn $\varnothing^c = \mathbb{R}$ und $\mathbb{R}^c = \varnothing$ sind offen.

B. Jedes abgeschlossene Intervall $[a,b]$ ist abgeschlossen, denn

$$[a,b]^c = (-\infty,a) \cup (b,\infty)$$

ist offen.

C. Ebenso sind $[a,\infty)$ und $(-\infty,b]$ abgeschlossen.

D. Die *abgeschlossenen Kugeln*

$$\bar{B}_r(a) \coloneqq \{x \in E : \|x-a\| \leqslant r\}, \qquad r \geqslant 0,$$

sind abgeschlossen. Denn für $b \notin \bar{B}_r(a)$ ist $\rho = \|b-a\| > r$, $\delta = \rho - r > 0$, und

$$U_\delta(b) \cap \bar{B}_r(a) = \varnothing.$$

Also ist das Komplement von $\bar{B}_r(a)$ offen, und $\bar{B}_r(a)$ selbst ist abgeschlossen.

E. Einpunktige Mengen sind abgeschlossen, denn $\{a\} = \bar{B}_0(a)$.

F. Halboffene beschränkte Intervalle, also $[a,b)$ und $(a,b]$, sind weder offen noch abgeschlossen. ⊲

Es folgen die grundlegenden topologischen Eigenschaften abgeschlossener Mengen.

3 **Satz** *In einem normierten Raum E gilt:*

(i) *$\varnothing$ und E sind abgeschlossen.*
(ii) *Der Durchschnitt beliebig vieler abgeschlossener Mengen ist abgeschlossen.*
(iii) *Die Vereinigung endlich vieler abgeschlossener Mengen ist abgeschlossen.* ⋊

⟨⟨⟨⟨⟨ Für *beliebige* Familien von Teilmengen eines Raumes gelten die *Regeln von de Morgan* A-1.15,

$$\Big(\bigcup_\lambda A_\lambda\Big)^c = \bigcap_\lambda A_\lambda^c, \qquad \Big(\bigcap_\lambda A_\lambda\Big)^c = \bigcup_\lambda A_\lambda^c.$$

Damit folgen alle Aussagen über abgeschlossene Mengen aus den entsprechenden Aussagen über offene Mengen, indem man die Komplemente betrachtet [1]. ⟩⟩⟩⟩⟩

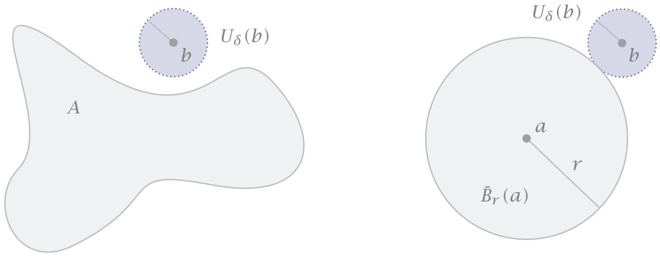
⊳ A. Jede endliche Punktmenge ist abgeschlossen, denn diese ist die endliche Vereinigung von Ein-Punkt-Mengen, welche abgeschlossen sind.

B. Die Vereinigung unendlich vieler abgeschlossener Mengen ist im Allgemeinen nicht mehr abgeschlossen. Beispielsweise ist

$$\bigcup_{n \geqslant 1} [-1+2^{-n}, 1-2^{-n}] = (-1,1)$$

eine offene Menge. ⊲

Abb 2 Abgeschlossene Menge A und abgeschlossene Kugel $\bar{B}_r(a)$



Bemerkung Man beachte, dass ›abgeschlossen‹ nicht die logische Negation von ›offen‹ darstellt. Denn der Gesamtraum und die leere Menge sind gleichzeitig offen *und* abgeschlossen. Ebenso gibt es Mengen, die weder offen noch abgeschlossen sind. ⊸

▪ Rand, Inneres und Abschluss

Das Konzept der offenen und abgeschlossen Mengen wird klarer, wenn wir daneben noch den *Rand* einer Menge betrachten.

Definition *Sei $A \subset E$ eine beliebige Menge. Ein Punkt $a \in E$ heißt Randpunkt von A, wenn jede Umgebung von a Punkte sowohl aus A wie auch aus A^c enthält. Der Rand ∂A einer Menge A ist die Menge aller ihrer Randpunkte.* ⋊

Umgekehrt ist ein Punkt a *kein Randpunkt* von A, wenn er eine Umgebung $U(a)$ besitzt, die entweder ganz in A oder ganz in A^c enthalten ist.

A. $\partial\varnothing = \varnothing$ und $\partial E = \varnothing$.
B. $\partial[a,b] = \partial(a,b) = \{a,b\}$.
C. $\partial\mathbb{Q} = \mathbb{R}$.
D. $\partial B_r(a) = \{x \in E : \|x-a\| = r\}$ für $r > 0$.
E. $\partial A = A$ für $A = [a,b] \times \{0\} \subset \mathbb{R}^2$.

4 **Satz** *Für jede Menge $A \subset E$ gilt:*
(i) $\partial A = \partial(A^c)$.
(ii) *∂A ist abgeschlossen.*
(iii) *A ist offen genau dann, wenn $\partial A \cap A = \varnothing$.*
(iv) *A ist abgeschlossen genau dann, wenn $\partial A \subset A$.* ⋊

⟪⟪ (i) Dies folgt aus $(A^c)^c = A$ und damit der Symmetrie der Definition bezüglich A und A^c.

(ii) Ist $a \notin \partial A$, so gibt es eine Umgebung $U(a)$, die ganz in A oder ganz in A^c enthalten ist. Damit ist aber *jeder Punkt* in $U(a)$ kein Randpunkt von A, also

$$U(a) \subset (\partial A)^c.$$

Also ist das Komplement von ∂A offen, und ∂A selbst ist abgeschlossen.

(iii) Ist A offen, so gibt es zu jedem Punkt $a \in A$ eine Umgebung $U(a)$, die ganz in A enthalten. Also ist kein Punkt in A ein Randpunkt von A. Enthält umgekehrt A keine Randpunkte, so muss es zu jedem $a \in A$ eine Umgebung $U(a)$ geben, die ganz in A enthalten ist, denn keine Umgebung von a kann ganz in A^c enthalten sein.

(iv) AE ist abgeschlossen genau dann, wenn A^c offen ist, also it (iv) genau dann, wenn $\partial A \cap A^c = \varnothing$. Dies ist aber genau dann der Fall, wenn $\partial A \subset A$. ⟫⟫

Somit ist eine Menge offen genau dann, wenn sie keinen ihrer Randpunkte, und abgeschlossen genau dann, wenn sie alle ihre Randpunkte enthält. Auf diese Weise kann man jeder Menge auch ihr *Inneres* und ihren *Abschluss* zuordnen.

5 **Definition** *Sei $A \subset E$ eine beliebige Menge. Dann heißen*

$$A^\circ := A \setminus \partial A, \qquad A^- := A \cup \partial A$$

das Innere oder der offene Kern respektive der Abschluss von A. ⋊

Aus der Definiton folgt unmittelbar

$$A^\circ \subset A \subset A^-, \qquad \partial A = A^- \setminus A^\circ.$$

Außerdem erhalten wir folgende Charakterisierung.

6 **Satz** *Sei $A \subset E$. Dann ist A° offen, A^- abgeschlossen, und A ist*

(i) *offen genau dann, wenn $A = A^\circ$,*

(ii) *abgeschlossen genau dann, wenn $A = A^-$.* ⋊

▷ A. Es gilt $\varnothing^\circ = \varnothing^- = \varnothing$ und ebenso $E^\circ = E^- = E$.

B. Für $I = [a, b)$ ist $I^\circ = (a, b)$ und $I^- = [a, b]$.

C. Für die rationalen Zahlen gilt $\mathbb{Q}^\circ = \varnothing$ und $\mathbb{Q}^- = \mathbb{R}$.

D. Für $r \geqslant 0$ gilt $\bar{B}_r(a)^\circ = B_r(a)$.

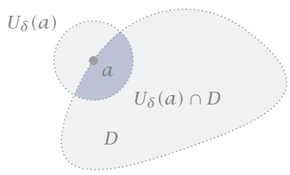
E. Für $r > 0$ gilt $B_r(a)^- = \bar{B}_r(a)$, aber nicht für $r = 0$.

F. Für $A = [a, b) \times \{0\} \subset \mathbb{R}^2$ ist

$$A^\circ = \varnothing, \qquad A^- = [a, b] \times \{0\}. \quad ◁$$

Abb 3

D-relative *δ*-Umgebung



Stetigkeit

Wir charakterisieren nun Stetigkeit mit Hilfe von offenen Mengen. Da wir als Definitionsbereiche nicht nur offene, sondern beliebige Mengen $D \subset E$ zulassen wollen, definieren wir noch die Mengen

$$U_\delta(a) \cap D, \qquad \delta > 0,$$

als *D-relative Umgebungen* eines Punktes $a \in D$.

A. Ist D offen und $a \in D$, so ist

$$U_\delta(a) \cap D = U_\delta(a)$$

für alle $\delta > 0$ hinreichend klein. In diesem Fall handelt es sich also um ›normale‹ Umgebungen.

B. Für ein abgeschlossenes Intervall $[a,b]$ gilt

$$U_\delta(a) \cap [a,b] = [a, a+\delta), \qquad 0 < \delta \leqslant b - a.$$

Also ist jedes halboffene Intervall $[a, a+\delta)$ mit $0 < \delta < b - a$ eine $[a,b]$-relativ offene Umgebung von a.

Bemerkung Beim ersten Lesen genügt es, jeden Definitionsbereich D einer Abbildung als offen anzunehmen. *D-relativ offen* ist dann nichts anderes als *offen* im Sinne der ersten Definition 1.

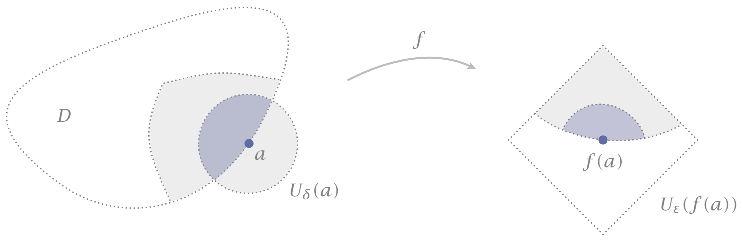
Es besteht nun folgender fundamentale Zusammenhang zwischen stetigen Abbildungen und offenen Mengen. Zuerst die lokale Situation.

7 **Satz** *Eine Abbildung $f : E \supset D \to F$ ist stetig im Punkt $a \in D$ genau dann, wenn das Urbild jeder ε-Umgebung von $f(a)$ eine D-relative δ-Umgebung von a enthält.*

⟨⟨⟨⟨⟨ $\Rightarrow$ Sei f stetig in a und $U_\varepsilon(f(a))$ eine ε-Umgebung von $f(a)$. Dann existiert zu diesem ε ein positives δ, so dass

$$f(U_\delta(a) \cap D) \subset U_\varepsilon(f(a)). \tag{1}$$

Abb 4 Stetiges Urbild einer ε-Umgebung mit relativer δ-Umgebung



Also gilt auch

$$U_\delta(a) \cap D \subset f^{-1}(U_\varepsilon(f(a))). \tag{2}$$

Somit enthält das Urbild dieser ε-Umgebung von $f(a)$ – die Menge rechts – wie gefordert eine D-relative δ-Umgebung von a.

$\Leftarrow$ Sei $\varepsilon > 0$. Dann enthält das Urbild der ε-Umgebung von $f(a)$ eine D-relative δ-Umgebung von a. Es gilt also (2) mit einem geeigneten $\delta > 0$. Dann gilt aber auch (1). Also ist f in a stetig. ⟫⟫⟫

Um den globalen Sachverhalt zu beschreiben, nennen wir eine Menge $A \subset E$ *D-relativ offen*, wenn sie mit jedem Punkt auch eine D-relativ offene Umgebung dieses Punktes enthält. Dies ist gleichbedeutend mit der Existenz einer in E offenen Menge U, so dass $A = U \cap D$. A-3.

8 **Satz** *Eine Abbildung $f: E \supset D \to F$ ist stetig auf D genau dann, wenn das Urbild jeder offenen Menge in F D-relativ offen in E ist.* ⋊

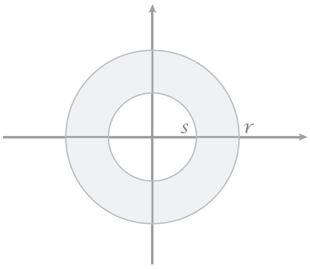
⟪⟪⟪ $\Rightarrow$ Sei $W \subset F$ offen und $V = f^{-1}(W)$. Ist V leer, so ist V offen, und wir sind fertig. Ist dagegen $a \in V$, so ist $f(a) \in W$, und da W offen ist, enthält W auch eine ε-Umgebung von $f(a)$. Aufgrund des vorangehenden Satzes enthält V eine D-relative δ-Umgebung von a. Da dies für jedes $a \in V$ gilt, ist V D-relativ offen.

$\Leftarrow$ Mit dem vorangehenden Satz folgt, dass f in jedem Punkt von D stetig ist. Also ist f auf ganz D stetig. ⟫⟫⟫

Dieser Satz ist in zweierlei Hinsicht interessant. Einerseits charakterisiert er Stetigkeit durch rein topologische Begriffe, indem er nur Bezug auf offene und relativ-offene Teilmengen nimmt. Dies ermöglicht es, Stetigkeit in allgemeinen topologischen Räumen zu definieren, ohne Bezug auf eine Norm, Metrik oder Ähnliches. Dies werden wir allerdings im Rahmen dieser Analysis nicht weiter betrachten.

Abb 5

Der Annulus $A_{s,r}$



Andererseits können wir damit Mengen als offen erkennen, die als Urbilder offener Mengen unter stetigen Abbildungen dargestellt werden können. Dasselbe gilt dann auch für abgeschlossene Mengen als Komplemente offener Mengen:

9 **Satz** *Ist $f : E \to F$ stetig, so ist das Urbild jeder abgeschlossenen Menge in F eine abgeschlossene Menge in E.* ⋊

⟨⟨⟨⟨ Ist A abgeschlossen in F, so ist A^c offen in F. Wegen der Stetigkeit von f ist dann auch $f^{-1}(A^c)$ offen in E. Wegen $_{\text{A-1.32}}$

$$f^{-1}(A^c) = (f^{-1}(A))^c$$

ist damit $f^{-1}(A)$ selbst abgeschlossen in E. ⟩⟩⟩⟩

A. Ist $f : E \to \mathbb{R}$ stetig, so ist die *Nullstellenmenge* von f,

$$N(f) := f^{-1}(0) = \{x \in E : f(x) = 0\},$$

abgeschlossen, denn dieser ist das Urbild der abgeschlossenen Menge $\{0\}$.

B. Dasselbe gilt für jede *Niveaumenge* $M^c = f^{-1}(c)$.

C. In einem normierten Raum ist jeder *Annulus* $_{\text{Abb 5}}$

$$A_{s,r} = \{x \in E : s \leqslant \|x\| \leqslant r\}, \qquad 0 \leqslant s \leqslant r < \infty,$$

abgeschlossen, denn dies ist das Urbild des abgeschlossenen Intervalls $[r, s]$ unter der stetigen Normfunktion.

D. Insbesondere gilt dies für die *Einheitskugel* $\mathbb{B} = A_{0,1}$ und die *Einheitssphäre* $\mathbb{S} = A_{1,1}$.

10.2 Kompaktheit

Der Beweis des Satzes vom Minimum & Maximum $_{7.19}$ basiert auf dem Argument, dass jede beliebige Folge innerhalb eines *abgeschlossenen Intervalls* eine konvergente Teilfolge besitzt, deren Grenzwert ebenfalls zu diesem Intervall gehört. Es stellt sich heraus, dass dies eine eminent wichtige und nützliche Eigenschaft gewisser Mengen ist. Sie hat daher auch einen eigenen Namen.

Definition *Eine Teilmenge K eines normierten Raumes E heißt kompakt, wenn jede Folge in K eine konvergente Teilfolge besitzt, deren Grenzwert ebenfalls zu K gehört.* ⋊

Wesentlich ist, dass die Teilfolge nicht nur konvergent ist, sondern dass ihr Grenzwert ebenfalls in der Menge K liegt. — Zunächst zwei einfache Beobachtungen, wie aus kompakten Mengen neue kompakte Mengen entstehen.

10 **Satz** *Die Vereinigung endlich vieler kompakter Mengen ist kompakt, und jede abgeschlossene Teilmenge einer kompakten Menge ist kompakt.* ⋊

⟨⟨⟨⟨⟨ Sei $K = K_1 \cup .. \cup K_n$ mit kompakten Mengen $K_1, .., K_n$. Ist (a_n) eine Folge in K, so muss wenigstens eine Menge K_i unendlich viele Folgenglieder enthalten. Die aus diesen Gliedern gebildete Teilfolge ist dann ganz in K_i enthalten. Da K_i kompakt ist, enthält sie ihrerseits eine konvergente Teilfolge mit Grenzwert in K_i. Diese zweite Teilfolge ist dann auch in der Obermenge K konvergent. Somit ist K kompakt.

Sei nun A eine abgeschlossene Teilmenge der kompakten Menge K. Ist (a_n) eine Folge in A, so auch in K. Sie besitzt somit eine konvergente Teilfolge mit Grenzwert in K. Da A abgeschlossen ist, gehört dieser Grenzwert ebenfalls zu A ??. Also ist auch A kompakt. ⟩⟩⟩⟩⟩

▷▶ A. Die leere Menge $\emptyset$ und jede Ein-Punkt-Menge ist kompakt.
B. Jede endliche Teilmenge eines normierten Raumes E ist kompakt.
C. Ein abgeschlossenes Intervall ist kompakt [12].
D. Offene, nichtleere Mengen sind niemals kompakt. ◀◁

Wir notieren jetzt zwei *notwendige* Eigenschaften kompakter Mengen.

11 **Satz** *Eine kompakte Teilmenge eines normierten Raumes ist abgeschlossen und beschränkt.* ⋊

⟨⟨⟨⟨⟨ *Abgeschlossen:* Sei K kompakt. Ist a ein Häufungspunkt von K, so ist a auch Grenzwert einer Folge in K. Folglich gehört auch a zu K, da K kompakt ist. Somit enthält K alle seine Häufungspunkte und ist abgeschlossen ??.

Beschränkt: Angenommen, K ist *nicht* beschränkt. Dann existiert zu jedem $n \geqslant 1$ ein $a_n \in K$ mit $\|a_n\| \geqslant n$. Die so gewonnene Folge in K besitzt keine konvergente Teilfolge, denn eine solche müsste ja beschränkt sein. ⟩⟩⟩⟩⟩

Die Umkehrung dieses Satzes gilt im Allgemeinen *nicht*. So ist in einem *unendlich dimensionalen* Vektorraum eine abgeschlossene und beschränkte Menge im Allgemeinen nicht kompakt $_{\text{A-??}}$. Anders ist dies in endlichen Dimensionen:

12 **Satz** *Eine Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ ist kompakt genau dann, wenn sie abgeschlossen und beschränkt ist.* ⋊

⟪⟪ $\Rightarrow$ Dies ist der vorangehende Satz.

$\Leftarrow$ Sei K abgeschlossen und beschränkt und (a_n) eine Folge in K. Da K beschränkt ist, existiert nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß $_{5.17}$ eine konvergente Teilfolge (a_{n_k}). Da K abgeschlossen ist, gehört deren Grenzwert ebenfalls zu K. Also besitzt (a_n) eine konvergente Teilfolge mit Grenzwert in K. ⟫⟫

⊳ A. Unter allen Intervallen sind genau die abgeschlossenen Intervalle $[a, b]$ kompakt.

B. Die abgeschlossene Einheitskugel $\mathbb{B}$ und die Einheitssphäre $\mathbb{S}$ im $\mathbb{R}^n$ sind kompakt.

C. Die Nullstellenmenge einer stetigen Funktion $f : E \to \mathbb{R}$ ist kompakt genau dann, wenn sie beschränkt ist. ⊲

▪ Stetige Abbildungen auf kompakten Mengen

Wir haben bereits gesehen, dass das stetige Bild eines abgeschlossenen Intervalls wieder ein abgeschlossenes Intervall ist. Dies ist ein Spezialfall des folgenden Satzes über stetige Bilder *kompakter* Mengen.

13 **Satz** *Ist K kompakt und $f : K \to F$ stetig, so ist auch $f(K)$ kompakt.* ⋊

⟪⟪ Sei (b_n) eine beliebige Folge in $f(K)$. Zu jedem n existiert mindestens ein $a_n \in K$ mit $b_n = f(a_n)$. Die Folge (a_n) besitzt in der kompakten Menge K eine konvergente Teilfolge (a_{n_k}) mit Grenzwert $a \in K$. Es gilt also $a_{n_k} \to a$. Aufgrund der Stetigkeit von f gilt dann auch

$$b_{n_k} = f(a_{n_k}) \to f(a) \in f(K).$$

Somit besitzt (b_n) eine in $f(K)$ konvergente Teilfolge. Da dies für jede beliebige Folge in $f(K)$ gilt, ist diese Menge kompakt. ⟫⟫

Jetzt betrachten wir speziell *reellwertige* Funktionen auf kompakten Mengen.

14 **Satz vom Minimum & Maximum** *Ist K kompakt und $f : K \to \mathbb{R}$ stetig, so existieren Punkte u und v in K mit*

$$f(u) \leqslant f(x) \leqslant f(v), \qquad x \in K.$$

Insbesondere gilt

$$f(u) = \inf_K f = \min_K f, \qquad f(v) = \sup_K f = \max_K f.$$

Die Funktion f nimmt also auf K ihr Infimum und Supremum an und ist beschränkt. ⋊

⟨⟨⟨⟨⟨ Nach dem vorangehenden Satz ist $f(K)$ kompakt in $\mathbb{R}$ und damit beschränkt. Also ist zum Beispiel $m = \inf_K f > -\infty$. Wie im vorangehenden Beweis existiert eine Folge (u_n) in K mit $f(u_n) \to m$. Da K kompakt ist, existiert eine konvergente Teilfolge (u_{n_k}) mit Grenzwert $u \in K$. Aufgrund der Stetigkeit von f gilt dann

$$f(u) = \lim f(u_{n_k}) = \lim f(u_n) = m.$$

Das Infimum wird also bei u angenommen. Entsprechend für das Supremum. ⟩⟩⟩⟩⟩

▪ Gleichmäßige Stetigkeit

Bei der ε-δ-Charaktersierung der Stetigkeit hängt die Wahl von δ im Allgemeinen vom betrachten Punkt ab. ›Funktioniert‹ dagegen ein δ für alle Punkte, so spricht man von *gleichmäßiger* Stetigkeit.

Definition *Eine Abbildung $f: E \supset D \to F$ heißt gleichmäßig stetig auf D, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass für alle $u, v \in D$ gilt:*

$$\|u - v\|_E < \delta \quad \Rightarrow \quad \|f(u) - f(v)\|_F < \varepsilon.$$ ⋊

⊳ A. Jede lipschitzstetige Abbildung ist gleichmäßig stetig.
B. Die Wurzelfunktion ist gleichmäßig stetig auf $[0, \infty)$.
C. Die Funktion $t \mapsto t^{-1}$ ist *nicht* gleichmäßig stetig auf $(0, \infty)$. ⊲

Eine stetige Funktion ist nicht notwendigerweise gleichmäßig stetig, wie das letzte Beispiel zeigt. Auf kompakten Definitionsbereichen ist dies anders.

15 **Satz** *Ist K kompakt und $f: K \to F$ stetig, so ist f sogar gleichmäßig stetig.* ⋊

⟨⟨⟨⟨⟨ Angenommen, f ist auf K *nicht* gleichmäßig stetig. Dann existieren ein $\varepsilon > 0$ und zu jedem $n \geqslant 1$ zwei Punkte $u_n \neq v_n$ in K mit

$$\|u_n - v_n\|_E < \frac{1}{n}, \qquad \|f(u_n) - f(v_n)\|_F \geqslant \varepsilon.$$

Da K kompakt ist, besitzt die Folge (u_n) eine konvergente Teilfolge (u_{n_k}) mit Grenzwert a in K. Wegen $\|u_n - v_n\|_E < 1/n$ konvergiert auch (v_{n_k}) gegen denselben Grenzwert a. Dann aber ist

$$\lim_{n\to\infty} \|f(u_{n_k}) - f(v_{n_k})\|_F = \|f(a) - f(a)\|_F = 0,$$

ein Widerspruch zu $\|f(u_n) - f(v_n)\|_F \geqslant \varepsilon$ für alle n. ⟫⟫⟫

Wir werden diesen Satz erst in der mehrdimensionalen Analysis benötigen, zum Beispiel bei der Vertauschbarkeit von Differenziation und Integration.

▪ Normen auf $\mathbb{R}^n$

Als Anwendung des Satzes über Minimum und Maximum $_{14}$ zeigen wir, dass alle Normen auf dem $\mathbb{R}^n$ äquivalent sind im folgenden Sinn.

16 **Definition** *Zwei Normen $\|\cdot\|_a$ und $\|\cdot\|_b$ auf einem Vektorraum E heißen äquivalent, wenn es eine Konstante $c \geqslant 1$ gibt, so dass*

$$c^{-1}\|x\|_a \leqslant \|x\|_b \leqslant c\|x\|_a, \qquad x \in E. \qquad \rtimes$$

Geometrisch betrachtet bedeutet dies, dass jede ε-Umgebung in der einen Norm eine δ-Umgebung bezüglich der anderen Norm enthält. Beide Normen definieren dann dieselben offenen und abgeschlossenen Mengen $_{\text{A-??}}$. Damit ist auch der Stetigkeitsbegriff derselbe: Eine Abbildung, die bezüglich einer Norm stetig ist, ist es auch bezüglich jeder äquivalenten Norm.

Offensichtlich stellt die Äquivalenz von Normen eine *Äquivalenzrelation* dar. Um die Äquivalenz aller Normen auf dem $\mathbb{R}^n$ zu zeigen, genügt es daher, ihre Äquivalenz zur *euklidischen Norm* zu zeigen. — Zunächst ein Lemma.

17 **Lemma** *Auf dem $\mathbb{R}^n$ ist jede Norm lipschitzstetig bezüglich der euklidischen Norm.* ⋊

⟪⟪⟪ Sei N eine Norm auf $\mathbb{R}^n$. Schreiben wir $x = x_1e_1 + .. + x_ne_n$ bezüglich der Standardbasis des $\mathbb{R}^n$, so folgt

$$\begin{aligned} N(x) &= N(x_1e_1 + .. + x_ne_n) \\ &\leqslant |x_1|\,N(e_1) + .. + |x_n|\,N(e_n) \\ &\leqslant (N(e_1) + .. + N(e_n)) \max\{|x_1|, .., |x_n|\} \\ &= L\,\|x\|_\infty \end{aligned}$$

mit der Konstanten $L = N(e_1) + .. + N(e_n)$. Mit der umgekehrten Dreiecksungleichung $_{5.31}$ für N und $\|x\|_\infty \leqslant \|x\|_2$ erhalten wir hieraus

$$|N(u) - N(v)| \leqslant N(u-v) \leqslant L\,\|u-v\|_\infty \leqslant L\,\|u-v\|_2$$

für alle $u, v \in \mathbb{R}^n$. Also ist N L-lipschitz bezüglich der euklidischen Norm. ⟫⟫⟫

18 **Satz** *Jede Norm auf dem $\mathbb{R}^n$ ist äquivalent zur euklidischen Norm.* ⋊

⟨⟨⟨⟨⟨ Sei N eine Norm auf $\mathbb{R}^n$. Die Einheitssphäre $\mathbb{S} = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_2 = 1\}$ bezüglich der euklidischen Norm ist abgeschlossen und beschränkt, also kompakt [12]. Aus Stetigkeitsgründen [17] nimmt N auf $\mathbb{S}$ ihr Minimum und Maximum an. Das Minimum kann nicht Null sein, denn N nimmt diesen Wert nur im Nullpunkt an, der nicht zu $\mathbb{S}$ gehört. Somit existieren Konstanten $0 < m \leqslant M$, so dass

$$m \leqslant N(x) \leqslant M, \qquad x \in \mathbb{S}.$$

Eine äquivlante Formulierung ist

$$m\,\|x\|_2 \leqslant N(x) \leqslant M\,\|x\|_2\,, \qquad \|x\|_2 = 1.$$

Aus Homogenitätsgründen gilt dies dann aber auch für alle $x \in \mathbb{R}^n$. ⟩⟩⟩⟩⟩

Auf dem $\mathbb{R}^n$ sind also alle Normen äquivalent. Ist eine Funktionen auf dem $\mathbb{R}^n$ bezüglich einer Norm stetig, so ist sie es also auch bezüglich jeder anderen Norm. Daher ist es in diesem Fall nicht notwendig, die Norm zu spezifizieren.

10.14

10.3 Funktionenfolgen und Funktionenräume

Sei D eine beliebige Teilmenge eines normierten Raumes E, und $F(D)$ der Vektorraum aller reellwertigen Funktionen $f\colon D \to \mathbb{R}$. Wir wollen Folgen in $F(D)$ und deren Konvergenz betrachten. Für solche Folgen gibt es vielfältige Möglichkeiten, die Konvergenz gegen eine Funktion f in $F(D)$ zu definieren. Die einfachste ist die *punktweise* Konvergenz.

Definition *Eine Folge (f_n) in $F(D)$ konvergiert punktweise gegen eine Funktion $f \in F(D)$, falls $f_n(x) \to f(x)$ für jedes $x \in D$.* ⋊

Bei der punktweisen Konvergenz betrachtet man die Folge der Funktionswerte $(f_n(x))$ einzeln in jedem Punkt x, *unabhängig* von allen anderen Punkten im Definitionsbereich D. Daher werden Eigenschaften der Funktionen in der Folge – wie zum Beispiel Stetigkeit – im Limes im Allgemeinen verlorengehen.

⊳ A. Für $0 \leqslant t \leqslant 1$ gilt

$$p_n(t) \coloneqq t^n \to \begin{cases} 0, & 0 \leqslant t < 1, \\ 1, & t = 1. \end{cases}$$

Die stetigen Funktionen p_n konvergieren also auf $[0,1]$ punktweise gegen eine im Punkt 1 unstetige Funktion Abb 6.

B. Für $t \in \mathbb{R}$ gilt

$$g_n(t) \coloneqq \frac{nt}{1+|nt|} \to \operatorname{sgn}(t) = \begin{cases} 1, & t > 0, \\ 0, & t = 0, \\ -1, & t < 0. \end{cases}$$

Die stetigen Funktionen g_n konvergieren also auf $\mathbb{R}$ punktweise gegen die unstetige Signumfunktion Abb 7. ⊲

Abb 6

Die Parabeln $t \mapsto t^n$ auf $[0,1]$ und ihre Grenzfunktion

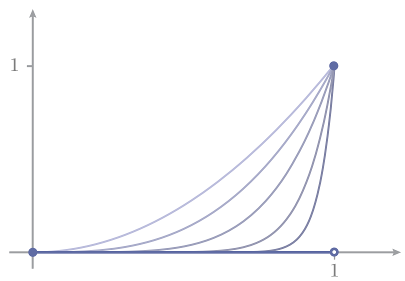
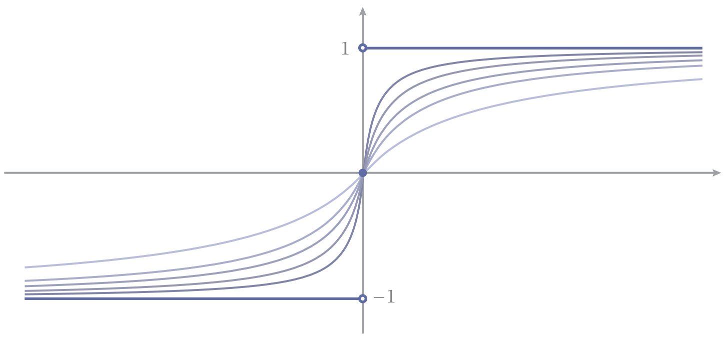


Abb 7 Die Funktionen g_n und ihre Grenzfunktion sgn



Ein stärkerer Konvergenzbegriff erhält die Stetigkeit beim Grenzübergang.

Definition *Eine Folge (f_n) in $F(D)$ konvergiert gleichmäßig gegen eine Funktion $f \in F(D)$, geschrieben*

$$f_n \rightrightarrows f,$$

falls für jedes $\varepsilon > 0$ ein $N \geqslant 1$ existiert, so dass

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

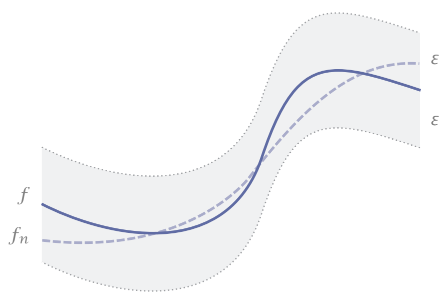
für alle $x \in D$ und $n \geqslant N$. ⋊

Anders als bei der punktweisen Konvergenz müssen also die Folgen $(f_n(x))$ für *alle* $x \in D$ den ε-N-Test *gleichzeitig* bestehen. Anschaulich bedeutet dies, dass in jedem ε-Schlauch um den Graphen der Grenzfunktion f die Graphen fast aller Funktionen f_n liegen müssen Abb 8.

Unter gleichmäßiger Konvergenz bleibt Stetigkeit nun erhalten.

Abb 8

ε-Schlauch um f



19 **Satz** *Konvergiert die Folge (f_n) in $F(D)$ gleichmäßig gegen f und sind alle f_n stetig, so ist auch f stetig. Der gleichmäßige Limes stetiger Funktionen ist somit ebenfalls stetig.* ⋊

⟨⟨⟨⟨⟨ Sei $a \in D$ und $\varepsilon > 0$. Da die Folge (f_n) gleichmäßig konvergiert, existiert ein $m \geqslant 1$, so dass

$$|f(x) - f_m(x)| < \varepsilon/3, \qquad x \in D.$$

Da f_m stetig ist, existiert ferner zum Punkt a ein $\delta > 0$, so dass

$$|f_m(x) - f_m(a)| < \varepsilon/3, \qquad x \in U_\delta(a) \cap D.$$

Daraus folgt für f und alle $x \in U_\delta(a) \cap D$ die Abschätzung

$$\begin{aligned} &|f(x) - f(a)| \\ &\quad \leqslant |f(x) - f_m(x)| + |f_m(x) - f_m(a)| + |f_m(a) - f(a)| \\ &\quad < \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 \\ &\quad = \varepsilon. \end{aligned}$$

Da für jedes $a \in D$ und $\varepsilon > 0$ ein solches $\delta > 0$ existiert, ist f stetig. ⟩⟩⟩⟩⟩

▪ Supremumsnorm

Interessant ist, dass sich die gleichmäßige Konvergenz in $F(D)$ mithilfe einer Norm ausdrücken lässt. — Dazu definieren wir die *Supremumsnorm* über der Menge D,

$$\|f\|_D \coloneqq \sup_{x \in D} |f(x)|.$$

Für eine unbeschränkte Funktion ist allerdings $\|f\|_D = \infty$, was für eine Norm ja nicht zulässig ist. Erst auf Räumen *beschränkter* Funktionen wird dies tatsächlich eine *Norm*. Daher führen wir folgende Räume ein.

20 **Definition und Notiz** *Die Räume*

$$\begin{aligned} B(D) &\coloneqq \{ f \in F(D) : \ \|f\|_D < \infty \}, \\ CB(D) &\coloneqq \{ f \in B(D) : f \text{ ist stetig} \} \end{aligned}$$

mit der Supremumsnorm $\|\cdot\|_D$ sind normierte Vektorräume. ⋊

⟨⟨⟨⟨⟨ Linearkombinationen beschränkter Funktionen sind wieder beschränkt. Dasselbe gilt für stetige Funktionen. Somit sind beide Räume Vektorräume, und die Funktion $\|\cdot\|_D$ ist dort *per definitionem* endlich. Von den Normeigenschaften benötigt nur die Dreiecksungleichung etwas Aufmerksamkeit. Es ist aber aufgrund der Dreiecksungleichung des reellen Betrages

$$\begin{aligned}\|f+g\|_D &= \sup_{x\in D}|f(x)+g(x)| \\ &\leqslant \sup_{x\in D}(|f(x)|+|g(x)|) \\ &\leqslant \sup_{x\in D}|f(x)|+\sup_{x\in D}|g(x)| = \|f\|_D+\|g\|_D\,. \end{aligned}$$ ⟫⟫

Konvergenz bezüglich der Supremumsnorm ist nun nichts anderes als gleichmäßige Konvergenz, denn

$$\|f_n - f\|_D < \varepsilon$$

ist gleichbedeutend mit

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, \qquad x \in D.$$

Zusammen mit dem Satz über den gleichmäßigen Limes stetiger Funktionen können wir daher die letzte Notiz 20 verbessern.

21 **Satz** *Die Räume $B(D)$ und $CB(D)$ mit der Supremumsnorm sind vollständige Vektorräume, also Banachräume.* ⋊

⟪⟪ Wir betrachten zuerst $B(D)$. Sei (f_n) eine Cauchyfolge in $B(D)$ bezüglich der Supremumsnorm. Dann ist $(f_n(x))$ für jedes $x \in D$ eine Cauchyfolge in $\mathbb{R}$ und damit wegen der Vollständigkeit von $\mathbb{R}$ konvergent. Wir können daher eine Funktion $f\colon D \to F$ punktweise definieren durch

$$f(x) \coloneqq \lim_{n\to\infty} f_n(x), \qquad x \in D.$$

Diese Funktion ist offensichtlich der punktweise Limes der Folge (f_n). Zu zeigen ist, dass auch $f \in B(D)$ und $\|f_n - f\|_D \to 0$ gilt, also (f_n) in der Supremumsnorm gegen f konvergiert.

Aus der Cauchy-Eigenschaft der Folge (f_n),

$$\|f_n - f_m\|_D = \sup_{x\in D}|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon/2, \qquad n, m \geqslant N(\varepsilon),$$

folgt durch punktweisen Grenzübergang $m \to \infty$ auch 5.9

$$|f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon/2, \qquad n \geqslant N(\varepsilon), \quad x \in D.$$

Also gilt auch

$$\sup_{x\in D}|f_n(x) - f(x)| = \|f_n - f\|_D \leqslant \varepsilon/2, \qquad n \geqslant N(\varepsilon),$$

und damit

$$\|f_n - f\|_D < \varepsilon, \qquad n \geqslant N(\varepsilon).$$

Also konvergiert (f_n) in der Norm $\|\cdot\|_D$ gegen f.

Mit $\varepsilon = 1$ und einem geeigneten f_m folgt außerdem

$$\|f\|_D \leqslant \|f_m\|_D + 1 < \infty.$$

Also ist f beschränkt und damit $f \in B(D)$. Damit ist gezeigt, dass jede Cauchyfolge in $B(D)$ einen Grenzwert in *diesem Raum* hat. Also ist $B(D)$ vollständig.

Nun betrachten wir noch den Unterraum $CB(D)$ von $B(D)$. Sind alle f_n stetig, so ist auch f als deren gleichmäßiger Limes stetig [19]. Also hat eine Cauchyfolge in $CB(D)$ einen Grenzwert, der ebenfalls wieder zu $CB(D)$ gehört. Also ist auch dieser Raum vollständig. ⟫⟫⟫

Der vorangehende Satz macht keine weiteren Annahmen über den Definitionsbereich. Dieser kann also eine beliebige Menge sein. Besonders elegant ist der Sachverhalt allerdings für kompakte Definitionsbereiche, da wir hier die Beschränktheit für stetige Funktionen nicht explizit fordern müssen.

Sei dazu

$$C(D) \coloneqq \{f \in F(D) : f \text{ ist stetig}\}.$$

Es gilt dann $CB(D) = C(D) \cap B(D)$.

22 **Korollar** *Ist K kompakt, so ist der Raum $C(K)$ aller stetigen reellwertigen Funktionen mit der Supremumsnorm vollständig, also ein Banachraum.* ⋊

⟪⟪⟪ Nach dem zweiten Satz vom Minimum & Maximum ?? ist jede stetige Funktion auf einer kompakten Menge beschränkt. Für kompakte Mengen gilt deshalb $C(K) = CB(K)$. Die Behauptung folgt dann aus dem letzten Satz [21]. ⟫⟫⟫

Wir werden dieses Korollar vor allem auf die Räume $C([a,b])$ stetiger reeller Funktionen auf kompakten Intervallen anwenden.

Bemerkung Alles Vorhergehende gilt auch für Abbildungen in einen beliebigen *Banachraum* F. So bildet

$$C(D,F) \coloneqq \{f : D \to F \text{ stetig}\}$$

einen Vektorraum, und der Unterraum

$$CB(D,F) \coloneqq \{f \in C(D,F) : \|f\|_{D,F} < \infty\}$$

bildet einen Banachraum, wobei $\|f\|_{D,F} \coloneqq \sup_{x \in D} \|f(x)\|_F$. Dasselbe gilt für $C(K,F)$, wenn K kompakt ist. Die Beweise sind praktisch dieselben. ⊸