13

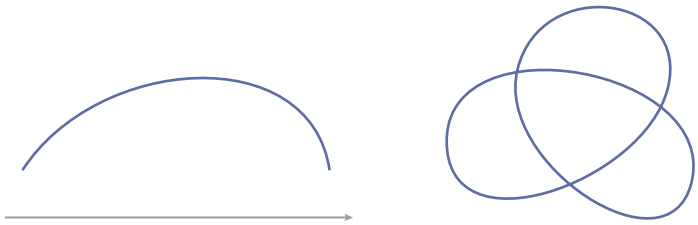
Kurven und Wege

Bisher kennen wir Kurven vor allem als Graphen reellwertiger Funktionen. Schreibt man aber eine Koordinate als Funktion einer anderen Koordinate, so sind die Darstellungsmöglichkeiten begrenzt. So lässt sich bereits ein Kreis nicht als Graph einer einzigen Funktion darstellen.

Wesentlich flexibler sind *parametrisierte Kurven*. Hier werden *alle* Koordinaten der Kurvenpunkte als Funktionen eines unabhängigen reellen *Parameters* dargestellt. Interpretieren wir diesen Parameter als Zeit, so können wir uns eine parametrisierte Kurve vorstellen als Reiseverlauf eines Punktes, der zu jedem Zeitpunkt angibt, an welchem Raumpunkt er sich befindet. Auf diese Weise lassen sich auch geschlossene oder mehrfach durchlaufene Kurven einfach beschreiben.

Parametrisierte Kurven bilden den ersten Schritt in Richtung der mehrdimensionalen Differenzialrechnung. Dabei können wir auch gleich Kurven in einem beliebigen Banachraum betrachten, denn eine Beschränkung auf endlich dimensionale Räume vereinfacht die Diskussion in keiner Weise.

Abb 1 Graph und Kurve



13.1 Kurven

Definition *Eine parametrisierte Kurve oder kurz Kurve in einem Banachraum E ist eine stetige Abbildung $\gamma\colon I \to E$ eines kompakten, nichtleeren Intervalls I in den Raum E. Ihr Bild, also die Menge*

$$\gamma(I) \coloneqq \{\gamma(t) : t \in I\} \subset E,$$

heißt die Spur der Kurve γ in E. ⋈

Eine *Kurve* γ ist demnach ein Element des Raumes $C(I,E)$ aller stetigen Abbildungen von I nach E. Durchläuft t das Intervall $I = [a,b]$ von a nach b, so durchläuft der Punkt $\gamma(t)$ die Spur $\gamma(I)$ der Kurve von ihrem *Anfangspunkt* $\gamma(a)$ zu ihrem *Endpunkt* $\gamma(b)$.

Die Abbildung γ selbst stellt eine *Parametrisierung* ihrer Spur dar. Im Allgemeinen erlaubt jede Spur unendlich viele verschiedene Parametrisierungen, da sie als reine Punktmenge keine Information über ihre Parametrisierung enthält.

Bemerkung In der Literatur wird allerdings auch die Spur gerne als Kurve bezeichnet, was auch dem allgemeinen Sprachgebrauch näher kommt. Im Bereich der Kurven ist die Terminologie überhaupt recht uneinheitlich. ⊸

Definition *Eine Kurve $\gamma\colon [a,b] \to E$ heißt geschlossen, wenn ihr Anfangs- und Endpunkt zusammenfallen, also $\gamma(a) = \gamma(b)$ gilt. Sie heißt einfach oder doppelpunktfrei, wenn sie auf $[a,b)$ und $(a,b]$ injektiv ist.* ⋈

Eine geschlossene Kurve ist also doppelpunktfrei, wenn Anfangs- und Endpunkt zusammenfallen, aber alle anderen Punkte ihrer Spur genau einmal durchlaufen werden. Der *Spur* allein sieht man allerdings nicht an, ob sie doppelpunktfrei ist oder nicht, da sie auch mehrfach durchlaufen sein kann.

▸▸ A. Jeder Punkt $p \in E$ ist die Spur einer *konstanten Kurve*

$$\gamma\colon I \to E, \quad \gamma(t) \equiv p.$$

Diese ist geschlossen, aber nicht doppelpunktfrei, falls $|I| > 0$.

Abb 2
Kurve in der Ebene

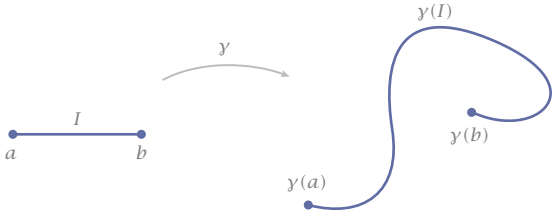
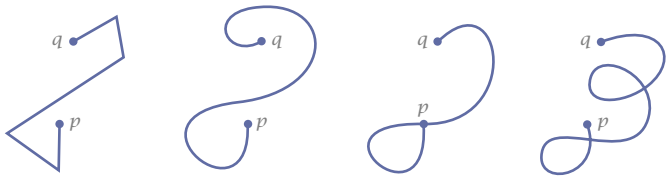


Abb 3 Nichtgeschlossene Kurven



B. Die *Strecke* mit Anfangspunkt p und Endpunkt q ist die Spur der Kurve

$$\gamma : [0,1] \to E, \quad \gamma(t) = (1-t)p + tq.$$

Für $p \neq q$ ist diese Kurve doppelpunktfrei und nicht geschlossen. Für $p = q$ ist die Kurve konstant, geschlossen, aber nicht doppelpunktfrei.

C. Der Graph einer Funktion $f \in C(I)$ wird durch die Kurve

$$\gamma : I \to \mathbb{R}^2, \quad \gamma(t) = (t, f(t))$$

parametrisiert. Diese ist immer doppelpunktfrei und nicht geschlossen.

D. Der Einheitskreis in der Ebene ist die Spur der geschlossenen, doppelpunktfreien Kurve 9.14

$$\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2, \quad \gamma(t) = (\cos t, \sin t).$$

E. Der *n-mal durchlaufene Einheitskreis* wird parametrisiert durch

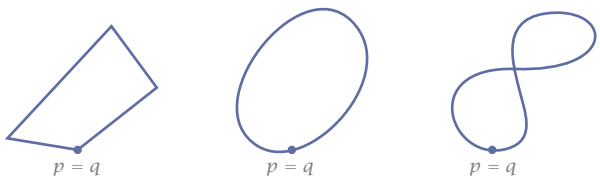
$$\gamma_n : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2, \quad \gamma_n(t) = (\cos nt, \sin nt), \qquad n \in \mathbb{Z}. \tag{1}$$

Er ist geschlossen, aber für $|n| \neq 1$ nicht doppelpunktfrei. Für $n < 0$ wird er im mathematisch negativen Sinn – also im Uhrzeigersinn – durchlaufen. Für $n = 0$ degeneriert zu einem Punkt. ◂

Peano- und Jordankurven

Mit dem Begriff der Kurve als stetiger Abbildung eines Intervalls verbindet sich unwillkürlich die Anschauung einer Linie, die man ›ohne abzusetzen‹ von

Abb 4 Geschlossene Kurven



ihrem Anfangs- bis zu ihrem Endpunkt zeichnen kann. Man sollte meinen, ihre Stetigkeit verhindert ein allzu wildes Verhalten. Dem ist jedoch nicht so. Auf Peano geht zum Beispiel folgende Entdeckung zurück.

1 **Satz von Peano** *Es gibt Kurven $\gamma\colon [0,1] \to [0,1]^2$, die surjektiv sind.* ⋊

Es gibt also Kurven, genannt *Peanokurven*, die ein Quadrat vollständig überdecken. Das stetige Bild einer *eindimensionalen* Menge kann somit *zweidimensional* sein. Somit ist die *Dimension* eines geometrischen Objektes nicht invariant unter *beliebigen* stetigen Abbildungen!

⟪⟪⟪⟪ *Beweisskizze* Die folgende Konstruktion geht auf Hilbert [1] zurück. Dabei wird induktiv eine Folge von Kurven $\gamma_n\colon [0,1] \to [0,1]^2$ wie in Abbildung 5 konstruiert. Die Kurve γ_n bildet dabei jedes Teilintervall des in 4^n gleichlange Teile zerlegten Einheitsintervalls $[0,1]$ in genau eines der 4^n gleichgroßen Teilquadrate von $[0,1]^2$ mit Kantenlänge 2^{-n} ab. Beim Übergang von γ_n zu γ_{n+1} wird dabei in jedem dieser Quadrate der Verlauf so verändert, dass jedes Viertel dieses Quadrates in der in Abbildung 5 ersichtlichen Weise durchlaufen wird. Somit gilt auf jeden Fall

$$\|\gamma_n - \gamma_{n+1}\|_{[0,1]} = \max_{t\in[0,1]} \|\gamma_n(t) - \gamma_{n+1}(t)\|_E \leqslant \frac{2}{2^n}, \qquad n \geqslant 1.$$

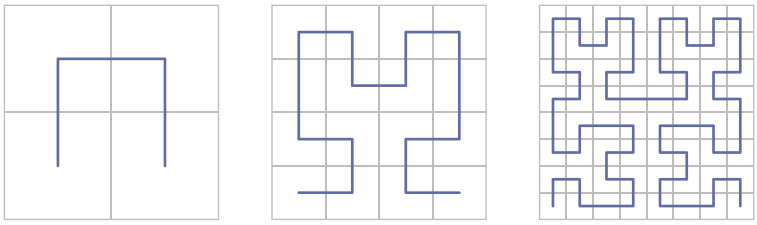
Für alle $m > n$ gilt somit auch

$$\|\gamma_n - \gamma_m\|_{[0,1]} \leqslant \sum_{k=n}^{m-1} \|\gamma_k - \gamma_{k+1}\|_{[0,1]} \leqslant \sum_{k=n}^{\infty} \frac{2}{2^n} = \frac{4}{2^n}.$$

Somit konvergieren die Kurven γ_n auf $[0,1]$ *gleichmäßig* gegen eine Abbildung $\gamma\colon [0,1] \to [0,1]^2$, die aufgrund der gleichmäßigen Konvergenz wiederum stetig ist 10.19, also eine Kurve darstellt.

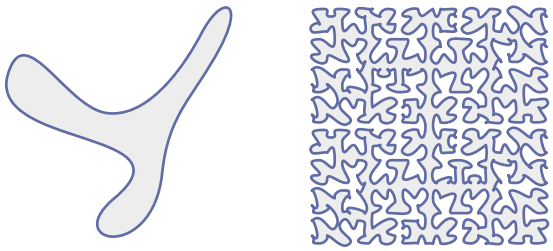
[1] Ueber die stetige Abbildung einer Linie auf ein Flächenstück. *Math. Ann.* **38** (1891), 459–460.

Abb 5 Konstruktion einer Peanokurve



γ_1 γ_2 γ_3

Abb 6
Zwei Jordankurven



Andererseits durchläuft jede Kurve γ_m mit $m \geqslant n$ jedes Teilquadrat der n-ten Teilung von $[0,1]^2$. Da die Feinheit dieser Teilung gegen Null strebt, liegt die Spur der Grenzkurve γ dicht in $[0,1]^2$. Als stetiges Bild der kompakten Menge $[0,1]$ ist sie aber auch kompakt $_{10.13}$. Also gilt $\gamma([0,1]) = [0,1]^2$. ⟩⟩⟩⟩⟩

Eine ›explizite‹ Darstellung einer Peanokurve wird in Aufgabe 1.18 gegeben.

Bei genauem Hinsehen stellt man fest, dass Peanokurven zwar surjektiv, aber nicht injektiv sind. Fordert man zusätzlich noch die Injektivität, so ergibt sich ein Bild, dass der Anschauung schon eher entspricht.

2 **Jordanscher Kurvensatz** *Ist Γ die Spur einer geschlossenen, doppelpunktfreien Kurve in der euklidischen Ebene, so besteht ihr Komplement aus genau zwei disjunkten und zusammenhängenden Komponenten, genannt das Innere und das Äußere der Kurve. Dabei ist das Innere beschränkt, das Äußere unbeschränkt, und der Rand beider Komponenten ist genau Γ.* ⋊

Geschlossene und doppelpunktfreie Kurven werden daher auch *Jordankurven* genannt. Der Satz scheint anschaulich klar, doch stellt sich heraus, dass der Beweis schwierig ist, wenn man beliebige *stetige* Kurven betrachtet. Tatsächlich ist es so, dass Jordankurven keineswegs ›schöne‹ Kurven sein müssen. Auch sie können eine Fläche mit positivem Inhalt ausfüllen. [2] — Stetige Kurven können also durchaus ›wild‹ sein. Wir werden deshalb vor allem differenzierbare Kurven betrachten.

[2] W.F. Osgood, A Jordan curve of positive area. *Trans. Am. Math. Soc.* **4** (1903), 107–112.
R. Maehara, The Jordan Curve Theorem via the Brouwer Fixed Point Theorem. *Amer. Math. Monthly* **91** (1984), 641–643.

13.2 Differenzierbare Kurven

Wir erklären nun, wann eine Kurve in einem Punkt differenzierbar ist. Wir gehen dabei wieder von der geometrischen Vorstellung aus, dass es in einem solchen Punkt eine eindeutige Gerade gibt – die *Tangente* – welche die Kurve besser als jede andere Gerade approximiert. Dies ist genau dann der Fall, wenn der Approximationsfehler bei Annäherung an den Berührpunkt schneller als eine lineare Funktion gegen Null strebt.

Sei I ein nichtentartetes Intervall, $\gamma\colon I \to E$ eine Kurve, und $a \in I$. Eine *Gerade* α durch den Kurvenpunkt $\gamma(a)$ hat die Parameterdarstellung

$$\alpha(t) = \gamma(a) + v(t-a)$$

mit einem Vektor $v \in E$. Dabei lassen wir auch $v = 0$ zu. Ihr Approximationsfehler zur Kurve γ an der Stelle t ist $\|\gamma(t) - \alpha(t)\|_E$, und für diesen fordern wir also

$$\lim_{t\to a} \frac{\|\gamma(t) - \alpha(t)\|_E}{|t-a|} = 0.$$

Wie im Fall reeller Funktionen einer Variablen ist dies höchstens für eine Wahl des Vektors v möglich [A-1.3]. Das heißt, wenn es ein solches v gibt, so ist es eindeutig bestimmt.

Definition *Sei I ein nichtentartetes Intervall. Eine Abbildung $\gamma\colon I \to E$ heißt differenzierbar im Punkt $a \in I$, wenn es einen Vektor $v \in E$ gibt, so dass*

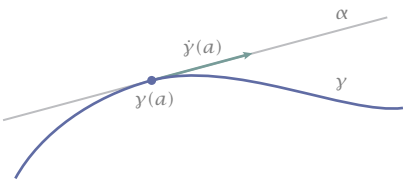
$$\lim_{t\to a} \frac{\|\gamma(t) - \gamma(a) - v(t-a)\|_E}{|t-a|} = 0. \tag{2}$$

In diesem Fall heißt v die erste Ableitung von γ im Punkt a und wird mit $\dot\gamma(a)$ oder $\gamma'(a)$ bezeichnet. ⋊

Diese Differenzierbarkeit lässt sich wiederum mithilfe von Differenzenquotienten charakterisieren. Diese sind in einem Banachraum wohldefiniert, da es sich dabei um nichts anderes als Linearkombinationen handelt.

Abb 7

Kurve mit Tangentialvektor und Tangente



3 **Zweiter Differenzierbarkeitssatz** *Für eine Abbildung $\gamma\colon I \to E$ und einen Punkt $a \in I$ sind äquivalent:*

(i) *γ ist differenzierbar in a mit $\dot\gamma(a) = v$.*

(ii) *Es gibt einen Vektor $v \in E$ und eine im Punkt a stetige und verschwindende Abbildung $\varepsilon\colon I \to E$, so dass*

$$\gamma(t) = \gamma(a) + v(t-a) + \varepsilon(t)(t-a). \tag{3}$$

(iii) *Es existiert der Grenzwert*

$$\lim_{h\to 0} \frac{\gamma(a+h)-\gamma(a)}{h} = \lim_{t\to a} \frac{\gamma(t)-\gamma(a)}{t-a} = v.$$

(iv) *Es gilt*

$$\lim_{t\to a} \frac{\|\gamma(t)-\gamma(a)-v(t-a)\|_E}{|t-a|} = 0. \qquad \bowtie$$

⟨⟨⟨⟨⟨ (i) ⇔ (ii) Setzen wir

$$\varepsilon(t) = \frac{\gamma(t)-\gamma(a)-v(t-a)}{t-a}, \qquad t \neq a,$$

so ist ε wegen (2) stetig im Punkt a durch den Wert 0 fortsetzbar. Es gilt dann (3). Umgekehrt folgt aus (3) unmittelbar (2).

(ii) ⇔ (iii) Mit den Bezeichnungen von (3) ist

$$\frac{\gamma(t)-\gamma(a)}{t-a} = v + \varepsilon(t), \qquad t \neq a.$$

Verschwindet ε stetig im Punkt a, so ist

$$v = \lim_{t\to a}(v+\varepsilon(t)) = \lim_{t\to a}\frac{\gamma(t)-\gamma(a)}{t-a}.$$

Existiert umgekehrt der Grenzwert auf der rechten Seite, so ist ε stetig fortsetzbar im Punkt a mit dem Wert 0, und es gilt (3).

(iii) ⇔ (iv) Das ist klar. ⟩⟩⟩⟩⟩

Der Vektor

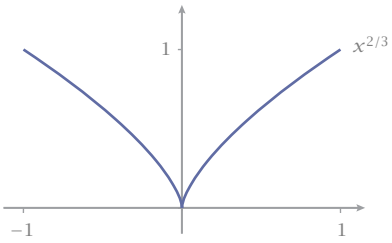
$$v = \dot\gamma(a)$$

heißt *Tangential-* oder *Geschwindigkeitsvektor* der Kurve im Punkt $\gamma(a)$, seine Länge $\|\dot\gamma(a)\|_E$ ihre *(momentane) Geschwindigkeit*. Ist $\dot\gamma(a) \neq 0$, so ist die *Tangente* an γ im Punkt $\gamma(a)$ gegeben durch die parametrisierte Gerade

$$\alpha(t) = \gamma(a) + \dot\gamma(a)t.$$

Ist dagegen $\dot\gamma(a) = 0$, so ist die Tangente nicht definiert. Die Kurve kann in diesem Fall eine Ecke oder Spitze bilden.

Abb 8
Die Neilsche Parabel



4 ▷ A. Die Kurve

$$\gamma\colon\ [-1,1] \to \mathbb{R}^2, \quad \gamma(t) = (t^3, t^2)$$

ist in jedem Punkt differenzierbar mit Ableitung und Geschwindigkeit

$$\dot\gamma(t) = (3t^2, 2t), \qquad \|\dot\gamma(t)\|_2 = \sqrt{9t^4 + 4t^2},$$

hat aber im Nullpunkt eine Spitze. Es handelt sich um die (an der Hauptdiagonalen gespiegelte) *Neilsche Parabel* $x \mapsto x^{2/3}$ Abb 8 .

B. Die Spur der Kurve

$$\gamma\colon\ [-1,1] \to \mathbb{R}^2, \quad \gamma(t) = (t^3, t^6)$$

ist ein glatter Parabelbogen, aber es ist $\dot\gamma(0) = 0$. ◁

Bemerkung Beschreiben wir die Neilsche Parabel als *Graphen* der Funktion $x \mapsto x^{2/3}$, so ist diese im Punkt 0 *nicht* differenzierbar. Beschreiben wir sie jedoch wie im vorangehenden Beispiel als *parametrisierte Kurve*, so ist diese Parametrisierung überall differenzierbar, auch wenn der Tangentialvektor an einer Stelle verschwindet. Letzteres ist unvermeidlich, da die Neilsche Parabel dort eine Spitze ausbildet. Der Graph einer *differenzierbaren* Funktion besitzt dagegen in jedem Punkt eine Tangente A-1.4 . ⊸

Definition *Eine Kurve $\gamma\colon I \to E$ heißt differenzierbar, wenn sie in jedem Punkt von I differenzierbar ist. In diesem Fall heißt*

$$\dot\gamma\colon\ I \to E, \quad t \mapsto \dot\gamma(t)$$

die Ableitung von γ. Ist $\dot\gamma$ stetig, so heißt γ stetig differenzierbar oder C^1. ⋈

Die Ableitung einer C^1-Kurve ist somit wieder eine Kurve. Induktiv können wir daher wie bei den reellwertigen Funktionen die Klassen

$$C^r(I,E), \qquad 0 \leqslant r \leqslant \infty,$$

aller r-mal stetig differenzierbaren Kurven $I \to E$ definieren. Dabei steht $C^0(I,E)$ für $C(I,E)$. — Wir notieren die beiden wichtigsten Rechenregeln.

5 **Satz** *Seien $\gamma, \eta \in C^r(I,E)$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Dann ist auch $\alpha\gamma + \beta\eta \in C^r(I,E)$, und es gilt*

$$(\alpha\gamma + \beta\eta)^{\cdot} = \alpha\dot{\gamma} + \beta\dot{\eta}.$$

Ist außerdem $\varphi\colon J \to I$ eine C^r-Abbildung, so ist $\gamma \circ \varphi \in C^r(J,E)$ und

$$(\gamma \circ \varphi)^{\cdot} = (\dot{\gamma} \circ \varphi)\dot{\varphi}. \quad \bowtie$$

Die Beweise verlaufen wie bei den differenzierbaren Funktionen 8.1 und sind als Übung überlassen. Beide Aussagen sind ohnehin Spezialfälle allgemeinerer Sätze, die im nächsten Kapitel bewiesen werden.

▪ Kurven im $\mathbb{R}^m$

Im $\mathbb{R}^m$ werden Kurven durch m Komponentenfunktionen beschrieben, die wir aus Platzgründen meist als Zeilenvektor

$$\gamma(t) = (\gamma_1(t), .., \gamma_m(t))$$

darstellen [3]. Die Kurve γ ist stetig genau dann, wenn jede Komponente γ_i stetig ist 5.38. Betrachten wir Differenzenquotienten, so gilt Entsprechendes auch für die Differenzierbarkeit 1.3.

6 **Satz** *Eine Kurve $\gamma\colon I \to \mathbb{R}^m$ ist im Punkt $a \in I$ differenzierbar genau dann, wenn jede Komponentenfunktion in a differenzierbar ist. Es gilt dann*

$$\dot{\gamma}(a) = (\dot{\gamma}_1(a), .., \dot{\gamma}_m(a)).$$

Sie ist C^r für $1 \leqslant r \leqslant \infty$ genau dann, wenn jede Komponente C^r ist. $\bowtie$

A. Die Standardparametrisierung des Einheitskreises,

$$\gamma\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2, \quad \gamma(t) = (\cos t, \sin t),$$

ist eine C^∞-Kurve mit Ableitung und Geschwindigkeit

$$\dot{\gamma}(t) = (-\sin t, \cos t), \qquad \|\dot{\gamma}(t)\|_2 = 1.$$

B. Die übliche Parametrisierung des Graphen einer C^r-Funktion $f\colon I \to \mathbb{R}$,

$$\gamma\colon I \to \mathbb{R}^2, \quad \gamma(t) = (t, f(t)),$$

ist C^r und hat Ableitung und Geschwindigkeit

$$\dot{\gamma}(t) = (1, f'(t)), \qquad \|\dot{\gamma}(t)\|_2 = \sqrt{1 + (f')^2(t)} > 0.$$

[3] Ab dem nächsten Kapitel hat der Urbildraum standardmäßig die Dimension n und der Zielraum die Dimension m. Daher schreiben wir auch hier m.

Der Hauptsatz

Die Ableitung einer stetig differenzierbaren Kurve ist wieder eine Kurve. Wie bei den reellen Funktionen können wir daher die Frage stellen, ob umgekehrt jede Kurve die Ableitung einer anderen Kurve ist. In der Tat gilt der Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung $_{11.17}$ auch hier. Wir müssen nur das Integral im $\mathbb{R}^m$ beziehungsweise dem Banachraum E bilden, wie in Abschnitt 11.7 beschrieben. Diesen Integral benötigen wir später ohnehin für die Integration von 1-Formen entlang Kurven.

7 Stammfunktionensatz *Sei $\gamma \in C(I,E)$ und $c \in I$ beliebig. Dann definiert*

$$\Phi(t) \coloneqq \int_c^t \gamma$$

eine Stammfunktion $\Phi \in C^1(I,E)$ zu γ. Das heißt, es gilt $\dot\Phi = \gamma$ auf I. ⋊

⟪⟪⟪⟪⟪ Jede stetige Kurve $\gamma\colon I \to E$ ist integrierbar. Die Abbildung Φ ist daher für jedes $t \in I$ definiert. Aus der Additivität des Integrals folgt

$$\Phi(t+h) = \int_c^t \gamma + \int_t^{t+h} \gamma = \Phi(t) + \left[\frac{1}{h}\int_t^{t+h} \gamma\right] h.$$

Der Ausdruck in eckigen Klammern besitzt aufgrund des Riemannschen Lemmas $_{11.16}$ für $h \to 0$ den Grenzwert $\gamma(t)$. Somit ist Φ im Punkt t differenzierbar, und es ist

$$\dot\Phi(t) = \gamma(t).$$

Da dies in jedem Punkt $t \in I$ gilt, ist Φ eine Stammfunktion von γ. ⟫⟫⟫⟫⟫

▹▸ Eine Kurve γ im $\mathbb{R}^m$ wird natürlich komponentenweise integriert, und eine Stammfunktion besteht aus den Stammfunktionen der Komponenten von γ. Ist also zum Beispiel

$$\gamma(t) = (2t, 3t^2, 4t^3),$$

so ist eine Stammfunktion gegeben durch

$$\Phi(t) = \int_0^t (2s, 3s^2, 4s^3)\,\mathrm{d}s = (t^2, t^3, t^4). \quad ◂◃$$

8 Lemma *Zwei verschiedene Stammfunktionen einer Kurve $\gamma \in C(I,E)$ unterscheiden sich nur durch eine additive Konstante in E.* ⋊

⟪⟪⟪⟪⟪ Betrachten wir zwei beliebige Stammfunktionen einer Kurve γ, so ist deren Differenz eine stetig differenzierbare Kurve mit überall verschwindender Ableitung. Es genügt daher zu zeigen, dass eine solche Kurve konstant ist.

Sei also $\varphi\colon I \to E$ eine C^1-Kurve mit $\dot\varphi = 0$. Angenommen, es gibt zwei Punkte $u, v \in I$ mit $\varphi(u) \neq \varphi(v)$. Dann gibt es auch ein lineares Funktional $L \in E^*$ mit $L\varphi(u) \neq L\varphi(v)$. Im $\mathbb{R}^m$ ist dies leicht einzusehen, indem man L als Skalarprodukt mit einem geeignet gewählten festen Vektor wählt 14.1. In einem beliebigen Banachraum ist dies eine Konsequenz des Satzes von Hahn-Banach. Damit gilt dann

$$L\varphi(v) - L\varphi(u) = \int_u^v (L\varphi)^\cdot = \int_u^v L\dot\varphi = 0,$$

und wir erhalten einen Widerspruch. ⟩⟩⟩⟩⟩

Damit gilt auch der Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung 11.17 ebenso für Kurven.

9 **Hauptsatz** *Sei $\gamma \in C(I,E)$. Für jede Stammfunktion Γ von γ und jedes Intervall $[a,b] \subset I$ gilt dann*

$$\int_a^b \gamma = \Gamma\Big|_a^b = \Gamma(b) - \Gamma(a).$$

Für jede C^1-Kurve γ gilt insbesondere

$$\int_a^b \dot\gamma = \gamma(b) - \gamma(a). \quad \lhd$$

⟨⟨⟨⟨⟨ Der Beweis verläuft wie im klassischen eindimensionalen Fall 11.17. Die Funktion Φ des Stammfunktionensatzes 1.7 ist eine Stammfunktion von γ. Jede andere Stammfunktion Γ von γ unterscheidet sich von ihr nur durch eine additive Konstante 1.8. Also gilt

$$\Gamma(b) - \Gamma(a) = \Phi(b) - \Phi(a) = \int_c^b \gamma - \int_c^a \gamma = \int_a^b \gamma.$$

Ist insbesondere γ eine C^1-Kurve, so ist γ Stammfunktion von $\dot\gamma$. Damit folgt die zweite Identität. ⟩⟩⟩⟩⟩

Als erste Konsequenz bemerken wir, dass der Schrankensatz 8.13 auch für C^1-Kurven gilt.

10 **Schrankensatz** *Ist $\gamma \in C^1(I,E)$, so gilt für alle $u, v \in I$ die Ungleichung*

$$\|\gamma(v) - \gamma(u)\|_E \leqslant |v - u| \max_{u \leqslant t \leqslant v} \|\dot\gamma(t)\|_E.$$

Insbesondere ist jede C^1-Kurve γ auf einem kompakten Intervall I lipschitz mit Konstante $L = \max_{t\in I} \|\dot\gamma(t)\|_E < \infty$. $\lhd$

⟨⟨⟨⟨⟨ Ist $\gamma \in C^1(I,E)$, so gilt für beliebige $u < v$ in I aufgrund des Hauptsatzes $_{1.9}$ und der Dreiecksungleichung für Integrale

$$\begin{aligned}\|\gamma(v)-\gamma(u)\|_E = \left\|\int_u^v \dot\gamma\right\|_E &\leqslant \int_u^v \|\dot\gamma(t)\|_E\,\mathrm{d}t\\ &\leqslant \int_u^v \max_{u\leqslant t\leqslant v}\|\dot\gamma(t)\|_E\,\mathrm{d}t\\ &= (v-u)\max_{u\leqslant t\leqslant v}\|\dot\gamma(t)\|_E\,.\end{aligned}$$

Wegen der Stetigkeit von $t \mapsto \|\dot\gamma(t)\|_E$ ist das Maximum endlich. Der allgemeine Fall $u, v \in I$ folgt hieraus, ebenso die Lipschitzstetigkeit von γ. ⟩⟩⟩⟩⟩

Bemerkung Den Schrankensatz für C^1-Funktionen hatten wir mithilfe des Zwischenwertsatzes bewiesen $_{8.2}$. Dieser gilt für Kurven im $\mathbb{R}^m$ mit $m \geqslant 2$ jedoch *nicht mehr* $_{\text{A-1.5}}$. Mithilfe einer Integraldarstellung von $\gamma(b)-\gamma(a)$ gelangen wir aber zu demselben Ergebnis. Ein weiteres Beispiel für diese Art der Argumentation ist die Hadamardsche Ungleichung $_{14.22}$. ⊸

13.3 Rektifizierbare Kurven

Die Länge einer Kurve wird über einen Approximationsprozess erklärt. Die Länge eines *Polygonzugs* ist sinnvollerweise definiert als die Summe der Längen der Polygonabschnitte, gemessen in der Norm des Banachraums. Eine *beliebige* Kurve γ können wir immer durch einbeschriebene Polygonzüge approximieren. Jede Verfeinerung eines solchen Polygonzugs wird aufgrund der Dreiecksungleichung dessen Länge vergrößern oder unverändert lassen, aber keinesfalls verringern. Dies erlaubt es, die Länge von γ als das *Supremum* der Längen aller einbeschriebene Polygonzüge zu definieren. Es ist also nicht erforderlich, den Approximationsprozess näher zu spezifizieren.

Nun die Formalitäten. Sei $I = [a,b]$ ein nichtleeres kompaktes Intervall, sei $\gamma \in C(I,E)$ eine Kurve in E, und $T = (t_0,..,t_n)$ mit $a = t_0 < t_1 < .. < t_n = b$

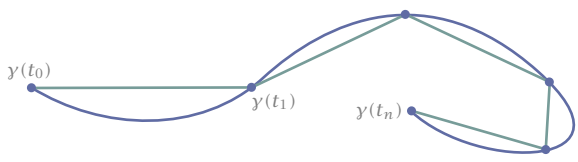
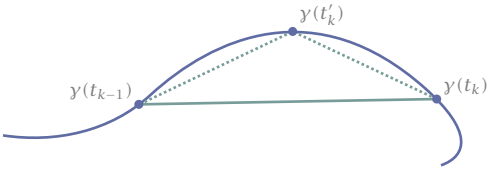


Abb 9
Kurve und einbeschriebener Polygonzug

Abb 10
Verfeinerung eines Polygonzugs



eine Teilung von I. Dann ist

$$\Sigma_T(\gamma) := \sum_{k=1}^{n} \|\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})\|_E$$

die *Länge* des Polygonzuges mit den Eckpunkten $\gamma(t_0), .., \gamma(t_n)$, der der Kurve γ einbeschrieben ist Abb 9.

Definition *Die Länge einer Kurve $\gamma \in C(I,E)$ ist definiert als*

$$L_I(\gamma) := \sup_T \Sigma_T(\gamma),$$

wobei sich das Supremum über alle Teilungen T von I erstreckt. Die Kurve γ heißt rektifizierbar, falls $L_I(\gamma) < \infty$. ⋈

Bemerkung Wir erhalten damit eine Funktion

$$L_I : C(I,E) \to [0,\infty], \quad \gamma \mapsto L_I(\gamma).$$

Diese ist allerdings *nicht stetig* bezüglich der Supremumsnorm auf $C(I,E)$. So konvergieren die sukzessive feiner werdenden Sägezahnkurven γ_n in Abbildung 11 gleichmäßig gegen γ_*, aber für ihre Längen gilt A-1.15

$$L(\gamma_n) = L(\gamma_0) = \sqrt{2} \cdot L(\gamma_*). \quad \multimap$$

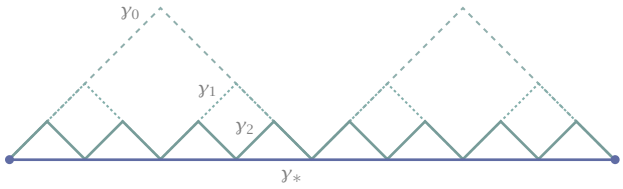
Zu den rektifizierbaren Kurven gehören die lipschitzstetigen Kurven.

11 **Satz** *Ist die Kurve $\gamma \in C(I,E)$ M-lipschitz, so ist sie rektifizierbar, und es gilt*

$$L_I(\gamma) \leqslant M\,|I|\,.$$

Insbesondere ist jede C^1-Kurve rektifizierbar. ⋈

Abb 11
Sägezahnkurven



⟨⟨⟨⟨⟨ Für jede Teilung $T = (t_0, .., t_n)$ von I gilt aufgrund der Lipschitzeigenschaft

$$\begin{aligned}\Sigma_T(\gamma) &= \sum_{k=1}^{n} \|\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})\|_E \\ &\leqslant \sum_{k=1}^{n} M\,|t_k - t_{k-1}| = M \sum_{k=1}^{n} (t_k - t_{k-1}) = M\,|I|\,.\end{aligned}$$

Da die rechte Seite nicht von T abhängt, folgt

$$L_I(\gamma) = \sup_T \Sigma_T(\gamma) \leqslant M\,|I|\,.$$

C^1-Kurven sind rektifizierbar, da sie aufgrund des Schrankensatzes 1.10 lipschitzstetig sind. ⟩⟩⟩⟩⟩

Wie bestimmt man aber die Länge einer Kurve? Um diese Frage zu beantworten, zeigen wir zunächst die *Additivität* der Längenfunktion: Zerlegt man eine Kurve in zwei Abschnitte, so ist die Gesamtlänge der Kurve gleich der Summe der Längen der beiden Kurvenabschnitte – wie es auch sein sollte.

12 **Lemma** *Sei $\gamma \in C(I, E)$ mit $I = [a, b]$. Für jedes $c \in I$ gilt dann*

$$L_{[a,b]}(\gamma) = L_{[a,c]}(\gamma) + L_{[c,b]}(\gamma). \qquad \bowtie$$

⟨⟨⟨⟨⟨ Sei $c \in I$ und $I_1 = [a, c]$ sowie $I_2 = [c, b]$. Zu zeigen ist, dass

$$L_I = L_{I_1} + L_{I_2},$$

wobei wir das Argument γ der Kürze halber weglassen.

Ist $T = (t_0, .., t_n)$ eine beliebige Teilung von I, so seien $T_c = T \cup \{c\}$ und

$$T_k = T_c \cap I_k, \qquad k = 1, 2,$$

die zugehörigen Teilungen von I_1 und I_2. Aufgrund der Dreiecksungleichung und der Definition von L_{I_1} und L_{I_2} ist dann

$$\Sigma_T \leqslant \Sigma_{T_c} = \Sigma_{T_1} + \Sigma_{T_2} \leqslant L_{I_1} + L_{I_2}.$$

Da dies für jede Teilung T von I gilt, folgt auch $L_I = \sup_T \Sigma_T \leqslant L_{I_1} + L_{I_2}$.

Um die umgekehrte Ungleichung zu erhalten, sei zuerst $L_{I_1} + L_{I_2} < \infty$ und $\varepsilon > 0$. Dann existieren Teilungen T_1 von I_1 und T_2 von I_2, so dass

$$\Sigma_{T_k} \geqslant L_{I_k} - \varepsilon/2, \qquad k = 1, 2.$$

Für die Teilung $T = T_1 \cup T_2$ von I folgt hieraus

$$\Sigma_T = \Sigma_{T_1} + \Sigma_{T_2} \geqslant L_{I_1} + L_{I_2} - \varepsilon.$$

Also ist auch $L_I \geqslant L_{I_1} + L_{I_2} - \varepsilon$. Da dies für jedes $\varepsilon > 0$ gilt, folgt $L_I \geqslant L_{I_1} + L_{I_2}$. Dies gilt aber auch, wenn einer der Terme rechts unbeschränkt ist, da dann auch L_I unbeschränkt ist. Zusammen mit $L_I \leqslant L_{I_1} + L_{I_2}$ ergibt dies die Behauptung. ⟩⟩⟩⟩⟩

Der vorangehende Satz gilt für alle stetigen Kurven. Von nun an beschränken wir uns jedoch auf C^1-Kurven.

13 **Lemma** *Sei $\gamma \in C^1(I,E)$ mit $I = [a,b]$. Dann ist die Längenfunktion*

$$\lambda : I \to \mathbb{R}, \quad \lambda(t) = L_{[a,t]}(\gamma)$$

stetig differenzierbar, und es gilt $\lambda'(t) = \|\dot\gamma(t)\|_E$ für alle $t \in I$. ⋊

⟨⟨⟨⟨⟨ Für je zwei Punkte $u < v$ in I gilt [1.9]

$$\|\gamma(v) - \gamma(u)\|_E = \left\| \int_u^v \dot\gamma \right\|_E \leqslant \int_u^v \|\dot\gamma\|_E .$$

Für ein beliebiges abgeschlossenes Intervall $J \subset I$ und eine beliebige Teilung $T = (t_0, .., t_n)$ von J gilt daher auch

$$\Sigma_T(\gamma) = \sum_{k=1}^n \|\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})\|_E \leqslant \sum_{k=1}^n \int_{t_{k-1}}^{t_k} \|\dot\gamma\|_E = \int_J \|\dot\gamma\|_E .$$

Nehmen wir das Supremum über alle Teilungen von J, so folgt

$$L_J(\gamma) \leqslant \int_J \|\dot\gamma(s)\|_E \, \mathrm{d}s.$$

Dies gilt also für jedes abgeschlossene Intervall $J \subset I$.

Sei nun $t \in [a,b)$ und $h > 0$ so klein, dass $t + h \leqslant b$. Dann gilt also

$$\|\gamma(t+h) - \gamma(t)\|_E \leqslant L_{[t,t+h]}(\gamma) \leqslant \int_t^{t+h} \|\dot\gamma\|_E .$$

aufgrund der letzten Abschätzung. Hierbei ist [1.12]

$$L_{[t,t+h]}(\gamma) = L_{[a,t+h]}(\gamma) - L_{[a,t]}(\gamma) = \lambda(t+h) - \lambda(t).$$

Einsetzen und dividieren durch $h > 0$ ergibt die Ungleichung

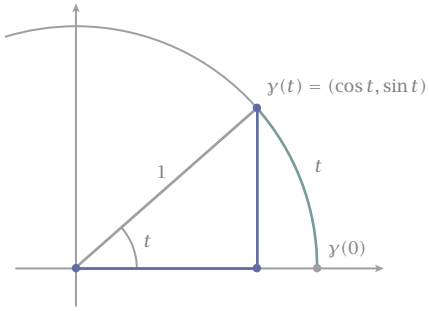
$$\left\| \frac{\gamma(t+h) - \gamma(t)}{h} \right\|_E \leqslant \frac{\lambda(t+h) - \lambda(t)}{h} \leqslant \frac{1}{h} \int_t^{t+h} \|\dot\gamma\|_E .$$

Da γ stetig differenzierbar ist, konvergieren die äußeren Terme für $h \searrow 0$ gegen $\|\dot\gamma(t)\|_E$. Also konvergiert auch der mittlere Term, und es gilt

$$\lim_{h \searrow 0} \frac{\lambda(t+h) - \lambda(t)}{h} = \|\dot\gamma(t)\|_E .$$

Ein analoges Argument für $t \in (a,b]$ und $h < 0$ liefert dasselbe Ergebnis. Also ist λ in jedem Punkt t differenzierbar, und es gilt $\lambda'(t) = \|\dot\gamma(t)\|_E$. ⟩⟩⟩⟩⟩

Abb 12
Bogenmaß des Winkels t



14 Satz *Für $\gamma \in C^1(I,E)$ gilt*

$$L_I(\gamma) = \int_I \|\dot\gamma(t)\|_E \,\mathrm{d}t.$$

Insbesondere ist die euklidische Länge einer Kurve $\gamma \in C^1(I,\mathbb{R}^m)$

$$L_I(\gamma) = \int_I \|\dot\gamma(t)\|_2 \,\mathrm{d}t = \int_I \sqrt{\dot\gamma_1^2(t) + .. + \dot\gamma_m^2(t)}\,\mathrm{d}t. \qquad \bowtie$$

⟪⟪⟪⟪ Sei $I = [a,b]$. Mit den Bezeichnungen des letzten Lemmas und dem Hauptsatz 11.15 ist dann

$$L_I(\gamma) = \lambda(b) = \lambda(b) - \lambda(a) = \int_a^b \lambda'(t)\,\mathrm{d}t = \int_I \|\dot\gamma(t)\|_E \,\mathrm{d}t. \qquad ⟫⟫⟫⟫$$

Die Länge einer C^1-Kurve ist also das Integral über ihre Geschwindigkeit. Ist die Geschwindigkeit konstant, so ist die Länge gerade das Produkt aus Geschwindigkeit und verstrichener Zeit – wie es auch sein sollte.

▻▻ A. Für die Parametrisierung des Einheitskreises $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$ gilt $\|\dot\gamma(t)\|_2 = 1$ und damit

$$L_{[0,t]}(\gamma) = \int_0^t \mathrm{d}s = t.$$

Die Länge des Kreisbogens vom Punkt $\gamma(0) = (1,0)$ bis zum Punkt $\gamma(t)$ ist also t. Dieses Ergebnis hatten wir in Abschnitt 9.3 vorweggenommen.

B. Der Graph Γ einer C^1-Funktion $f\colon I \to \mathbb{R}$ hat die euklidische Länge

$$L_I(\Gamma) = \int_I \sqrt{1 + (f')^2(t)}\,\mathrm{d}t.$$

Dieses Integral ist allerdings meist nicht elementar integrierbar.

C. Für die Neilschen Parabel als Graph der Funktion $x \mapsto x^{2/3}$ über $[0,1]$ erhalten wir die Länge

$$L = \int_0^1 \sqrt{1 + \frac{4}{9x^{2/3}}}\,\mathrm{d}x.$$

Mit der Substitution $x = t^3$ und $\mathrm{d}x = 3t^2\,\mathrm{d}t$ ergibt sich

$$L = \int_0^1 t^2\sqrt{9 + 4/t^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 t\sqrt{9t^2+4}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{27}\,(4+9t^2)^{3/2}\Big|_0^1.$$

Die Neilsche Parabel soll nach dem Kreis die erste Kurve gewesen sein, deren Bogenlänge man berechnen konnte.

D. Dasselbe Ergebnis erhalten wir (natürlich) mit der Parametrisierung $\gamma(t) = (t^3, t^2)$ über $[0,1]$. Es ist

$$\|\dot\gamma(t)\|_2 = \sqrt{4t^2+9t^4},$$

und damit wieder

$$L = \int_0^1 \|\dot\gamma(t)\|_2\,\mathrm{d}t = \int_0^1 t\sqrt{9t^2+4}\,\mathrm{d}t. \quad \blacktriangleleft$$

13.4 Wege

Die Spur einer Kurve γ lässt sich auf unterschiedlichste Weisen parametrisieren. Es stellt sich daher die Frage, ob die Länge einer Kurve von ihrer Parametrisierung abhängt. Oder anders gefragt: Ist es möglich, der *Spur* einer Kurve eine Länge zuzuordnen, ohne auf *irgendeine Parametrisierung* Bezug zu nehmen?

In dieser Allgemeinheit ist die Beantwortung dieser Frage schwierig. Sie ist Gegenstand der geometrischen Maßtheorie und erfordert zum Beispiel den Begriff des Hausdorffmaßes. Wir machen es uns etwas einfacher. Wir gehen davon aus, dass bereits eine Parametrisierung vorliegt, und fragen, welche *Änderungen* der Parametrisierung die Länge unverändert lassen. Dies führt zum Begriff der *Parametertransformation*.

Definition *Eine Parametertransformation ist eine bijektive stetige Abbildung $\varphi\colon \tilde I \to I$ eines Intervalls $\tilde I$ auf ein Intervall I. Sie heißt orientierungstreu, wenn sie den Anfangspunkt von $\tilde I$ auf den Anfangspunkt von I abbildet. Andernfalls heißt sie orientierungsumkehrend.* $\bowtie$

Aufgrund des Satzes über Umkehrfunktionen $_{7.17}$ ist $\varphi^{-1}\colon I \to \tilde I$ ebenfalls bijektiv *und stetig*, also ebenfalls eine Parametertransformation. Außerdem ist die Komposition zweier Parametertransformationen wieder eine solche. Parametertransformationen bilden somit eine *Gruppe*.

Bemerkung Bijektive Abbildungen, wo Abbildung *und* Umkehrabbildung stetig sind, werden *Homöomorphismen* genannt. Eine Parametertransformation ist somit ein *Homöomorphismus zweier Intervalle.* ⊸

15 **Definition** *Zwei Kurven $\gamma \in C(I,E)$ und $\tilde{\gamma} \in C(\tilde{I},E)$ heißen topologisch äquivalent, geschrieben $\tilde{\gamma} \sim \gamma$, wenn es eine orientierungstreue Parametertransformation $\varphi\colon \tilde{I} \to I$ gibt, so dass*

$$\tilde{\gamma} = \gamma \circ \varphi. \qquad \bowtie$$

Topologische Äquivalenz definiert eine *Äquivalenzrelation* im Raum aller Kurven in E. Für Kurven γ, η, χ in E gilt also A-1.10

$$\gamma \sim \gamma, \qquad \gamma \sim \eta \;\Leftrightarrow\; \eta \sim \gamma, \qquad \gamma \sim \eta \;\wedge\; \eta \sim \chi \;\Rightarrow\; \gamma \sim \chi.$$

Definition *Die zu einer Kurve $\gamma \in C(I,E)$ gehörende Klasse*

$$\omega = [\gamma]$$

aller zu γ äquivalenten Kurven wird stetiger Weg oder kurz Weg in E genannt. Jedes Element $\eta \in \omega$ heißt eine Parametrisierung des Weges ω. ⋈

Bemerkung In der Literatur gibt es allerdings auch die umgekehrte Konvention, wo eine *Kurve* als Klasse äquivalenter Wege definiert wird. Was Kurven und Wege betrifft, muss man sich daher immer über die verwendete Terminologie informieren. ⊸

Für zwei verschiedene Parametrisierungen η und χ eines Weges ω gilt offensichtlich:

(i) Hat η Anfangspunkt p, so auch χ. Ditto für Endpunkte.
(ii) Ist η geschlossen, so auch χ.
(iii) Ist η doppelpunktfrei, so auch χ.

Diese Eigenschaften hängen somit nicht von der Parametrisierung ab und können damit auch für Wege definiert werden.

Definition *Ein Weg $\omega = [\gamma]$ heißt einfach, wenn γ einfach ist, geschlossen, wenn γ geschlossen ist, und Jordanweg, wenn γ eine Jordankurve ist. Der Anfangs- und Endpunkt von ω sind der Anfangs- und Endpunkt von γ, und die Spur des Weges ω ist die Spur von γ.* ⋈

▷▶ Der *n-mal* durchlaufene Einheitskreis γ_n in (1) repräsentiert für jedes n einen anderen geschlossenen Weg $\omega_n = [\gamma_n]$. Es gilt also

$$\omega_n = \omega_m \;\Leftrightarrow\; m = n.$$

Für $|n| = 1$ ist er einfach, sonst nicht. ◀◁

Wie verhält es sich mit der Länge äquivalenter Kurven? Diese Frage beantwortet der folgende

16 **Satz** *Topologisch äquivalente Kurven haben dieselbe Länge. Insbesondere sind beide rektifizierbar oder nicht rektifizierbar.* ⋊

⟪⟪⟪⟪⟪ Seien $\gamma \in C(I,E)$, $\tilde\gamma \in C(\tilde I,E)$ und $\varphi\colon I \to \tilde I$ eine Parametertransformation, so dass $\gamma = \tilde\gamma \circ \varphi$. Ist $T = (t_0,..,t_n)$ eine Teilung von I, so ist

$$\tilde T = \varphi \circ T := (\varphi(t_0),..,\varphi(t_n))$$

eine Teilung von $\tilde I$. Wegen $\tilde\gamma(\varphi(t_k)) - \tilde\gamma(\varphi(t_{k-1})) = \gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})$ gilt hierfür

$$\Sigma_{\tilde T}(\tilde\gamma) = \Sigma_{\varphi\circ T}(\tilde\gamma) = \Sigma_T(\tilde\gamma \circ \varphi) = \Sigma_T(\gamma).$$

Gehen wir nun zuerst rechts zum Supremum über alle Teilungen von I, und danach zum Supremum über alle Teilungen von $\tilde I$ über, so folgt

$$L_{\tilde I}(\tilde\gamma) \leqslant L_I(\gamma).$$

Vertauschen wir die Reihenfolge der Supremumsbildung so erhalten wir auch die umgekehrte Ungleichung $L_I(\gamma) \leqslant L_{\tilde I}(\tilde\gamma)$. Das ergibt die Behauptung. ⟫⟫⟫⟫⟫

Ist also *eine* Parametrisierung rektifizierbar, dann auch *jede* dazu äquivalente, und alle Längen sind gleich. Somit ist folgende Definition sinnvoll.

Definition *Ein Weg ω heißt rektifizierbar, wenn er eine rektifizierbare Parametrisierung $\gamma \in C(I,E)$ besitzt. Seine Länge ist dann die Länge einer beliebigen Parametrisierung.* ⋊

Bemerkungen *a.* Für C^1-Kurven und -Parameterwechsel ergibt sich die Invarianz der Länge aus der Substitutionsregel für das Längenintegral A-1.7 und erfordert keinen eigenen Beweis.

b. Jede Spur, die aus mehr als einem Punkt besteht, erlaubt verschiedene Parametrisierungen mit verschiedenen Längen. Diese sind notgedrungen nicht äquivalent und repräsentieren daher verschiedene Wege! ⊸

▹▸ Für den n-mal durchlaufenen Einheitskreis ω_n gilt

$$L(\omega_n) = 2\pi n, \qquad n \in \mathbb{Z}. \quad ◂◃$$

Glatte Wege

Bisher haben wir an die Parametrisierung einer Kurve nur die Forderung der Stetigkeit gestellt. Dies erlaubt, Teile der Spur mehrmals zu durchlaufen. Um dieses – in vielen Fällen unerwünschte – Verhalten auszuschließen, betrachten wir nun *reguläre* Kurven und Wege. — Zuerst die Kurven.

17 **Definition** *Eine C^1-Kurve $\gamma\colon I \to E$ heißt regulär, wenn ihre Ableitung nirgends verschwindet, also überall $\dot\gamma \neq 0$ gilt* ⋊

Um diesen Begriff auch für Wege zu erklären, müssen wie berücksichtigen, dass ein Weg *immer* auch nichtreguläre Parametrisierungen besitzt. Es genügt aber, wenn wenigstens *eine* regulär ist.

Definition *Ein Weg heißt glatt, falls er wenigstens eine reguläre Parametrisierung besitzt.* ⋊

Ein glatter Weg besitzt also *wenigstens eine* Parametrisierung $\gamma \in C^1(I,E)$ mit $\dot\gamma \neq 0$ auf ganz I. Er besitzt daher in jedem Punkt eine Tangente und somit keinerlei Spitzen oder Ecken. Daher auch die Bezeichnung. — Glatte Wege besitzen immer eine besonders schöne und nützliche Parametrisierung.

18 **Satz und Definition** *Jeder glatte Weg ω in E besitzt eine eindeutige reguläre Parametrisierung nach der Bogenlänge $\eta\colon [0,l] \to E$, wobei $l = L(\omega)$. Das heißt, für alle $t \in [0,l]$ gilt*

$$L_{[0,t]}(\eta) = t,$$

oder, was äquivalent ist, $\|\dot\eta(t)\|_E = 1$. ⋊

⟪⟪⟪⟪ Sei $\gamma\colon [a,b] \to E$ eine reguläre Parametrisierung von ω. Dann ist 1.13

$$\lambda\colon [a,b] \to \mathbb{R}, \quad s \mapsto t = \lambda(s) = L_{[a,s]}(\gamma)$$

stetig differenzierbar, und $\lambda'(s) = \|\dot\gamma(s)\|_E > 0$ für alle $s \in [a,b]$. Folglich bildet λ das Intervall $[a,b]$ streng monoton auf das Intervall $[\lambda(a),\lambda(b)] = [0,l]$ ab. Die Umkehrfunktion

$$\varphi\colon [0,l] \to [a,b], \qquad \varphi(t) = \lambda^{-1}(t)$$

ist ebenfalls stetig differenzierbar, und es gilt 7.17

$$\varphi'(t) = \frac{1}{\lambda'(\varphi(t))} = \frac{1}{\|\dot\gamma(\varphi(t))\|_E} > 0, \qquad t \in [0,l].$$

Somit bildet $\eta = \gamma \circ \varphi\colon [0,l] \to E$ eine C^1-Parametrisierung von ω, mit

$$\|\dot\eta(t)\|_E = \|\dot\gamma(\varphi(t))\|_E\,|\varphi'(t)| = 1, \qquad t \in [0,l].$$

Dann aber ist auch

$$L_{[0,t]}(\eta) = \int_0^t \|\dot\eta\|_E = \int_0^t 1 = t.$$

Damit ist die Existenz einer Bogenlängenparametrisierung gezeigt.

Um noch die Eindeutigkeit zu zeigen, sei $\chi\colon [0,l] \to E$ eine weitere solche Parametrisierung. Da η und χ denselben Weg parametrisieren, sind sie topologisch äquivalent, es existiert also eine *stetige* Parametertransformation $\varphi\colon [0,l] \to [0,l]$ mit $\eta = \chi \circ \varphi$. Für $s \in [0,l]$ und $t = \varphi(s)$ gilt dann – vergleiche den Beweis des letzten Lemmas –

$$\begin{aligned} s = L_{[0,s]}(\eta) &= L_{[0,s]}(\chi \circ \varphi) \\ &= L_{[\varphi(0),\varphi(s)]}(\chi) = L_{[0,t]}(\chi) = t. \end{aligned}$$

Also ist φ die Identität und damit $\eta = \chi$. ⟩⟩⟩⟩⟩

Eine nach der Bogenlänge parametrisierte Kurve wird also mit konstanter Geschwindigkeit 1 durchlaufen, und es gilt *Weglänge = Geschwindigkeit × Zeit*. Diese Parametrisierungen sind für viele theoretische Untersuchungen nützlich. Bezüglich dem Standardskalarprodukt gilt dann zum Beispiel in jedem Punkt

$$\dot\gamma(t) \perp \ddot\gamma(t),$$

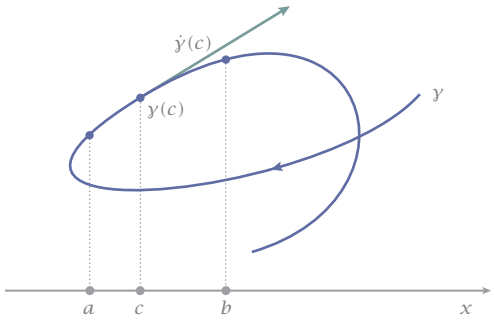
das heißt, der Beschleunigungsvektor steht immer orthogonal zum Geschwindigkeitsvektor A-1.14.

13.5 Ergänzungen

Spur als Graph

Der Graph einer C^r-Funktion ist eine C^r-Kurve. Die Umkehrung gilt im Allgemeinen nicht, zum Beispiel wenn die Kurve eine Spitze aufweist wie im Fall der Neilschen Parabel 1.4. Für reguläre ebene Kurven gilt jedoch eine *lokale* Umkehrung. Diese Tatsache werden wir später als *Satz über implizite Funktionen* auf höhere Dimensionen verallgemeinern.

Abb 13
Spur als lokaler Graph



19 **Satz** *Sei $\gamma\colon I \to \mathbb{R}^2$ eine reguläre C^r-Kurve. Dann existiert um jeden Punkt in I ein Intervall $J \subset I$, so dass die Spur von $\gamma|_J$ als Graph einer C^r-Funktion dargestellt werden kann.* ⋊

⟪⟪⟪⟪ Sei $\gamma = (x, y)$ die Koordinatendarstellung der Kurve und $c \in I$ beliebig. Wegen der Regularität von γ ist

$$\dot\gamma(c) = (\dot x(c), \dot y(c)) \neq 0.$$

Angenommen, es ist $\dot x(c) \neq 0$. Aus Stetigkeitsgründen hat dann $\dot x$ auf einem hinreichend kleinen abgeschlossenen Intervall $I_c \subset I$ um c festes Vorzeichen. Somit ist die Koordinate x dort eine streng monotone Funktion von t, und

$$x\colon\ I_c \to [a,b], \quad t \mapsto x(t)$$

definiert eine Parametertransformation auf ein gewisses Intervall $[a,b]$. Für ihre Umkehrabbildung $\varphi\colon\ [a,b] \to I_c$ gilt dann $x \circ \varphi = id$. Also ist auch

$$\tilde\gamma = \gamma \circ \varphi\colon\ [a,b] \to \mathbb{R}^2, \quad \tilde\gamma(t) = (t, \gamma \circ \varphi(t)).$$

Das bedeutet aber, dass die Spur von γ lokal um c der Graph der Funktion $f = \gamma \circ \varphi$ auf $[a,b]$ ist. Ist γ von der Klasse C^r, so sind es auch γ und φ und damit auch f.

Ist dagegen $\dot x(c) = 0$, so muss $\dot y(c) \neq 0$ gelten. Wir müssen dann nur die Rollen von x und y vertauschen, und erhalten lokal die Spur von γ als Graphen einer Funktion auf der y-Achse. ⟫⟫⟫⟫

Bemerkung Entsprechendes gilt für Kurven im $\mathbb{R}^m$ mit $m \geqslant 2$. ⊸

▪ Stückweise glatte Kurven und Wege

Viele Kurven sind glatt mit Ausnahme endlich vieler Ecken. Dies ist in den meisten Fällen jedoch unerheblich.

Definition *Sei $1 \leqslant r \leqslant \infty$. Eine Kurve $\gamma \in C(I,E)$ heißt stückweise C^r, wenn es eine Teilung $T = (t_0..,t_n)$ von I in Intervalle $I_k = [t_{k-1}, t_k]$ gibt, so dass*

$$\gamma|_{I_k} \in C^r(I_k, E), \qquad 1 \leqslant k \leqslant n.$$

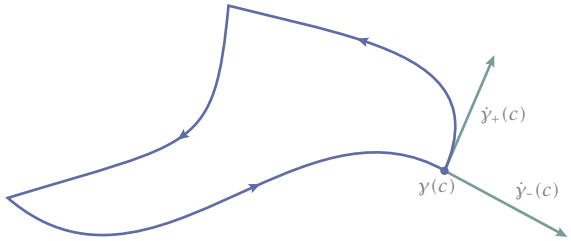
Die Klasse dieser Kurven wird mit $D^r(I,E)$ bezeichnet. ⋊

Eine D^1-Kurve besitzt in den inneren Teilungspunkten $t_1, .., t_{n-1}$ links- und rechtsseitige Ableitungen, also Geschwindigkeitsvektoren

$$\dot\gamma_-(t_k) = \lim_{t \nearrow t_k} \dot\gamma(t), \qquad \dot\gamma_+(t_k) = \lim_{t \searrow t_k} \dot\gamma(t).$$

Abb 14

Stückweise glatte geschlossene Kurve



Im Allgemeinen stimmen diese nicht überein, und die Kurve bildet eine Ecke oder Spitze – sonst wäre der Teilungspunkt auch nicht nötig. Außerdem existieren die einseitigen Ableitungen an den Intervallenden von I.

▸▸ *Beispiele* A. Jede C^r-Kurve ist auch eine D^r-Kurve.
B. Die Neilsche Parabel 1.4 ist D^∞.
C. Der Rand jedes Polygons besitzt eine D^∞-Parametrisierung.
D. Die Funktion

$$f\colon [0,1] \to \mathbb{R}, \quad f(t) = \begin{cases} |t| \sin(1/t), & t > 0, \\ 0, & t = 0, \end{cases}$$

ist stetig, ihr Graph also eine Kurve. Diese ist aber nicht D^1 A-1.17. ◂◂

Eine stückweise C^1-Kurve ist lipschitzstetig und damit rektifizierbar. Auch die Längenformel gilt unverändert.

20 **Satz** *Jede D^1-Kurve $\gamma\colon I \to E$ ist rektifizierbar, und es gilt*

$$L_I(\gamma) = \int_I \|\dot\gamma(t)\|_E \, \mathrm{d}t. \qquad \bowtie$$

⟪⟪⟪⟪ Ist $T = (t_0, .., t_n)$ eine passende Teilung von I und $I_k = [t_{k-1}, t_k]$ ein Teilungsintervall, so ist aufgrund der Additivität der Längenfunktion 1.12 und der Längenformel 1.14

$$L_I(\gamma) = \sum_{k=1}^n L_{I_k}(\gamma) = \sum_{k=1}^n \int_{I_k} \|\dot\gamma(t)\|_E \, \mathrm{d}t = \int_I \|\dot\gamma(t)\|_E \, \mathrm{d}t. \qquad ⟫⟫⟫⟫$$

Eine D^r-Kurve γ heißt *stückweise regulär*, wenn alle ihre C^r-Abschnitte regulär sind. Entsprechend heißt ein Weg ω *stückweise C^r* respektive *stückweise regulär*, wenn er wenigstens eine Parametrisierung γ mit entsprechenden Eigenschaften besitzt. Ein stückweise regulärer Weg besitzt eine stückweise reguläre Parametrisierung nach der Bogenlänge, $\eta\colon [0,l] \to E$, so dass $\|\dot\eta(t)\|_E = 1$ mit Ausnahme endlich vieler Punkte.