15

Mehrdimensionale Analysis

15.1 Die Taylorsche Formel

Die Formel von Taylor in höheren Dimensionen ist eine direkte Folge der klassischen Formel in einer Dimension. Ist die Strecke $[a, a+h]$ im Definitionsbereich von $f\colon V \hookrightarrow W$ enthalten, so können wir bei entsprechender Diferenzierbarkeit von f die Funktion

$$\varphi\colon \ \mathbb{R} \hookrightarrow W, \quad t \mapsto f(a+th)$$

um 0 entwickeln und bei $t = 1$ auswerten, um $f(a+h)$ darzustellen. Dabei treten die höheren Richtungsableitungen

$$\partial_h^k f(a) \coloneqq \partial_t^k f(a+th)\Big|_{t=0}, \qquad k \geqslant 1,$$

auf.

1 **Satz von Taylor in höheren Dimensionen** *Sei $f\colon V \hookrightarrow W$ eine C^{r+1}-Abbildung. Gehört $[a, a+h]$ zum Definitionsbereich von f, so gilt*

$$f(a+h) = T_a^r f(h) + R_a^r f(h)$$

mit dem r-ten Taylorpolynom an der Stelle a,

$$T_a^r f(h) \coloneqq \sum_{k=0}^{r} \frac{1}{k!} \partial_h^k f(a),$$

und dem zugehörigen Restglied

$$R_a^r f(h) = \frac{1}{r!} \int_0^1 (1-t)^r \partial_h^{r+1} f(a+th)\,\mathrm{d}t. \qquad \rtimes$$

⟨⟨⟨⟨⟨ Nach Voraussetzung ist $\varphi\colon t \mapsto f(a+th)$ für $0 \leqslant t \leqslant 1$ wohldefiniert. Aufgrund der Kettenregel 14.14 ist

$$\varphi'(t) = \partial_h f(a+th) = Df(a+th)h.$$

Mit Induktion folgt, dass

$$\varphi^{(k)}(t) = \partial_h^k f(a+th)$$

durch die totale Ableitung von f der Ordnung k dargestellt wird. Somit ist φ auf $[0,1]$ von der Klasse C^{r+1}, und die klassische Taylorformel mit Integralrest 8.23 ergibt

$$\varphi(1) = \sum_{k=0}^{r} \frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!} + \frac{1}{r!}\int_0^1 (1-t)^r \varphi^{(r+1)}(t)\,\mathrm{d}t.$$

Ersetzen wir φ durch die entsprechenden Ausdrücke in f, so erhalten wir die Behauptung. ⟩⟩⟩⟩⟩

Bemerkung Diese Formulierung des Satzes von Taylor ist ***koordinatenunabhängig***, denn sie benötigt nur die Richtungsableitung ∂_h. Für $n = 1$ ist

$$\partial_h^k f(a) = f^{(k)}(a)h^k.$$

Wir erhalten damit wieder die klassische Taylorformel 8.23. ⊸

▪ Multiindex-Notation

Um die Richtungsableitungen $\partial_h^k f$ im Standardfall durch die partiellen Ableitungen von f bequem darzustellen, hat sich die *Multiindex-Notation* bewährt. Ein *Multiindex* ist ein Tupel mit ganzzahligen, nichtnegativen Komponenten,

$$\alpha = (\alpha_1, .., \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n.$$

Potenzen von $x = (x_1, .., x_n) \in \mathbb{R}^n$ mit $\alpha = (\alpha_1, .., \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n$ sind definiert als

$$x^\alpha \coloneqq x_1^{\alpha_1} \cdot .. \cdot x_n^{\alpha_n} = \prod_{i=1}^{n} x_i^{\alpha_i},$$

wobei vereinbarungsgemäß $x_i^0 = 1$. Entsprechend erklärt man

$$\partial^\alpha \coloneqq \partial_1^{\alpha_1} \cdot .. \cdot \partial_n^{\alpha_n} = \prod_{i=1}^{n} \partial_i^{\alpha_i},$$

wobei vereinbarungsgemäß $\partial_i^0 = I$ den Identitätsoperator ergibt. Es ist also

$$\partial^\alpha f = \partial_1^{\alpha_1} \cdot .. \cdot \partial_n^{\alpha_n} f = \frac{\partial^{\alpha_1 + .. + \alpha_n}}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdot .. \cdot \partial x_n^{\alpha_n}} f.$$

Das heißt, es wird α_1-mal nach x_1, α_2-mal nach x_2, .., α_n-mal nach x_n differenziert. Ist $\alpha_i = 0$, so wird *nicht* nach x_i differenziert. Für hinreichend oft differenzierbares f kommt es wegen des Lemmas von Schwarz 14.22 auf die *Reihenfolge* der partiellen Ableitungen nicht an, nur auf die jeweilige *Anzahl*. Genau diese Informationen beinhaltet der Multiindex.

Schließlich setzt man noch

$$\alpha! \coloneqq \alpha_1! \cdot .. \cdot \alpha_n!, \qquad |\alpha| \coloneqq \alpha_1 + .. + \alpha_n,$$

und nennt $|\alpha|$ die *Länge* von α. Da alle Komponenten von α nichtnegativ sind, sind Beträge nicht nötig.

▷ A. Für $f \in C^4(\mathbb{R}^3)$ und $\alpha = (3,1,0)$ sowie $\beta = (1,0,2)$ ist

$$\frac{1}{\alpha!}\partial^\alpha f = \frac{1}{6} f_{xxxy}, \qquad \frac{1}{\beta!}\partial^\beta f = \frac{1}{2} f_{xzz}.$$

B. Im Standardfall ist

$$\partial_h = \sum_{k=1}^{n} h_k \partial_k, \qquad \partial_h^2 = \sum_{k,l=1}^{n} h_k h_l \partial_k \partial_l. \quad ◁$$

Wir benötigen noch folgende Verallgemeinerung der binomischen Formel.

2 **Lemma** *In einem kommutativen Ring gilt*

$$\begin{aligned}(\lambda_1 + .. + \lambda_n)^m &= \sum_{i_1,..,i_m=1}^{n} \lambda_{i_1} \cdot\cdot \lambda_{i_m} \\ &= \sum_{|\alpha|=m} \frac{m!}{\alpha_1! \cdot\cdot \alpha_n!} \lambda_1^{\alpha_1} \cdot\cdot \lambda_n^{\alpha_n} = \sum_{|\alpha|=m} \frac{m!}{\alpha!} \lambda^\alpha\end{aligned}$$

für $m \geqslant 1$, wobei $\lambda = (\lambda_1, .., \lambda_n)$. ⋊

⟪⟪ Die erste Identität drückt aus, dass wir $(\lambda_1 + .. + \lambda_n)^m$ erhalten, indem wir sämtliche Produkte aus m Faktoren aus den Elementen $\lambda_1, .., \lambda_n$ bilden und diese aufsummieren. Dies beweist man durch Induktion.

Die zweite Identität folgt hieraus durch kombinatorische Überlegungen. Die Anzahl aller im ersten Schritt gebildeten Produkte, die wegen der Kommutativität der Multiplikation gleich dem Produkt $\lambda_1^{\alpha_1} \cdot .. \cdot \lambda_n^{\alpha_n}$ sind, ist

$$\frac{m!}{\alpha_1! \cdot .. \cdot \alpha_n!}.$$

Denn einerseits müssen wir alle Permutation der m Faktoren zählen – deren Anzahl ist $m!$. Andererseits dürfen wir nicht die Permutationen der *identischen* Faktoren untereinander zählen – deren Anzahl ist $\alpha_1! \cdot .. \cdot \alpha_n!$. Dies ergibt die zweite Identität.

Die dritte Identität verwendet lediglich die Multiindex-Notation. ⟫⟫

3 **Korollar** *Ist das Lemma von Schwarz anwendbar, so gilt*

$$\frac{1}{m!}\partial_h^m = \sum_{|\alpha|=m} \frac{1}{\alpha!} h^\alpha \partial^\alpha, \qquad m \geqslant 0. \qquad \rtimes$$

⟨⟨⟨⟨⟨ Für $m = 0$ ergeben beide Seiten vereinbarungsgemäß die Identität, und es nichts zu zeigen. Für $m = 1$ und $h = (h_1, .., h_n)$ ist

$$\partial_h = h_1\partial_1 + .. + h_n\partial_n = \sum_{|\alpha|=1} h^\alpha \partial^\alpha.$$

Die Behauptung gilt hier also ebenfalls. Und können wir sämtliche partiellen Ableitungen vertauschen, so gilt aufgrund des letzten Lemmas für $m \geqslant 2$

$$\frac{1}{m!}\partial_h^m = \frac{1}{m!}(h_1\partial_1 + .. + h_n\partial_n)^m = \sum_{|\alpha|=m} \frac{1}{\alpha!} h^\alpha \partial^\alpha. \qquad ⟩⟩⟩⟩⟩$$

Die Taylorsche Formel können wir nun wie folgt schreiben.

4 **Satz von Taylor in Multiindex-Notation** *Sei $f : \mathbb{R}^n \hookrightarrow W$ eine C^{r+1}-Abbildung. Gehört $[a, a+h]$ zum Definitionsbereich von f, so gilt*

$$f(a+h) = \sum_{|\alpha|\leqslant r} \frac{1}{\alpha!} \partial^\alpha f(a) h^\alpha + R_a^r f(h)$$

mit

$$R_a^r f(h) = (r+1) \sum_{|\alpha|=r+1} \frac{h^\alpha}{\alpha!} \int_0^1 (1-t)^r \partial^\alpha f(a+th)\,\mathrm{d}t.$$

Im Fall einer skalaren Funktion existiert außerdem ein $\xi \in [a, a+h]$, so dass

$$R_a^r f(h) = \sum_{|\alpha|=r+1} \frac{1}{\alpha!} \partial^\alpha f(\xi) h^\alpha. \qquad \rtimes$$

⟨⟨⟨⟨⟨ Mit dem Satz von Taylor 1 und der binomischen Formel 2 ist

$$\begin{aligned} R_a^r f(h) &= \frac{1}{r!} \int_0^1 (1-t)^r \sum_{|\alpha|=r+1} \frac{(r+1)!}{\alpha!} h^\alpha \partial^\alpha f(a+th)\,\mathrm{d}t \\ &= (r+1) \int_0^1 (1-t)^r \sum_{|\alpha|=r+1} \frac{h^\alpha}{\alpha!} \partial^\alpha f(a+th)\,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Ziehen wir alle t-unabhängigen Terme vor das Integral, so erhalten wir die erste Restgliedformel. Für eine *skalare* Funktion besteht der letzte Integrand aus dem Produkt einer Linearkombination stetiger skalarer Ableitungen von f mit der auf $[0,1]$ nichtnegativen Funktion $(1-t)^r$. Hierauf können wir den Mittelwertsatz der Integralrechnung 11.7 anwenden und erhalten

$$R_a^r f(h) = \sum_{|\alpha|=r+1} \frac{h^\alpha}{\alpha!} \partial^\alpha f(a+\theta h) \cdot (r+1) \int_0^1 (1-t)^r \, \mathrm{d}t$$
$$= \sum_{|\alpha|=r+1} \frac{1}{\alpha!} \partial^\alpha f(\xi) h^\alpha$$

mit einem $\theta \in [0,1]$ und $\xi = a + \theta h \in [a, a+h]$, denn

$$\int_0^1 (1-t)^r \, \mathrm{d}t = \frac{1}{r+1}$$

Dies ist die zweite Restgliedformel. ⟫⟫⟫

Wir benötigen die Taylorformel vor allem bis zum quadratischen Restglied. Hierbei spielt die *Hessematrix* eine zentrale Rolle.

Definition *Für eine C^2-Funktion $f\colon \mathbb{R}^n \hookrightarrow \mathbb{R}$ heißt*

$$Hf(a) \coloneqq (f_{x_k x_l}(a))_{1 \leqslant k,l \leqslant n}$$

die Hessematrix oder Hessische von f an der Stelle a. ⋊

Wegen des Satzes von Schwarz ist die Hessische einer C^2-Funktion immer eine *symmetrische* Matrix.

⊳ Für eine quadratische Form

$$f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{2} \langle Ax, x \rangle = \frac{1}{2} \sum_{k,l=1}^n a_{kl} x_k x_l$$

mit einer symmetrischen Matrix $A = (a_{kl})$ und dem Standardskalarprodukt ist

$$f_{x_k x_l} = a_{kl}, \qquad 1 \leqslant k, l \leqslant n.$$

Also ist

$$Hf = A.$$ ◅

5 **Quadratische Taylorformel** *Sei $f\colon \mathbb{R}^n \hookrightarrow \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar. Gehört $[a, a+h]$ zum Definitionsbereich von f, so gilt*

$$f(a+h) = f(a) + \langle \nabla f(a), h \rangle + \frac{1}{2} \langle Hf(\xi)h, h \rangle \tag{1}$$

mit einem $\xi \in [a, a+h]$. ⋊

⟪⟪⟪ Dies folgt aus der Taylorformel in Multiindex-Notation $_4$ mit $r = 1$. Der Multiindex der Länge 0 ergibt den Term $f(a)$, die Multiindizes der Länge 1 den linearen Term

$$\sum_{k=1}^n f_{x_k}(a) h_k = \langle \nabla f(a), h \rangle.$$

Das Restglied für skalare Funktionen $_4$ ergibt den Term

$$\frac{1}{2}\sum_{|\alpha|=2}\partial^\alpha f(\xi)h^\alpha = \frac{1}{2}\sum_{k,l=1}^{n} f_{x_k x_l}(\xi)h_k h_l = \frac{1}{2}\langle Hf(\xi)h,h\rangle$$

wobei die erste Identität auf der binomischen Formel $_2$ beruht. ⟫⟫

Bemerkung Dieses Ergebnis ergibt sich auch direkt aus dem entsprechenden eindimensionalen Satz. Für $\varphi(t) = f(a+th)$ gilt

$$\varphi(1) = \varphi(0) + \varphi'(0) + \int_0^1 (1-t)\varphi''(t)\,\mathrm{d}t.$$

Mit dem Mittelwertsatz der Integralrechnung $_{11.7}$ und

$$\varphi''(\theta) = \langle Hf(\xi)h,h\rangle$$

ergibt dies (1). ⊸

▪ Polynome und Taylorreihen

Die Taylorformel approximiert Funktionen lokal durch Polynome in mehreren Variablen. Hier erklären wir noch die zugehörigen Begriffe.

Definition *Ist α ein Multiindex, so heißt die Funktion*

$$\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto x^\alpha \coloneqq x_1^{\alpha_1} \cdot\cdot x_n^{\alpha_n}$$

ein Monom in n Variablen vom Grad $|\alpha|$. Eine Linearkombination

$$\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \sum_{|\alpha|\leqslant N} a_\alpha x^\alpha$$

mit reellen Koeffizienten a_α heißt reelles Polynom in n Variablen. Sein Grad ist $\max\{|\alpha| : a_\alpha \neq 0\}$. ⋊

▷ A. Das Nullpolynom hat Grad $-\infty$, da nach Vereinbarung $\max\varnothing = -\infty$.
B. Es ist xy^2z^3 ein Monom vom Grad 6, und $1 + x + xy^2 + xy^2z^3$ ein Polynom vom Grad 6. ◁

Jede partielle Ableitung verringert den Grad eines Polynoms um 1, wenn es nicht das Nullpolynom ist. Nach endlich vielen Ableitungen erhält man somit das Nullpolynom. Hiervon gilt auch die Umkehrung.

6 **Satz** *Ist $f\colon V \hookrightarrow \mathbb{R}$ von der Klasse C^{r+1} und*

$$\partial^\alpha f \equiv 0, \qquad |\alpha| = r+1,$$

so ist f lokal ein Polynom vom Grad $\leqslant r$. ⋊

15.6

⟨⟨⟨⟨⟨ Entwickeln wir f in einem beliebigen Punkt a seines Definitionsbereichs, so gilt in einer Umgebung von a aufgrund des Satzes von Taylor 4

$$f(x) = \sum_{|\alpha| \leqslant r} \frac{1}{\alpha!} \partial^\alpha f(a)(x-a)^\alpha + R_a^{r+1} f(x).$$

Nach Voraussetzung verschwindet das Restglied, und es bleibt ein Polynom vom Grad $\leqslant r$. ⟩⟩⟩⟩⟩

Bemerkung Der Satz macht nur eine *lokale* Aussage, da eine solche Funktion auf nicht zusammenhängenden Komponenten seines Definitionsbereichs durch verschiedene Polynome definiert sein kann. ⊸

Eine C^∞-Funktion $f : V \hookrightarrow \mathbb{R}$ können wir um einen Punkt a seines Definitionsbereiches *formal* in seine *Taylorreihe*

$$T_a f(x) := \sum_{r \geqslant 0} \sum_{|\alpha| = r} \frac{1}{\alpha!} \partial^\alpha f(a)(x-a)^\alpha$$

entwickeln. Bereits im eindimensionalen Fall braucht diese jedoch in keinem Punkt $x \neq a$ zu konvergieren. Und selbst wenn sie konvergiert, muss sie nicht die Funktion f darstellen – siehe das Gegenbeispiel von Cauchy 10.20. Ist dies aber der Fall, so nennt man die Funktion f *reell analytisch* in n Variablen.

Es gilt zum Beispiel folgender Satz in einer wie in mehreren Dimensionen.

7 **Satz** *Sei $f : V \hookrightarrow \mathbb{R}$ von der Klasse C^∞. Existiert zu einer Kugel $B_r(a)$ im Definitionsbereich von f ein $M > 0$, so dass*

$$\frac{1}{\alpha!} \sup_{x \in B_r(a)} |\partial^\alpha f(x)| \leqslant \frac{M}{r^{|\alpha|}}, \qquad \alpha \in \mathbb{N}_0^n,$$

so konvergiert die Taylorreihe $T_a f$ auf jeder abgeschlossenen Kugel in $B_r(a)$ absolut und gleichmäßig gegen f. ⋊

Da wir den Satz nicht benötigen, ist der Beweis als Übung überlassen A-1. Seine Voraussetzung ist zum Beispiel erfüllt für die in Kapitel 9 betrachteten elementaren Funktionen.

15.2 Lokale Extrema

Wir betrachten jetzt skalare Funktionen $f : V \hookrightarrow \mathbb{R}$. Den Graphen einer solchen Funktion kann man sich als Höhenprofil über ihrem Definitionsbereich vorstellen – zumindest wenn $\dim V = 2$. Ist f differenzierbar, so besitzt dieses Profil in jedem Punkt eine *Tangentialebene*.

Definition *Ist $f : V \hookrightarrow \mathbb{R}$ im Punkt a differenzierbar, so heißt der Graph der affinen Funktion*

$$T : V \to \mathbb{R}, \quad z = f(a) + Df(a)(x-a)$$

die Tangentialebene an den Graphen von f im Punkt $(a, f(a))$. ⋊

▷ A. Die Tangentialebene des linearen Funktionals $x \mapsto \langle l, x \rangle$ im Punkt a gegeben durch

$$z = \langle l, a \rangle + \langle l, x-a \rangle = \langle l, x \rangle,$$

ist also identisch mit dem Graphen der Funktion.

B. Die quadratische Form $x \mapsto \langle Ax, x \rangle /2$ hat in x_0 die Tangentialebene

$$z = \frac{1}{2} \langle Ax_0, x_0 \rangle + \langle Ax_0, x - x_0 \rangle = \langle Ax_0, x - x_0/2 \rangle. \quad ◁$$

Im Standardfall ist die Tangentialebene eine Hyperebene im Raum $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$, die sich durch den Gradienten wie folgt beschreiben lässt.

8 **Satz** *Ist $f : \mathbb{R}^n \hookrightarrow \mathbb{R}$ im Punkt a differenzierbar, so ist*

$$N(a) \coloneqq (-\nabla f(a), 1) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$$

der Normalenvektor der Tangentialebene an den Graphen von f über a. ⋊

⟨⟨⟨⟨⟨ Ausgedrückt mithilfe des Gradienten lautet die Gleichung der Tangentialebene $z = f(a) + \langle \nabla f(a), x - a \rangle$, oder

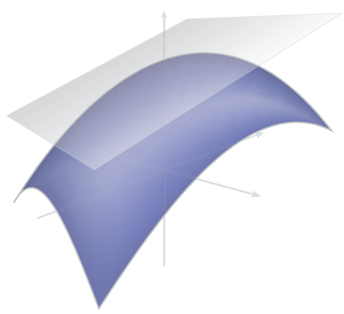
$$\langle -\nabla f(a), x - a \rangle + 1 \cdot (z - f(a)) = 0.$$

Dies entspricht der *Normalengleichung* dieser Ebene im Raum $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ mit Koordinaten (x, z) und dem Standardskalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle_{n+1}$ und dem Normalenvektor

$$N(a) = (-\nabla f(a), 1). \quad ⟩⟩⟩⟩⟩$$

Abb 1

Eine Tangentialebene



Extremalstellen

Für skalare Funktionen ist es sinnvoll, nach der Existenz lokaler Extrema zu fragen. Diese sind genau wie für Funktionen einer Variablen erklärt.

Definition *Eine Funktion $f: V \hookrightarrow \mathbb{R}$ besitzt im Punkt a ein lokales Minimum, wenn es eine Umgebung U von a im Definitionsbereich von f gibt, so dass*

$$f(a) \leqslant f(x), \qquad x \in U.$$

Das lokale Minimum heißt strikt, wenn sogar

$$f(a) < f(x), \qquad x \in U \setminus \{a\}.$$

Der Punkt a selbst heißt eine Minimalstelle von f. Entsprechend sind lokales Maximum und Maximalstelle erklärt. ⋊

Minima und Maxima werden gemeinsam als *Extrema* bezeichnet, und Minimal- und Maximalstellen gemeinsam als *Extremalstellen*. Für diese gilt der Satz von Fermat $_{8.9}$ entsprechend auch hier.

9 **Satz von Fermat** *Besitzt die Funktion $f: V \hookrightarrow \mathbb{R}$ im Punkt a eine Extremalstelle und ist sie dort total differenzierbar, so ist $Df(a) = 0$.* ⋊

⟨⟨⟨⟨ Der Definitionsbereich von $f: V \hookrightarrow \mathbb{R}$ ist vereinbarungsgemäß offen. Somit ist f auf einer offenen Umgebung von a erklärt. Für jeden Vektor $v \neq 0$ ist dann $\varphi: t \mapsto f(a + tv)$ auf einem offenen Intervall um 0 erklärt und besitzt in $t = 0$ ein lokales Extremum. Da φ dort auch differenzierbar ist, gilt nach dem klassischen Satz von Fermat $_{8.9}$ $\dot{\varphi}(0) = 0$, also

$$0 = f(a + tv)^{\cdot}\Big|_{t=0} = Df(a)v.$$

Da dies für jeden Vektor v gilt, ist $Df(a) = 0$. ⟩⟩⟩⟩

▷ Für ein beliebiges Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ besitzt die Funktion

$$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{2}\langle x, x \rangle$$

aufgrund der Definitheit des Skalarprodukts bei $x = 0$ ein striktes Minimum. Und in der Tat verschwindet genau dort auch $Df(x) = \langle x, \cdot \rangle$. ◁

Definition *Ist $f: V \hookrightarrow \mathbb{R}$ im Punkt c total differenzierbar und $Df(c) = 0$, so heißt c ein kritischer oder stationärer Punkt von f.* ⋊

Der Satz von Fermat besagt also auch für skalare Funktionen in höheren Dimensionen, dass eine Extremalstelle im Innern *notwendig* ein kritischer Punkt ist, wenn die Funktion dort total differenzierbar ist. Die Tangentialebene an dieser

Stelle ist dann ›horizontal‹. Dies gilt allerdings nicht mehr, wenn die Extremstelle am Rand des Definitionsbereichs liegt. Ebensowenig ist ein kritischer Punkt notwendigerweise eine Extremstelle.

▪ Definite Matrizen

In der eindimensionalen Theorie haben wir *hinreichende* Bedingungen für die Existenz eines lokalen Extremums mithilfe der zweiten Ableitung formuliert 8.16. In höheren Dimensionen wird die zweite Ableitung aber nicht mehr durch eine reelle Zahl, sondern im Standardfall – den wir von nun an betrachten – durch die Hessematrix dargestellt. Es geht also darum, geeignete hinreichende Bedingungen bezüglich solcher Operatoren zu formulieren.

Sei $S(n)$ der Raum aller reellen symmetrischen $n \times n$-Matrizen

$$A = (A_{kl})_{1 \leqslant k,l \leqslant n}, \qquad A^\top = A.$$

Dies ist ein reeller Vektorraum der Dimension $n(n+1)/2$.

Definition *Eine Matrix $A \in S(n)$ heißt*

(i) *positiv definit, geschrieben $A > 0$, falls*

$$\langle Av, v \rangle > 0, \qquad 0 \neq v \in \mathbb{R}^n,$$

(ii) *positiv semidefinit, geschrieben $A \geqslant 0$, falls*

$$\langle Av, v \rangle \geqslant 0, \qquad v \in \mathbb{R}^n,$$

(iii) *negativ definit, geschrieben $A < 0$, falls $-A > 0$,*

(iv) *negativ semidefinit, geschrieben $A \leqslant 0$, falls $-A \geqslant 0$,*

(v) *indefinit, geschrieben $A \gtrless 0$, im verbleibenden Fall.* ⋊

Eine Matrix $A \in S(n)$ ist also indefinit, wenn $\langle Av, v \rangle$ das Vorzeichen wechselt. Alle diese Fälle treten bereits bei Diagonalmatrizen auf. — Im definiten Fall gilt noch eine stärkere Aussage.

10 **Lemma** *Für eine Matrix $A \in S(n)$ sind äquivalent:*

(i) *Es ist $A > 0$.*

(ii) *Es gibt ein $\mu > 0$, so dass $\langle Av, v \rangle \geqslant \mu \, |v|^2$ für alle $v \in \mathbb{R}^n$.*

(iii) *Es gibt ein $\mu > 0$, so dass $A - \mu E_n \geqslant 0$.* ⋊

⟨⟨⟨⟨ (i) ⇒ (ii) Die quadratische Form

$$Q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad Q(v) = \langle Av, v \rangle$$

ist stetig und nach Voraussetzung auf der Einheitssphäre $\mathbb{S}^{n-1}$ positiv. Wegen der Kompaktheit von $\mathbb{S}^{n-1}$ nimmt sie ihr Minimum an, so dass

$$\mu \coloneqq \inf_{u \in \mathbb{S}^{n-1}} Q(u) > 0.$$

Für ein beliebiges $0 \neq v \in \mathbb{R}^n$ gilt dann mit $u = v/|v|$ die Abschätzung

$$\langle Av, v \rangle = |v|^2 Q(u) \geqslant \mu |v|^2 .$$

Dies bleibt auch für $v = 0$ gültig, womit (ii) gezeigt ist.

(ii)⇒(iii) Aus der Voraussetzung folgt

$$\langle (A - \mu E_n)v, v \rangle = \langle Av, v \rangle - \mu |v|^2 \geqslant 0, \qquad v \in \mathbb{R}^n.$$

Somit ist $A - \mu E_n \geqslant 0$.

(iii)⇒(i) Mit der letzten Ungleichung gilt

$$\langle Av, v \rangle \geqslant \mu |v|^2 > 0, \qquad v \neq 0,$$

also $A > 0$. ⟫⟫⟫

Die Definitheitseigenschaften einer symmetrischen Matrix lassen sich direkt aus ihrem Spektrum ablesen, das ja reell ist.

11 **Lemma** *Sind $\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant .. \leqslant \lambda_n$ die Eigenwerte von $A \in S(n)$, so gilt:*

(i) $A > 0 \;\Leftrightarrow\; \lambda_1 > 0$,
(ii) $A \geqslant 0 \;\Leftrightarrow\; \lambda_1 \geqslant 0$,
(iii) $A < 0 \;\Leftrightarrow\; \lambda_n < 0$,
(iv) $A \leqslant 0 \;\Leftrightarrow\; \lambda_n \leqslant 0$,
(v) $A \gtrless 0 \;\Leftrightarrow\; \lambda_1 \lambda_n < 0$. ⋊

⟪⟪⟪ Eine symmetrische Matrix A besitzt ein Orthonormalsystem von Eigenvektoren $w_1, .., w_n$ zu den Eigenwerten $\lambda_1, .., \lambda_n$. Es ist also

$$Aw_k = \lambda_k w_k, \qquad \langle w_k, w_l \rangle = \delta_{kl}.$$

Für $v = v_1 w_1 + .. + v_n w_n$ ist dann $Av = \lambda_1 v_1 w_1 + .. + \lambda_n v_n w_n$ und

$$\langle Av, v \rangle = \sum_{i,j=1}^{n} \lambda_i v_i v_j \langle w_i, w_j \rangle = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i^2 .$$

Daraus ergeben sich alle Behauptungen. Zum Beispiel ist für $v \neq 0$

$$\langle Av, v \rangle \geqslant \lambda_1 \sum_{i=1}^{n} v_i^2 = \lambda_1 |v|^2 > 0 \;\Leftrightarrow\; \lambda_1 > 0. \qquad ⟫⟫⟫$$

Speziell für symmetrische 2×2-Matrizen ergibt sich hieraus folgendes

12 **Korollar** *Für eine reelle symmetrische Matrix $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}$ gilt:*

(i) $A > 0 \quad\Leftrightarrow\quad \det A > 0 \wedge a > 0,$
(ii) $A < 0 \quad\Leftrightarrow\quad \det A > 0 \wedge a < 0,$
(iii) $A \gtrless 0 \quad\Leftrightarrow\quad \det A < 0.$ ⋊

⟨⟨⟨⟨⟨ Bezeichnen λ_1 und λ_2 die beiden Eigenwerte von A, so gilt bekanntlich $\det A = \lambda_1\lambda_2$. Ist $\det A < 0$, so haben beide Eigenwerte entgegengesetztes Vorzeichen, und A ist indefinit $_{11}$. Ist $\det A > 0$, so ist A definit, und $a = \langle Ae_1, e_1\rangle$ entscheidet über das Vorzeichen. ⟩⟩⟩⟩⟩

Nun benötigen wir noch eine Stetigkeitsaussage für Matrizenfunktionen.

13 **Lemma** *Die Matrixfunktion $A\colon \mathbb{R}^n \hookrightarrow S(n)$ sei stetig und $A(c) > 0$. Dann existiert eine Umgebung U von c, so dass $A(x) > 0$ für alle $x \in U$.* ⋊

⟨⟨⟨⟨⟨ Es existiert ein $\mu > 0$ $_{11}$, so dass

$$\langle A(c)v, v\rangle \geqslant 2\mu\,|v|^2, \qquad v \in \mathbb{R}^n.$$

Aufgrund der Stetigkeit von A existiert dazu eine Umgebung U von c, so dass

$$\|A(x) - A(c)\| \leqslant \mu, \qquad x \in U.$$

bezüglich der induzierten Operatornorm $\|\cdot\|$. Mit der Schwarzschen Ungleichung folgt

$$\begin{aligned}&|\langle A(x)v, v\rangle - \langle A(c)v, v\rangle|\\ &\qquad \leqslant |(A(x) - A(c))v|\,|v| \leqslant \|A(x) - A(c)\|\,|v|^2 \leqslant \mu\,|v|^2.\end{aligned}$$

Also ist

$$|\langle A(x)v, v\rangle| \geqslant |\langle A(c)v, v\rangle| - \mu\,|v|^2 \geqslant 2\mu\,|v|^2 - \mu\,|v|^2 = \mu\,|v|^2.$$

Somit gilt $_{11}$ $A(x) > 0$ für $x \in U$. ⟩⟩⟩⟩⟩

Hinweis Das Lemma wird *falsch* mit $\geqslant$ anstelle von $>$. ⊸

▪ Lokale Extremstellen

Nun zurück zum eigentlichen Problem, der Charakterisierung von Extremalstellen. Wir formulieren die Ergebnisse für *Minimalstellen*, für Maximalstellen sind die Aussagen entsprechend abzuwandeln.

14 **Satz** *Ist c eine lokale Minimalstelle einer C^2-Funktion $f\colon \mathbb{R}^n \hookrightarrow \mathbb{R}$, so ist*

$$Hf(c) \geqslant 0. \qquad ⋊$$

⟨⟨⟨⟨⟨ Für jedes $v \in \mathbb{R}^n$ besitzt die Hilfsfunktion $\varphi\colon t \mapsto f(c+tv)$ in $t=0$ ein lokales Minimum. Also gilt

$$\varphi''(0) = \partial_v^2 f(c) = \langle Hf(c)v, v\rangle \geqslant 0.$$

Da dies für alle $v \in \mathbb{R}^n$ gilt, folgt die Behauptung. ⟩⟩⟩⟩⟩

Dieser Satz formuliert eine notwendige, aber nicht hinreichende Bedingung, wie bereits die kubische Parabel $t \mapsto t^3$ zeigt. Um die Existenz einer Minimalstelle zu *garantieren*, braucht es etwas mehr.

15 **Satz** *Sei c ein kritischer Punkt einer C^2-Funktion $f\colon \mathbb{R}^n \hookrightarrow \mathbb{R}$. Gilt*

$$Hf(x) \geqslant 0$$

in einer Umgebung U von c, so ist c eine lokale Minimalstelle. Gilt sogar

$$Hf(c) > 0,$$

so ist c eine strikte lokale Minimalstelle. ⋊

⟨⟨⟨⟨⟨ Auf einer kleinen kugelförmigen Umgebung U von c gilt [5]

$$f(c+h) = f(c) + \frac{1}{2}\langle Hf(\xi)h, h\rangle$$

mit einem $\xi \in [c, c+h]$. Ist U hinreichend klein, so gilt $\langle Hf(\xi)h, h\rangle \geqslant 0$ nach Voraussetzung und somit

$$f(x) \geqslant f(c), \qquad x \in U.$$

Also ist c eine Minimalstelle.

Gilt $Hf(c) > 0$, so ist sogar $\langle Hf(\xi)h, h\rangle > 0$ für alle $\xi \in U$ und $h \neq 0$, wenn U hinreichend klein ist [13]. Also folgt mit demselben Argument

$$f(x) > f(c), \qquad x \in U \setminus \{c\},$$

und c ist eine strikte Minimalstelle. ⟩⟩⟩⟩⟩

Typische Fälle

▹ *Der definite Fall* Betrachte die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

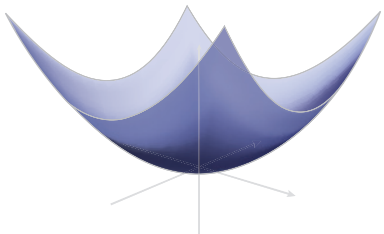
$$f(x,y) = x^2 + y^2.$$

Es ist

$$\nabla f = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix}, \qquad Hf = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Abb 2

Das Paraboloid $x^2 + y^2$



Also ist 0 der einzige kritische Punkt von f. Da außerdem $Hf > 0$ auf ganz $\mathbb{R}^2$, ist 0 eine lokale strikte Minimalstelle. Der Graph von f ist ein nach oben geöffnetes *Paraboloid* Abb 2 .

Für die Funktion $-f$ ist 0 entsprechend eine lokale strikte Maximalstelle, und ihr Graph ein nach unten geöffnetes Paraboloid. ◅

Ist die Hessische in einem kritischen Punkt semidefinit, aber nicht definit, so ist mindestens einer ihrer Eigenwerte Null. In diesem Fall kann der Graph von f sehr unterschiedliche Gestalt annehmen.

▹ *Der semidefinite Fall* Betrachte die Funktionen $f, g, h\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x,y) = x^2 + y^4, \qquad g(x,y) = x^2, \qquad h(x,y) = x^2 + y^3.$$

In allen Fällen ist 0 der einzige kritische Punkt mit Hessematrix

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \geqslant 0.$$

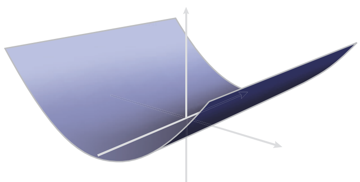
Die Funktionen verhalten sich um 0 jedoch sehr unterschiedlich:

(i) f hat ein striktes Minimum, sehr ähnlich zu Abbildung 2,
(ii) g hat ein nichtisoliertes Minimum wie in Abbildung 3,
(iii) h hat kein Minimum, sondern bildet einen *Affensattel* wie in Abbildung 4. ◅

Der semidefinite Fall ist in vielen Fällen schwierig zu behandeln. Oft kann man ihn aber als eine ›nicht typische‹ oder ›entartete‹ Situation betrachten, die ›normalerweise‹ nicht auftritt. Betrachtet man nur die ›nichtentarteten‹ Fälle, so wird die Situation meist sehr viel übersichtlicher.

Abb 3

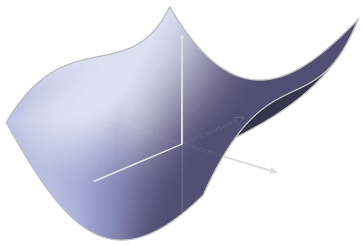
Die Rinne x^2



15.14

Abb 4

Der Affensattel $x^2 + y^3$



Definition *Ein kritischer Punkt c einer C^2-Funktion $f\colon \mathbb{R}^n \hookrightarrow \mathbb{R}$ heißt nichtdegeneriert oder nichtentartet, falls*

$$\det Hf(c) \neq 0.$$

Andernfalls heißt er entartet oder degeneriert. ⋊

In einem nichtentarteten kritischen Punkt kann die Hessische nicht semidefinit sein, da 0 kein Eigenwert ist. Sie ist entweder definit oder *indefinit*. Dieser Fall hat ebenfalls einen eigenen Namen.

Definition *Ein nichtentarteter kritischer Punkt c einer C^2-Funktion f heißt Sattelpunkt, falls die Hessische $Hf(c)$ indefinit ist.* ⋊

Im Falle einer Funktion *zweier* Variablen ist dies äquivalent mit der Bedingung $\det Hf(c) < 0$. In höheren Dimensionen ist diese Bedingung jedoch nur hinreichend, aber nicht notwendig, denn die Anzahl positiver wie negativer Eigenwerte kann positiv und gerade und die Determinante damit positiv sein.

▷ *Sattelpunkt im $\mathbb{R}^2$* Betrachte die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

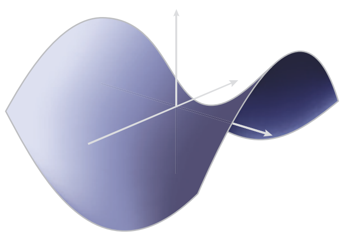
$$f(x,y) = x^2 - y^2.$$

Es ist

$$\nabla f = \begin{pmatrix} 2x \\ -2y \end{pmatrix}, \qquad Hf = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Abb 5

Der Sattel $x^2 - y^2$



Hier ist 0 wieder der einzige kritische Punkt von f, und es ist $Hf \gtrless 0$. Es liegt somit ein Sattelpunkt vor Abb 5. ◂◃

▪ Das Lemma von Morse

Die Bedeutung nichtentarteter kritischer Punkte besteht darin, dass Funktionen lokal bereits durch die *Anzahl* der negativen Eigenwerte der Hessischen vollständig charakterisiert sind. Man nennt [1]

$$\operatorname{ind}(c) \coloneqq \operatorname{card}\left(\operatorname{spec} Hf(c) \cap (-\infty, 0)\right)$$

den *Index* des kritischen Punktes c. Alles andere spielt *lokal* keine Rolle, wie der folgende Satz zeigt. Ein Beweis findet man zum Beispiel in Lang, *Real Analysis*, Kapitel VII.

16 **Lemma von Morse** *Die C^3-Funktion $f\colon \mathbb{R}^n \hookrightarrow \mathbb{R}$ besitze einen nichtentarteten kritischen Punkt c. Dann existieren Koordinaten $u = (u_1, .., u_n)$ um c so, dass*

$$f(u) = -u_1^2 - .. - u_k^2 + u_{k+1}^2 + .. + u_n^2 + f(c),$$

wobei $k = \operatorname{ind}(c)$. ⋊

Das heißt, es gibt eine Koordinatentransformation [2] $\varphi\colon U_0 \to U_c$ von einer offenen Umgebung U_0 von 0 auf eine offene Umgebung U_c von c, so dass

$$(f \circ \varphi)(u) = u_1^2 - .. - u_k^2 + u_{k+1}^2 + .. + u_n^2 + f(c)$$

in den neuen Koordinaten $u = (u_1, .., u_n)$.

In den passenden Koordinaten wird damit f bis auf eine unwichtige additive Konstante zu einer quadratischen Form, die vollständig durch den Index k des kritischen Punktes c bestimmt ist. Da dieser Index nur $n+1$ verschiedene Werte annehmen kann, erhalten wir folgendes

17 **Korollar** *Im $\mathbb{R}^n$ gibt es genau $n+1$ verschiedene nichtentartete kritische Punkte, und zwar strikte Minimalstellen, strikte Maximalstellen, und Sattelpunkte mit Index $k = 1, .., n-1$.* ⋊

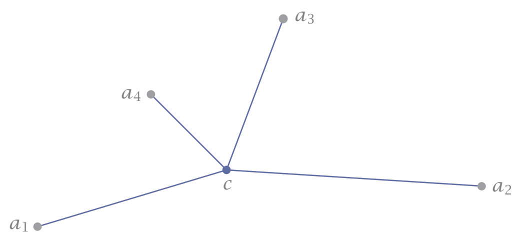
▪ Zwei Extremwertaufgaben

Als Anwendungsbeispiele betrachten wir zwei typische Extremwertaufgaben sowie das Maximumprinzip für harmonische Funktionen.

[1] $\operatorname{spec} A$ bezeichnet das Spektrum von A.
[2] Genauer einen Diffeomorphismus – dazu später mehr.

Abb 6

Punkt mit minimaler Quadratabstandssumme



⊳ *Extremwertaufgabe* Gegeben sind m Punkte $a_1,..,a_m$ im $\mathbb{R}^n$. Gesucht ist ein Punkt c im $\mathbb{R}^n$, so dass die Summe aller ihrer quadrierten Abstände zum Punkt c minimal wird.

Gesucht ist demnach das Minimum der Funktion

$$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{2m}\sum_{i=1}^{m} \|x - a_i\|^2,$$

wobei die Division durch m nur die folgenden Formeln vereinfacht und sonst keine Bedeutung hat. Das Quadrat der euklidischen Norm ist differenzierbar, mit

$$\nabla(\|x - a_i\|^2) = 2(x - a_i).$$

Also ist

$$\nabla f(x) = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}(x - a_i) = x - \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} a_i.$$

Dieser Gradient besitzt einen einzigen kritischen Punkt in

$$c = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} a_i,$$

dem arithmetischen Mittel der Punkte $a_1,..,a_m$, beziehungsweise dem Schwerpunkt des Körpers mit gleichen Massen in den Punkten $a_1,..,a_m$. Aus der Geometrie des Problems ist klar, dass dies ein lokales und sogar globales *Minimum* ist. Die Hessische von f ist übrigens $Hf = E > 0$. ⊲

18 ⊳ *Extremwertaufgabe mit Nebenbedingung* Zu bestimmen ist derjenige Quader, der bei vorgegebener Kantenlänge das größte Volumen einschließt.

Sind x, y, z die Kantenlängen des Quaders, so ist also die Funktion

$$V = xyz$$

zu maximieren unter der Vorgabe, dass $x + y + z$ konstant ist. Aufgrund der Homogenität des Problems in allen drei Koordinaten können wir die Gesamtkantenlänge auf einen beliebigen positiven Wert fixieren, zum Beispiel auf $x + y + z = 3$.

Dann ist $z = 3 - x - y$ und

$$V = V(x,y) = xy(3 - x - y) = 3xy - x^2y - xy^2.$$

Für den Gradienten erhalten wir damit

$$\nabla V(x,y) = \begin{pmatrix} 3y - 2xy - y^2 \\ 3x - 2xy - x^2 \end{pmatrix}.$$

Dieser Gradient besitzt vier verschiedene Nullstellen, aber nur der kritische Punkt mit $x = y = 1$ und damit auch $z = 1$ hat positive Koordinaten. Auch hier ist aufgrund geometrischer Überlegungen klar, dass es sich um das globale Maximum der Volumenfunktion auf dem ersten Quadranten in $\mathbb{R}^3$ handeln muss. Das Maximum wird also von einem Quader mit drei gleichen Seiten erreicht, was auch nicht weiter überrascht.

Die Hessische ist übrigens

$$HV(x,y) = \begin{pmatrix} -2y & 3 - 2x - 2y \\ 3 - 2x - 2y & -2x \end{pmatrix},$$

und es gilt

$$HV(x,y)\Big|_{x=y=1} = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} < 0.$$

Ein allgemeines Verfahren für solche Extremwertaufgaben mit Nebenbedingungen werden wir übrigens später kennenlernen. ◀

15.3 Konvexe Mengen und Funktionen

Definition *Eine Menge $M \subset V$ heißt konvex, wenn sie mit je zwei Punkten auch ihre Verbindungsstrecke enthält:*

$$u, v \in M \;\Rightarrow\; [u,v] \subset M,$$

wobei $[u,v] \coloneqq \{(1-t)u + tv : 0 \leqslant t \leqslant 1\}$. ⋊

▷ A. Auf der reellen Geraden sind die konvexen Mengen genau die Intervalle.

B. Jede offene Kugel $B_r(a)$ eines normierten Vektorraumes ist konvex. Denn seien $u, v \in B_r(a)$, also

$$\|u - a\| < r, \qquad \|v - a\| < r.$$

Für $0 \leqslant t \leqslant 1$ gilt dann aufgrund der Dreiecksungleichung und der positiven Homogenität einer Norm

$$\begin{aligned}\|((1-t)u+tv)-a\| &= \|(1-t)(u-a)+t(v-a)\| \\ &\leqslant (1-t)\,\|u-a\|+t\,\|v-a\| \\ &< (1-t)r+tr=r.\end{aligned}$$

Also ist auch $(1-t)u+tv \in B_r(a)$.

c. Dasselbe gilt für abgeschlossene Kugeln.

d. Der Durchschnitt beliebig vieler konvexer Mengen ist konvex.

e. Ist $M \subset V$ eine beliebige Teilmenge, so ist der Durchschnitt aller M umfassenden konvexen Mengen,

$$\check{M} := \bigcap \{K \subset V : M \subset K \text{ und } K \text{ ist konvex}\},$$

eine konvex Menge. Diese heißt die *konvexe Hülle* von M und ist die kleinste konvexe Menge in V, die M enthält.

f. Ist Ω offen und $a \in \Omega$, so ist $\Omega \setminus \{a\}$ *nicht* konvex.

g. Eine Banane ist unkonvex. ◅

Man nennt $(1-t)u+tv$ mit $0 \leqslant t \leqslant 1$ eine Konvexkombination der Punkte u und v. Allgemeiner heißt eine Linearkombination von $m \geqslant 1$ Punkten,

$$\lambda_1 u_1 + .. + \lambda_m u_m,$$

eine *Konvexkombination* dieser Punkte, wenn $\lambda_1, .., \lambda_m \geqslant 0$ und $\lambda_1 + .. + \lambda_m = 1$. Diese charakterisieren konvexe Mengen ebenfalls.

19 **Satz** *Eine Teilmenge K eines Vektorraumes ist konvex genau dann, wenn jede Konvexkombination aus Punkten in K ebenfalls zu K gehört.* ⋊

⟨⟨⟨⟨⟨ $\Leftarrow$ Wenn jede Konvexkombination aus K wieder zu K gehört, dann gilt das natürlich auch für solche aus zwei Punkten. Also ist K konvex.

$\Rightarrow$ Dies zeigen wir durch Induktion über die Zahl m der konvex kombinierten Punkte. Für $m = 1$ ist nichts zu tun, ebensowenig für $m = 2$, da dies ja

Abb 7 Zwei Konvexe und zwei nicht-konvexe Mengen

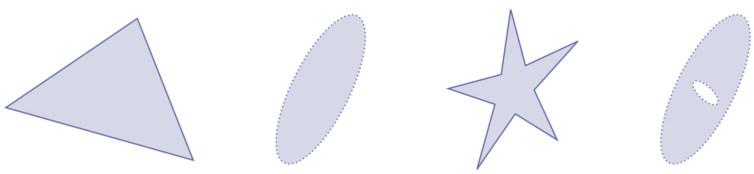
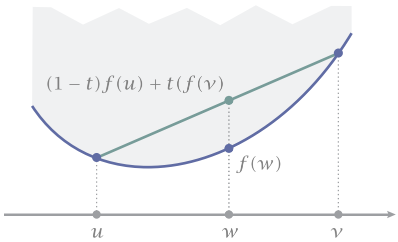


Abb 8

Eine konvexe Funktion und ihr Epigraph



der Definition entspricht. Nun gelte die Behauptung für jede Konvexkombination aus $m \geqslant 2$ Punkten aus K, und es sei

$$u = \lambda_1 u_1 + .. + \lambda_{m+1} u_{m+1}$$

eine Konvexkombination aus $m+1$ Punkten in K. Ist $\lambda_{m+1} = 1$, so ist $u = u_{m+1}$, und wir sind bereits fertig. Andernfalls ist $\lambda \coloneqq \lambda_1 + .. + \lambda_m = 1 - \lambda_{m+1} > 0$. Aufgrund der Induktionsannahme gilt

$$v = \frac{\lambda_1}{\lambda} u_1 + .. + \frac{\lambda_m}{\lambda} u_m \in K,$$

denn dies ist eine Konvexkombination aus m Punkten. Da K auch jede Konvexkombination aus zwei Punkten enthält und $1 - \lambda = \lambda_{m+1}$, ist auch

$$\lambda v + (1-\lambda) u_{m+1} = \lambda_1 u_1 + .. + \lambda_{m+1} u_{m+1} = u \in K. \qquad ⟫⟫⟫$$

Nun zum Begriff der konvexen Funktion.

Definition *Eine auf einer konvexen Menge K eines Vektorraumes definierte Funktion $f \colon K \to \mathbb{R}$ heißt konvex, wenn*

$$f((1-t)u + tv) \leqslant (1-t)f(u) + tf(v)$$

für alle $u, v \in K$ und alle $0 \leqslant t \leqslant 1$. Sie heißt strikt konvex, wenn außerdem

$$f((1-t)u + tv) < (1-t)f(u) + tf(v)$$

für alle $u \neq v$ und alle $0 < t < 1$. ⋊

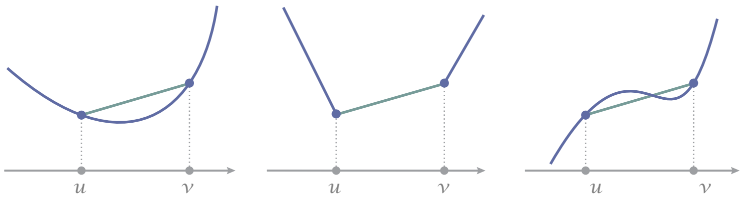
Geometrisch bedeutet dies, dass der Graph von f unterhalb jeder Verbindungsstrecke zweier Punkte auf diesem Graphen liegt. Dies lässt sich ebenfalls mit dem Begriff der konvexen Menge ausdrücken.

20 **Notiz** *Eine auf einer konvexen Menge K eines Vektorraumes V definierte Funktion $f \colon K \to \mathbb{R}$ ist konvex genau dann, wenn ihr Epigraph*

$$\operatorname{Epi}(f) \coloneqq \{(u,z) \in V \times \mathbb{R} : u \in K,\ z \geqslant f(u)\}$$

konvex in $V \times \mathbb{R}$ ist. ⋊

Abb 9 Strikt konvexe, konvexe, und nicht konvexe Funktionen



▷ Jede Norm N auf einem Vektorraum ist konvex, denn aufgrund der Dreiecksungleichung und der positiven Homogenität gilt, für $0 \leqslant t \leqslant 1$,

$$\begin{aligned} N((1-t)u + tv) &\leqslant N((1-t)u) + N(tv) \\ &= (1-t)N(u) + tN(v). \end{aligned}$$

Sie ist aber nicht strikt konvex, denn für $u = 0$ und $v \neq 0$ gilt

$$N((1-t)u + tv) = N(tv) = tN(v) = (1-t)N(u) + tN(v). \quad ◁$$

Ist eine Funktion konvex, so ist sie es auch bezüglich beliebiger Konvexkombinationen ihrer Argumente. Dies wird genau so bewiesen wird wie die entsprechende Ausasge über konvexe Mengen 19 .

21 **Satz** *Eine auf einer konvexen Menge K eines Vektorraumes definierte Funktion $f: K \to \mathbb{R}$ ist konvex genau, wenn*

$$f(\lambda_1 v_1 + .. + \lambda_m v_m) \leqslant \lambda_1 f(v_1) + .. + \lambda_m f(v_m)$$

für jede Konvexkombination $\lambda_1 v_1 + .. + \lambda_m v_m$ in K. ⋊

Die Konvexität einer Funktion ist punktweise definiert und erfordert keinerlei Stetigkeit. Auf einer abgeschlossenen Menge muss dies auch nicht der Fall sein, wie Abbildung 10 zeigt. Jene Funktion ist offensichtlich konvex auf $[-1, 1]$, aber unstetig. Anders ist dies auf *offenen* Mengen.

22 **Satz** *Sei $\Omega \subset V$ offen und konvex. Ist $f: \Omega \to \mathbb{R}$ konvex, so ist f stetig und auf jeder kompakten Teilmenge von Ω sogar lipschitzstetig.* ⋊

Wir benötigen diesen Satz hier nicht und übergehen deshalb den Beweis. Man findet ihn zum Beispiel in Hildebrandt 2, Seite 75–76.

▪ Konvexität und Differenzierbarkeit

Wir wollen nun Konvexität durch Eigenschaften der ersten und zweiten Ableitung charakterisieren. Grundlegend ist folgender Satz.

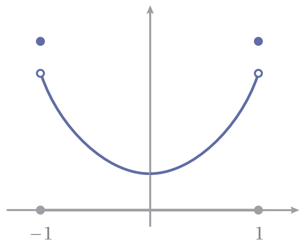


Abb 10

Eine konvexe unstetige Funktion

23 **Satz** *Sei $\Omega \subset V$ offen und konvex und $f \in C^1(\Omega)$. Dann ist f konvex genau dann, wenn*

$$f(x+h) \geqslant f(x) + Df(x)h$$

für alle $x, x+h \in \Omega$. Sie ist strikt konvex genau dann, wenn außerdem

$$f(x+h) > f(x) + Df(x)h$$

für alle $h \neq 0$ gilt. ⋊

⟨⟨⟨⟨⟨ $\Rightarrow$ Sei f konvex. Mit $x, x+h$ gehört dann auch

$$x + th = (1-t)x + t(x+h), \qquad 0 \leqslant t \leqslant 1,$$

zu Ω, und aufgrund der Konvexität von f gilt

$$f(x+th) \leqslant (1-t)f(x) + tf(x+h) = f(x) + t\left(f(x+h) - f(x)\right).$$

Wegen $f \in C^1(\Omega)$ gilt also

$$f(x+h) - f(x) \geqslant \frac{1}{t}\left(f(x+th) - f(x)\right) = \frac{1}{t}\int_0^t Df(x+sh)h\,\mathrm{d}s \tag{2}$$

für alle $0 < t < 1$ mit einem in s stetigen Integranden. Mit $t \to 0$ und dem Riemannschen Lemma $_{11.16}$ erhalten wir somit die Behauptung

$$f(x+h) - f(x) \geqslant Df(x)h \tag{3}$$

für den Fall der einfachen Konvexität.

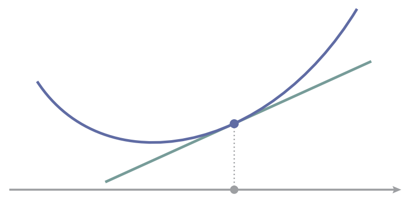
Ist f sogar strikt konvex, so gilt in (2) die strikte Ungleichung. Zusammen mit der eben bewiesenen Ungleichung (3) für th anstelle von h erhalten wir

$$\begin{aligned} f(x+h) - f(x) &> \frac{1}{t}\left(f(x+th) - f(x)\right) \\ &\geqslant \frac{1}{t}Df(x)(th) = Df(x)h \end{aligned}$$

wie behauptet.

Abb 11

Konvexe Funktion mit Stützgerade



$\Leftarrow$ Seien $x \neq y$ zwei Punkte in Ω und $z = (1-t)x + ty$ mit $0 < t < 1$. Dann ist mit $h = y - x$ umgekehrt

$$x = z - th, \qquad y = z + (1-t)h.$$

Wenden wir hierauf (3) an, so erhalten wir

$$f(x) \geqslant f(z) - tDf(z)h, \qquad f(y) \geqslant f(z) + (1-t)Df(z)h.$$

Multiplizieren der ersten Gleichung mit $1-t \geqslant 0$, der zweiten mit $t \geqslant 0$ und anschließendes Addieren ergibt

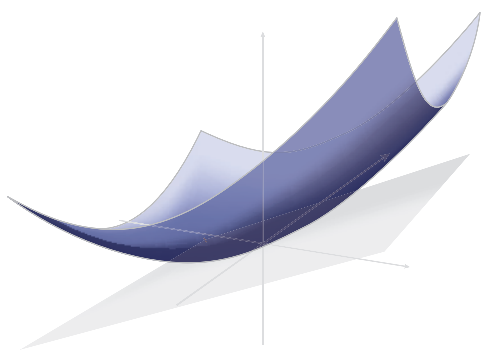
$$(1-t)f(x) + tf(y) \geqslant f(z) = f((1-t)x + ty).$$

Somit ist f konvex. Gilt in der Voraussetzung (3) sogar die strikte Ungleichung, so gilt sie auch in den letzten drei Ungleichungen, und wir erhalten die strikte Konvexität von f. ⟫⟫⟫

Der Graph der Funktion $h \mapsto f(x) + Df(x)h$ beschreibt die *Tangentialebene* an den Graphen von f im Punkt $(x, f(x))$. Eine C^1-Funktion ist somit (strikt) konvex genau dann, wenn ihr Graph (strikt) oberhalb aller ihrer Tangentialebenen liegt, mit Ausnahme natürlich des jeweiligen Berührpunktes. Solche Ebenen werden *Stützebenen*, im eindimensionalen Fall *Stützgeraden* genannt.

Abb 12

Konvexe Fläche mit Stützebene



Im eindimensionalen Fall ergibt sich aus dem letzten Satz folgende Charakterisierung konvexer C^1-Funktionen.

24 **Satz** *Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f \in C^1(I)$. Dann ist f (strikt) konvex genau dann, wenn f' (streng) monoton steigt.* ⋊

⟪⟪⟪ $\Rightarrow$ Besteht I nur aus einem Punkt, so ist nichts zu tun. Sei also I nichtentartet, und seien $u < v$ innere Punkte von I. Dann ergibt der letzte Satz

$$f(v) - f(u) \geqslant f'(u)(v-u), \qquad f(u) - f(v) \geqslant f'(v)(u-v).$$

Daraus folgt $f'(u)(v-u) \leqslant f'(v)(v-u)$ und damit $f'(u) \leqslant f'(v)$. Aus Stetigkeitsgründen gilt dies dann auch für etwaige Randpunkte von I. Ist f zudem strikt konvex, so gelten überall auch die strikten Ungleichungen.

$\Leftarrow$ Ist f' monoton wachsend, so gilt

$$f(x+h) - f(x) = \int_0^1 f'(x+sh)h\,\mathrm{d}s \geqslant \int_0^1 f'(x)h\,\mathrm{d}s = f'(x)h,$$

und zwar sowohl für $h \geqslant 0$ wie auch $h \leqslant 0$. Ist f' streng monoton wachsend, so gilt für $h \neq 0$ sogar die strikte Ungleichung. Die Behauptung folgt dann mit dem letzten Satz $_{23}$. ⟫⟫⟫

Nun betrachten wir nun noch den Fall einer C^2-Funktion.

25 **Satz** *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und konvex und $f \in C^2(\Omega)$. Dann ist f konvex genau dann, wenn $Hf \geqslant 0$ auf ganz Ω. Gilt sogar $Hf > 0$, so ist f strikt konvex.* ⋊

⟪⟪⟪ Mit $x, x+h \in \Omega$ ist wegen der Konvexität von Ω auch $[x, x+h] \subset \Omega$. Aufgrund der quadratischen Taylorformel $_5$ gilt

$$f(x+h) = f(x) + \langle \nabla f(x), h \rangle + \frac{1}{2} \langle Hf(\xi)h, h \rangle \tag{4}$$

für ein $\xi \in [x, x+h]$. Ist $Hf \geqslant 0$ auf Ω, so folgt

$$f(x+h) \geqslant f(x) + \langle \nabla f(x), h \rangle \tag{5}$$

und hieraus die Konvexität von f $_{23}$. Gilt sogar $Hf > 0$ auf Ω, so folgt entsprechend die strikte Konvexität.

Ist umgekehrt f konvex, so gilt wieder (5) $_{23}$, und mit (4) folgt somit

$$\langle Hf(\xi)h, h \rangle \geqslant 0$$

mit einem $\xi \in [x, x+h]$. Ersetzen wir h durch εh, so gilt *dieselbe* Ungleichung mit $\xi \in [x, x+\varepsilon h]$. Lassen wir ε gegen Null konvergieren, so konvergiert ξ gegen x, und wir erhalten

$$\langle Hf(x)h, h \rangle \geqslant 0.$$

Da dies für jedes kleine h gilt, ist $Hf(x) \geqslant 0$. Dies gilt für jedes $x \in \Omega$.

Bemerkung Umgekehrt folgt aus der strikten Konvexität *nicht*, dass auch die Hessische strikt positiv definit ist. Zum Beispiel ist $x \mapsto x^4$ strikt konvex, aber die zweite Ableitung verschwindet bei $x = 0$.

A. exp ist strikt konvex auf $\mathbb{R}$.
B. log ist strikt anti-konvex, das heißt, $-\log$ ist strikt konvex auf $(0, \infty)$.
C. Jede C^2-Funktion f auf einem Intervall mit $f'' > 0$ ist strikt konvex.

15.4 Konvexe Ungleichungen

Auf Konvexitätsargumenten beruhen einige wichtige Ungleichungen der Analysis. Zunächst die

26 **Jensensche Ungleichung** *Sei φ integrierbar auf dem Intevall I. Ist f stetig und konvex auf $\varphi(I)$, so gilt*

$$f\left(\fint_I \varphi(t)\,\mathrm{d}t\right) \leqslant \fint_I f(\varphi(t))\,\mathrm{d}t,$$

wobei

$$\fint_I \varphi(t)\,\mathrm{d}t \coloneqq \frac{1}{|I|}\int_I \varphi(t)\,\mathrm{d}t$$

das gemittelte Integral über I bezeichnet

Für eine Treppenfunktion $\varphi = \sum_{k=1}^{n} c_k \chi_{(t_{k-1}, t_k)}$ gilt

$$\fint_I \varphi(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{n} \frac{t_k - t_{k-1}}{|I|} c_k.$$

Dies ist eine Konvexkombination der reellen Zahlen $c_1, .., c_n$ im Intervall $\varphi(I)$. Aufgrund der Konvexität von f auf $\varphi(I)$ gilt daher [21]

$$\begin{aligned} f\left(\fint_I \varphi(t)\,\mathrm{d}t\right) &\leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{t_k - t_{k-1}}{|I|} f(c_k) = \frac{1}{|I|}\sum_{k=1}^{n}(t_k - t_{k-1}) f(c_k) \\ &= \frac{1}{|I|}\int_I f(\varphi(t))\,\mathrm{d}t = \fint_I f(\varphi(t))\,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Somit gilt die Jensensche Ungleichung für Treppenfunktion. Aus Stetigkeitsgründen gilt sie dann auch für alle Regelfunktionen.

▻ Ist φ integrierbar auf I, so gilt

$$\int_I |\varphi(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant \left(\int_I |\varphi(t)|^p\,\mathrm{d}t\right)^{1/p}, \qquad p \geqslant 1.$$

für alle $p \geqslant 1$. ◅

27 **Youngsche Ungleichung** *Für reelle Zahlen $a, b \geqslant 0$ und Exponenten $p, q > 1$ mit $1/p + 1/q = 1$ gilt*

$$ab \leqslant \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Gleichheit gilt genau dann, wenn $a^p = b^q$. ⋊

⟪⟪ Für $u, v > 0$ und $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$ gilt ja

$$\alpha \log u + (1-\alpha)\log v \leqslant \log(\alpha u + (1-\alpha)v).$$

Bilden wir auf beiden Seiten das Exponenzial, so erhalten wir die *Ungleichung vom geometrischen und arithmetischen Mittel*,

$$u^\alpha v^{1-\alpha} \leqslant \alpha u + (1-\alpha)v.$$

Mit $\alpha = 1/p$, $1-\alpha = 1/q$ sowie $u = a^p$, $v = b^q$ ergibt sich die Youngsche Ungleichung. ⟫⟫

Reelle Zahlen p und q mit

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, \qquad p, q > 1,$$

werden als *konjugierte Exponenten* bezeichnet. Für diese gelten die oft benötigten Identitäten

$$\begin{aligned} p + q = pq \quad &\Leftrightarrow \quad (p-1)(q-1) = 1 \\ &\Leftrightarrow \quad p(q-1) = q \\ &\Leftrightarrow \quad q(p-1) = p. \end{aligned}$$

Die einzigen *selbstkonjugierten Exponenten* sind $p = q = 2$.

28 **Höldersche Ungleichung** *Für auf einem Intervall I integrierbare Funktionen f, g und konjugierte Exponenten p und q gilt*

$$\int_I |fg| \leqslant \left(\int_I |f|^p\right)^{1/p} \left(\int_I |g|^q\right)^{1/q}. \quad ⋊$$

⟪⟪ Verschwindet das Integral von $|f|$ oder $|g|$, so verschwindet auch das Integral von $|fg|$, und es ist nichts zu zeigen. Wir können also annehmen, dass

$$A = \left(\int_I |f|^p\right)^{1/p} > 0, \qquad B = \left(\int_I |g|^q\right)^{1/q} > 0$$

gilt. Aufgrund der Youngschen Ungleichung gilt dann punktweise

$$\frac{|f|}{A}\,\frac{|g|}{B} \leqslant \frac{1}{p}\frac{|f|^p}{A^p} + \frac{1}{q}\frac{|g|^q}{B^q}.$$

Integration über $[a,b]$ ergibt

$$\frac{1}{AB}\int_I |fg| \leqslant \frac{1}{p}\int_I \frac{|f|^p}{A^p} + \frac{1}{q}\int_I \frac{|g|^q}{B^q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Dies ist äquivalent zur behaupteten Ungleichung. 》》》

Ein Spezialfall dieser Ungleichung ist die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung in Integralform,

$$\int_I |fg| \leqslant \left(\int_I |f|^2\right)^{1/2} \left(\int_I |g|^2\right)^{1/2}.$$

Mithilfe der Hölderschen Ungleichung erhalten wir die

29 **Minkowskische Ungleichung** *Für auf einem Intervall I integrierbare Funktionen f,g und $p \geqslant 1$ gilt*

$$\left(\int_I |f+g|^p\right)^{1/p} \leqslant \left(\int_I |f|^p\right)^{1/p} + \left(\int_I |g|^p\right)^{1/p}. \qquad \rtimes$$

《《《 Für $p = 1$ ist dies die Dreiecksungleichung. Sei also $p > 1$. Es ist

$$|f+g|^p = |f+g|^{p-1}\,|f+g| \leqslant |f|\,|f+g|^{p-1} + |g|\,|f+g|^{p-1}. \tag{6}$$

Mit dem zu p konjugierten Exponenten q ist $(p-1)q = p$ und mit der Hölderschen Ungleichung somit

$$\begin{aligned}\int |f+g|^p &\leqslant \left(\int |f|^p\right)^{1/p}\left(\int |f+g|^{(p-1)q}\right)^{1/q} \\ &\quad + \left(\int |g|^p\right)^{1/p}\left(\int |f+g|^{(p-1)q}\right)^{1/q} \\ &= \left\{\left(\int |f|^p\right)^{1/p} + \left(\int |g|^p\right)^{1/p}\right\}\left(\int |f+g|^p\right)^{1/q}.\end{aligned}$$

Ist nun die linke Seite Null, so ist nichts zu zeigen. Andernfalls dividieren wir durch den ganz rechts stehenden Faktor und erhalten wegen $1 - 1/q = 1/p$ die Minkowskische Ungleichung. 》》》