16

Lineare Differenzialgleichungen

Eine *lineare Differenzialgleichung* auf einem Vektorraum V ist von Form

$$\dot{x} = Ax$$

mit $A \in L(V)$, also einem beschränkten linearer Operator A auf V. Eine *Lösung* dieser Gleichung ist jede differenzierbare Kurve $\varphi\colon I \to V$, so dass

$$\dot{\varphi}(t) = A\varphi(t), \qquad t \in I.$$

Wir werden sehen, dass jedes *Anfangswertproblem*

$$\dot{x} = Ax, \qquad x(0) = x_0$$

eine eindeutige und sogar für alle Zeiten definierte Lösung $\varphi\colon \mathbb{R} \to V$ mit

$$\varphi(t) = \mathrm{e}^{At}x_0$$

besitzt. Dazu müssen wir nur das Symbol e^{At} geeignet definieren. Eine Darstellung des Operators A in einer geeigneten Normalform verhilft uns dann zu einem umfassenden Verständnis aller Lösungen von $\dot{x} = Ax$.

16.1 Exponenziale linearer Operatoren

Für reelle Zahlen a und t ist bekanntlich

$$\mathrm{e}^{at} = \sum_{k \geqslant 0} \frac{a^k}{k!} t^k.$$

Um diese Darstellung auf beschränkte lineare Operatoren auszudehnen, benötigen wir ein paar Vorbereitungen.

Eine Norm $|\cdot|$ auf einem Vektorraum V induziert auf dem Raum $L(V)$ aller stetigen linearen Operatoren auf V eine *Operatornorm* $\|\cdot\|$ durch

$$\|A\| \coloneqq \sup_{x \neq 0} \frac{|Ax|}{|x|} = \sup_{|x|=1} |Ax| .$$

Wie wir bereits gesehen haben 14.1, wird $L(V)$ mit dieser Norm zu einem Banachraum 14.2. Es gilt sogar mehr.

1 **Satz** *Der Raum $L(V)$ mit der Operatornorm $\|\cdot\|$ bildet bezüglich der Addition und Komposition von Operatoren eine Banachalgebra.* ⋊

Eine *Banachalgebra* ist ein Banachraum, in dem eine Multiplikation erklärt ist, die sich mit der Addition mittels der *Distributivgesetze*

$$A(B + C) = AB + AC, \quad (A + B)C = AC + BC$$

und mit der Norm mittels der Ungleichung

$$\|AB\| \leqslant \|A\| \, \|B\|$$

verträgt. Die Multiplikation muss jedoch nicht kommutativ sein, und im Fall der Hintereinanderausführung von Operatoren ist sie es auch nicht. — Der Beweis dieser Eigenschaften ist eine leichte Übung.

▪ Das Exponenzial e^A

In einem beliebigen Banachraum können wir *unendliche Reihen* bilden. Diese definieren wir wie üblich als Limes endlicher Partialsummen, also

$$\sum_{k \geqslant 0} A_k \coloneqq \lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{n} A_k,$$

wenn dieser existiert.

Die Reihe heißt *absolut* oder *normal konvergent*, falls die Reihe $\sum_k \|A_k\|$ konvergiert, was äquivalent ist mit

$$\sum_{k \geqslant 0} \|A_k\| < \infty.$$

In diesem Fall bilden die Partialsummen eine Cauchyfolge, die aufgrund der Vollständigkeit von $L(V)$ auch gegen einen Grenzwert konvergiert.

Definition und Satz *Das Exponenzial von $A \in L(V)$ ist der lineare Operator*

$$e^A \coloneqq \exp(A) \coloneqq \sum_{k \geqslant 0} \frac{A^k}{k!} = I + A + \frac{1}{2!} A^2 + \,..\, .$$

Diese Reihe konvergiert absolut und gleichmäßig auf jeder beschränkten Menge in $L(V)$, und es gilt

$$\|e^A\| \leqslant e^{\|A\|}. \qquad \rtimes$$

⟨⟨⟨⟨⟨ Aus $\|AB\| \leqslant \|A\|\,\|B\|$ folgt mit vollständiger Induktion $\|A^k\| \leqslant \|A\|^k$ für alle $k \geqslant 0$. Für alle $n \geqslant 0$ gilt daher

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\,\|A^k\| \leqslant \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\,\|A\|^k \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\,\|A\|^k = e^{\|A\|} < \infty.$$

Also konvergiert die Exponenzialreihe absolut und gleichmäßig auf jeder beschränkten Menge in $L(V)$. Die behauptete Ungleichung folgt dann aus

$$\left\|\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} A^k\right\| \leqslant \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\,\|A^k\| \leqslant e^{\|A\|}$$

und Grenzübergang $n \to \infty$. ⟩⟩⟩⟩⟩

Für die weiteren Eigenschaften des Exponenzials benötigen wir den Produktsatz von Cauchy, der es erlaubt, das Produkt zweier Reihen durch Ausmultiplizieren und Umordnung unendlich vieler Summanden darzustellen. Er gilt für absolut konvergente reelle Reihen ebenso wie für normal konvergente Reihen von Operatoren.

2 **Produktsatz** *Sind die Reihen $\sum_{k\geqslant 0} A_k$ und $\sum_{l\geqslant 0} B_l$ absolut konvergent, so gilt*

$$\sum_{k\geqslant 0} A_k \sum_{l\geqslant 0} B_l = \sum_{k,l\geqslant 0} A_k B_l = \sum_{n\geqslant 0} \sum_{k+l=n} A_k B_l,$$

wobei alle Reihen absolut konvergieren. $\rtimes$

⟨⟨⟨⟨⟨ Die Beweisschritte werden in einer Aufgabe skizziert A-5. ⟩⟩⟩⟩⟩

3 **Rechenregeln** *Seien $A, B, T \in L(V)$ und T invertierbar. Dann gilt:*

(i) $e^{T^{-1}AT} = T^{-1} e^A T$.

(ii) $e^{A+B} = e^A e^B$, *falls* $AB = BA$.

(iii) $e^{-A} = (e^A)^{-1}$. *Insbesondere ist* e^A *immer invertierbar.* $\rtimes$

⟨⟨⟨⟨⟨ (i) Mit Induktion zeigt man

$$(T^{-1}AT)^k = T^{-1}A^kT, \qquad k \geqslant 0.$$

Für jedes $n \geqslant 0$ gilt deshalb

$$T^{-1}\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{A^k}{k!}\right) T = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} T^{-1}A^kT = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} (T^{-1}AT)^k.$$

Grenzübergang $n \to \infty$ ergibt

$$T^{-1}\mathrm{e}^A T = T^{-1}\Bigg(\sum_{k\geqslant 0}\frac{A^k}{k!}\Bigg)T = \sum_{k\geqslant 0}\frac{1}{k!}(T^{-1}AT)^k = \mathrm{e}^{T^{-1}AT}.$$

(ii) Mit $AB = BA$ gilt auch für alle $n \geqslant 0$ die *binomische Formel*

$$\frac{1}{n!}(A+B)^n = \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!(n-k)!}A^k B^{n-k} = \sum_{k+l=n}\frac{A^k B^l}{k!l!}.$$

Daraus folgt mit dem Produktsatz 2

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^{A+B} &= \sum_{n\geqslant 0}\frac{1}{n!}(A+B)^n \\ &= \sum_{n\geqslant 0}\sum_{k+l=n}\frac{A^k B^l}{k!l!} = \sum_{k\geqslant 0}\frac{A^k}{k!}\sum_{l\geqslant 0}\frac{B^l}{l!} = \mathrm{e}^A\mathrm{e}^B.\end{aligned}$$

(iii) Dies folgt aus (ii) mit

$$I = \mathrm{e}^0 = \mathrm{e}^{A-A} = \mathrm{e}^A\mathrm{e}^{-A} = \mathrm{e}^{-A}\mathrm{e}^A.$$

Also ist e^A invertierbar, und die Inverse ist e^{-A}. ⟫⟫⟫

Achtung Für nicht kommutierende Operatoren gilt die binomische Formel für $n \geqslant 2$ und auch Aussage (ii) im Allgemeinen *nicht* A-4. ⊸

▪ Zwei Beispiele

Im Allgemeinen ist die Berechnung der Reihe von e^A praktisch kaum durchführbar. Zwei wichtige Ausnahmen bilden jedoch diagonale und nilpotente Operatoren.

Definition *Ein Operator $A \in L(V)$ heißt Diagonaloperator, wenn V eine Basis aus Eigenvektoren von A besitzt. Er heißt nilpotent, falls $A^{m+1} = 0$ für ein $m \geqslant 0$.* ⋊

Ist A nilpotent mit $A^{m+1} = 0$, so ist

$$\mathrm{e}^A = \sum_{k\geqslant 0}\frac{1}{k!}A^k = \sum_{0\leqslant k\leqslant m}\frac{1}{k!}A^k = I + A + .. + \frac{1}{m!}A^m$$

ein *Polynom* in A. Ist A ein Diagonaloperator, so nimmt er in einer Basis aus Eigenvektoren Diagonalgestalt $\Lambda = \operatorname{diag}(\lambda_1, .., \lambda_n)$ an. Hierfür gilt offensichtlich

$$\mathrm{e}^\Lambda = \operatorname{diag}(\mathrm{e}^{\lambda_1}, .., \mathrm{e}^{\lambda_n}).$$

In einer anderen Basis ist dann $A = T^{-1}\Lambda T$ mit einem entsprechenden Isomorphismus T, und es gilt

$$\mathrm{e}^A = \mathrm{e}^{T^{-1}\Lambda T} = T^{-1}\mathrm{e}^\Lambda T.$$

Die komplizierte Bestimmung von e^A wird damit auf die einfache Bestimmung von e^Λ zurückgeführt.

Mit Hilfe der SN-Zerlegung von Operatoren werden wir in Abschnitt 5 den allgemeinen Fall auf diese beiden Spezialfälle zurückführen.

■ 1-Parametergruppen

Statt des Exponenzials e^A betrachten wir nun die *Familie* $t \mapsto \mathrm{e}^{At}$.

Definition *Eine 1-Parametergruppe ist eine Abbildung*

$$\Phi: \mathbb{R} \to G, \quad t \mapsto \Phi^t$$

von $\mathbb{R}$ *in eine multiplikative Gruppe* G *mit den zwei Eigenschaften*

$$\Phi^0 = I, \qquad \Phi^{s+t} = \Phi^s \Phi^t, \qquad s, t \in \mathbb{R},$$

wobei I *das neutrale Element in* G *bezeichnet.* ⋊

Bei einer 1-Parametergruppe handelt es sich also um einen *Gruppenhomomorphismus* $(\mathbb{R}, +) \to (G, \cdot)$. Wegen

$$\Phi^s \Phi^t = \Phi^{s+t} = \Phi^{t+s} = \Phi^t \Phi^s$$

kommutieren alle Mitglieder einer 1-Parametergruppe, auch wenn G selbst keine kommutative Gruppe ist. Außerdem ist Φ^{-t} das Inverse zu Φ^t, denn

$$I = \Phi^0 = \Phi^{t-t} = \Phi^t \Phi^{-t} = \Phi^{-t} \Phi^t.$$

Jedes Element einer 1-Parametergruppe ist also invertierbar. — Nun zurück zu unserer Familie $t \mapsto \mathrm{e}^{At}$.

4 **Satz** *Für jedes* $A \in L(V)$ *ist*

$$\Phi: \mathbb{R} \to L(V), \quad t \mapsto \Phi^t = \mathrm{e}^{At}$$

eine differenzierbare 1-Parametergruppe in $L(V)$ *mit*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \mathrm{e}^{At} = A\mathrm{e}^{At}. \quad ⋊$$

⟨⟨⟨⟨ Offensichtlich ist $\mathrm{e}^{A0} = \mathrm{e}^0 = I$ und, da As und At kommutieren,

$$\mathrm{e}^{A(s+t)} = \mathrm{e}^{As+At} = \mathrm{e}^{As} \mathrm{e}^{At}.$$

Somit handelt es sich um eine 1-Parametergruppe. Ferner folgt aus der Exponenzialreihendarstellung

$$(\mathrm{e}^{At})' \Big|_{t=0} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} (\mathrm{e}^{Ah} - I) = A,$$

denn

$$\mathrm{e}^{Ah} - I = \sum_{k\geqslant 1} \frac{A^k}{k!} h^k = Ah + O(h^2).$$

Mit der Gruppeneigenschaft folgt daraus für jedes andere t

$$(\mathrm{e}^{At})' = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} \mathrm{e}^{A(s+t)} \Big|_{s=0} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} \mathrm{e}^{As} \mathrm{e}^{At} \Big|_{s=0} = A\mathrm{e}^{At}. \quad ⟩⟩⟩⟩⟩$$

16.2 Die lineare Differenzialgleichung

Mit den Ergebnissen des vorangehenden Abschnitts können wir die Differenzialgleichung $\dot{x} = Ax$ nun vollständig lösen.

5 **Fundamentalsatz** *Das Anfangswertproblem*

$$\dot{x} = Ax, \quad x(0) = x_0$$

besitzt für jedes $x_0 \in V$ die eindeutige Lösung

$$\varphi : \mathbb{R} \to V, \quad \varphi(t) = \mathrm{e}^{At} x_0. \quad ⋊$$

⟨⟨⟨⟨⟨ Dies ist sicherlich *eine* Lösung, denn es ist $\varphi(0) = x_0$, und φ ist differenzierbar in t [4] mit

$$\dot{\varphi}(t) = (\mathrm{e}^{At} x_0)^{\boldsymbol{\cdot}} = (\mathrm{e}^{At})^{\boldsymbol{\cdot}} x_0 = A\mathrm{e}^{At} x_0 = A\varphi(t).$$

Es ist auch die *einzige* Lösung. Denn ist ψ eine weitere Lösung, so gilt, da e^{-At} und A kommutieren,

$$\begin{aligned} (\mathrm{e}^{-At}\psi(t))^{\boldsymbol{\cdot}} &= -A\mathrm{e}^{-At}\psi(t) + \mathrm{e}^{-At}A\psi(t) \\ &= -A\mathrm{e}^{-At}\psi(t) + A\mathrm{e}^{-At}\psi(t) = 0. \end{aligned}$$

Also ist $\mathrm{e}^{-At}\psi$ konstant, und Auswerten bei $t = 0$ ergibt

$$\mathrm{e}^{-At}\psi(t) = \psi(0) = x_0.$$

Also ist $\psi(t) = \mathrm{e}^{At} x_0$. ⟩⟩⟩⟩⟩

Für eine lineare Differenzialgleichung ist $\varphi \equiv 0$ immer eine Lösung, genannt *Gleichgewichtslösung*. Aus dem Fundamentalsatz folgt, dass dies auch die einzige Lösung ist, die jemals den Wert 0 annimmt. Mit anderen Worten, keine andere Lösung kann den Wert 0 annehmen – sie kann ihm allenfalls beliebig nahe kommen. Solche Lösungen werden uns im nächsten Abschnitt begegnen.

▪ Infinitesimaler Generator

Jeder beschränkte lineare Operator definiert also eine lineare Differenzialgleichung und damit eine differenzierbare 1-Parametergruppe von Operatoren, die sämtliche Lösungen dieser Gleichung repräsentiert. Hiervon gilt auch folgende Umkehrung.

6 **Satz** *Zu jeder differenzierbaren 1-Parametergruppe Φ in $L(V)$ existiert ein eindeutig bestimmter Operator A in $L(V)$, genannt ihr infinitesimaler Generator, so dass*

$$\Phi^t = \mathrm{e}^{At}. \qquad ⋊$$

⟨⟨⟨⟨⟨ Da Φ differenzierbar ist, können wir eine Abbildung $A\colon V \to V$ in jedem Punkt $x \in V$ definieren durch

$$A(x) := \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Phi^t x \bigg|_{t=0}.$$

Diese Abbildung ist linear, da Φ^t für jedes t linear ist. Zum Beispiel ist

$$A(x+y) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Phi^t(x+y)\bigg|_0 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Phi^t x\bigg|_0 + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Phi^t y\bigg|_0 = A(x) + A(y).$$

Wir schreiben daher einfacher Ax.

Wir zeigen, dass $\Phi^t x_0$ das Anfangswertproblem $\dot{x} = Ax$, $x(0) = x_0$ löst. Offensichtlich ist $\Phi^0 x_0 = x_0$. Ferner gilt aufgrund der Gruppenstruktur von Φ und der Definition von A

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Phi^t x_0 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\Phi^{s+t} x_0\bigg|_{s=0} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\Phi^s(\Phi^t x_0)\bigg|_{s=0} = A\Phi^t x_0.$$

Aufgrund der Eindeutigkeit der Lösung [5] dieses Anfangswertproblems gilt also

$$\Phi^t x_0 = \mathrm{e}^{At} x_0.$$

Da dies für alle $x_0 \in V$ gilt, ist $\Phi^t = \mathrm{e}^{At}$. ⟩⟩⟩⟩⟩

Damit existiert ein eineindeutiger Zusammenhang

$$A \in L(V) \quad \rightsquigarrow \quad \text{differenzierbare 1-Parametergruppe } \Phi^t \text{ in } L(V).$$

Diesen werden wir im nächsten Kapitel auf n-dimensionale *nichtlineare* Differenzialgleichungen verallgemeinern.

▪ Fundamentallösung

Etwas allgemeiner und flexibler als das Exponenzial e^{At} ist der Begriff einer *Fundamentallösung*. Hierfür nehmen wir nun an, dass V endliche Dimension hat.

7 **Definition** *Sei $n = \dim V$. Dann heißt jedes System $\varphi_1, .., \varphi_n$ von n linear unabhängigen Lösungen von $\dot{x} = Ax$ eine Fundamentallösung dieser Differenzialgleichung.* ⋊

Dabei genügt es zu verlangen, dass diese Lösungen nur in *einem* Zeitpunkt linear unabhängig sind:

8 **Lemma** *Sind die Lösungen $\varphi_1, .., \varphi_n$ von $\dot{x} = Ax$ zu einem Zeitpunkt t_0 linear unabhängig, so sind sie es auch zu jedem anderem Zeitpunkt t.* ⋊

⟨⟨⟨⟨⟨ Sind die $\varphi_1, .., \varphi_n$ bei t_0 linear abhängig, so verschwindet dort eine nichttriviale Linearkombination aus ihnen. Diese stellt eine Lösung von $\dot{x} = Ax$ mit Wert 0 bei t_0 dar. Aufgrund der Eindeutigkeit aller Lösungen ist diese *identisch* 0. Also sind die $\varphi_1, .., \varphi_n$ zu jedem Zeitpunkt t linear abhängig. ⟩⟩⟩⟩⟩

9 **Satz** *Jede Lösung von $\dot{x} = Ax$ ist Linearkombination der Lösungen eines beliebigen Fundamentalsystems $\varphi_1, .., \varphi_n$.* ⋊

⟨⟨⟨⟨⟨ Jede Lösung φ ist eindeutig durch ihren Anfangswert bei $t = 0$ bestimmt. Dieser lässt sich als Linearkombination aus $\varphi_1(0), .., \varphi_n(0)$ darstellen:

$$\varphi(0) = a_1\varphi_1(0) + .. + a_n\varphi_n(0).$$

Aus Eindeutigkeitsgründen gilt dann auch $\varphi(t) = a_1\varphi_1(t) + .. + a_n\varphi_n(t)$ zu jedem anderen Zeitpunkt t. ⟩⟩⟩⟩⟩

▪ Koordinatentransformationen

Bis hierhin betrachteten wir die lineare Differenzialgleichung

$$\dot{x} = Ax \tag{1}$$

ohne Bezug zu konkreten Koordinaten. Erst wenn wir eine Basis $v_1, .., v_n$ und damit Koordinaten $x = x_1 v_1 + .. + x_n v_n$ in einem endlich-dimensionalen Vektorraum V auszeichnen, wird A durch eine $n \times n$-Matrix (A_{ij}) dargestellt. Gleichung (1) geht dann über in ein System

$$\dot{x}_i = \sum_{j=1}^{n} A_{ij} x_j, \qquad 1 \leqslant i \leqslant n,$$

von, wie man sagt, *n homogenen linearen Differenzialgleichungen erster Ordnung mit konstanten reellen Koeffizienten*.

Bei Wahl einer anderen Basis erhalten wir eine andere solche Darstellung. Da ein solcher linearer Isomorphismus

$$T : V \to V, \quad x = Ty$$

differenzierbare Kurven in ebensolche abbildet, gilt für deren Ableitung

$$T\dot{y} = (Ty)^{\cdot} = \dot{x} = Ax = ATy.$$

Somit geht (1) über in die lineare Differenzialgleichung

$$\dot{y} = By \tag{2}$$

mit der zu A ähnlichen Matrix

$$B = T^{-1}AT.$$

Jede Lösung von (2) geht dann unter T über in eine Lösung von (1). Kennen wir das sogenannte *Phasenportrait* von (2), also die Gesamtheit aller Lösungen der Differenzialgleichung, so kennen wir bis auf einen linearen Isomorphismus auch das Phasenportrait von (1).

Bemerkung Die allgemeine Lösung von (2) ist

$$y(t) = e^{Bt}y_0.$$

Mit $x_0 = Ty_0$ ist die allgemeine Lösung von (1) dann

$$x(t) = Te^{Bt}T^{-1}x_0 = e^{TBT^{-1}t}x_0 = e^{At}x_0,$$

wie es sich gehört. ⊸

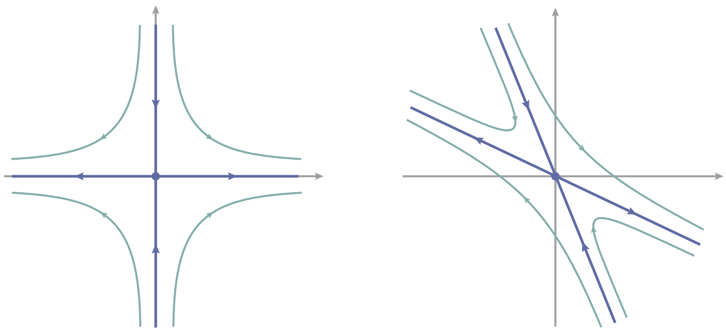
Die Differenzialgleichung (1) versteht man am leichtesten, wenn man diese in Koordinaten betrachtet, in denen sie eine besonders einfache Form annimmt. Dies wird hier die sogenannte SN-Zerlegung sein – eine einfachere Version der jordanschen Normalform –, die wir in Abschnitt 5 betrachten. Zunächst betrachten wir den besonders übersichtlichen, aber wichtigen Spezialfall zweidimensionaler Systeme.

16.3 Zweidimensionale lineare Systeme

Das Phasenportrait zweidimensionaler linearer Differenzialgleichungen wird fast ausschließlich durch die beiden Eigenwerte des linearen Operators bestimmt. Im Wesentlichen kommt es darauf an, ob diese (i) reell und einfach, (ii) reell und doppelt, oder (iii) komplex konjugiert sind. Im Fall doppelter Eigenwerte ist noch zu unterscheiden, ob A diagonalisierbar ist oder nicht.

Der Nullpunkt ist immer ein *Gleichgewichtspunkt* jeder linearen Differenzialgleichung. Das heißt, die konstante Kurve $t \mapsto 0$ ist immer eine Lösung. Uns interessiert auch noch die Frage, welche anderen Lösungen für $t \to \infty$ oder $t \to -\infty$ gegen diesen Gleichgewichtspunkt konvergieren.

Abb 1 Sattelpunkt in angepassten und allgemeinen Koordinaten



Einfache reelle Eigenwerte

In diesem Fall ist A ein Diagonaloperator. In geeigneten Koordinaten ist

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$$

mit den beiden Eigenwerten λ und μ. Die allgemeine Lösung von $\dot{x} = Ax$ lautet

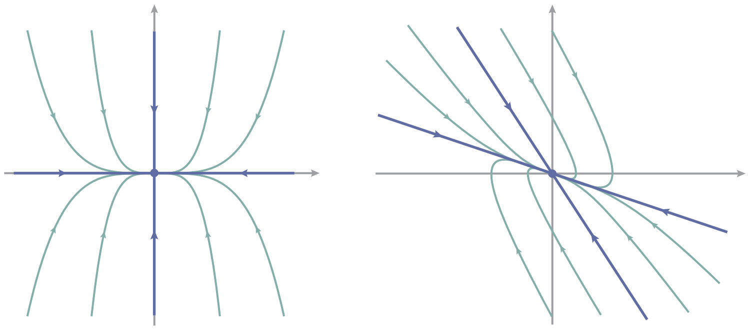
$$x(t) = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{\lambda t} & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{\mu t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \qquad a, b \in \mathbb{R}. \tag{3}$$

Das *Phasenportrait* – das ist die Gesamtheit der Lösungen – hängt nun von der Lage der Eigenwerte auf der reellen Achse ab. Gilt $\lambda\mu < 0$, so spricht man von einem *Sattel*. Es gibt je eine Richtung, die Abszisse und die Ordinate, in denen die Lösungen für $t \to \infty$ respektive $t \to -\infty$ gegen den Gleichgewichtspunkt 0 konvergieren. Alle anderen Lösungen sind unbeschränkt. In allgemeinen Koordinaten gilt daher folgender Satz.

10 **Sattel** *Hat A die reellen Eigenwerte $\mu < 0 < \lambda$, so konvergieren die Lösungen im μ-Eigenraum für $t \to \infty$ und im λ-Eigenraum für $t \to -\infty$ gegen den Gleichgewichtspunkt 0. Alle anderen Lösungen sind für $t \to \pm\infty$ unbeschränkt.* ⋊

Sind beide Eigenwerte negativ, so spricht man von einem *stabilen Knoten*. Alle Lösungen konvergieren für $t \to +\infty$ gegen den Gleichgewichtspunkt 0, wobei für $\mu < \lambda < 0$ alle Lösungen außerhalb des μ-Eigenraumes tangential zum λ-Eigenraum gegen den Gleichgewichtspunkt konvergieren. Dies ist auch das Bild in allgemeinen Koordinaten.

Abb 2 Stabiler Knoten in angepassten und allgemeinen Koordinaten



11 **Stabiler Knoten** *Hat A die reellen Eigenwerte $\mu < \lambda < 0$, so konvergieren alle Lösungen für $t \to \infty$ gegen den Gleichgewichtspunkt 0, wobei außerhalb des μ-Eigenraumes alle Lösungen tangential zum λ-Eigenraum konvergieren.* ⋊

Sind beide Eigenwerte positiv, so spricht man von einem *instabilen Knoten*. Es gelten analoge Konvergenzaussagen, wenn man $t \to -\infty$ statt $t \to \infty$ betrachtet.

Der Fall $\mu < 0 = \lambda$ ist in Abbildung 3 skizziert.

▪ Doppelte Eigenwerte

Diesen Fall nennt man *entartet*. Man sieht dem Operator sofort an, ob er diagonalisierbar ist oder nicht.

12 **Lemma** *Sei A ein zweidimensionaler Operator mit doppelten Eigenwert. Ist A diagonalisierbar, so hat A in jeder Basis Diagonalgestalt.* ⋊

⟨⟨⟨⟨ In diesem Fall existiert ein T mit

Abb 3 Eigenwerte $\mu < 0 = \lambda$

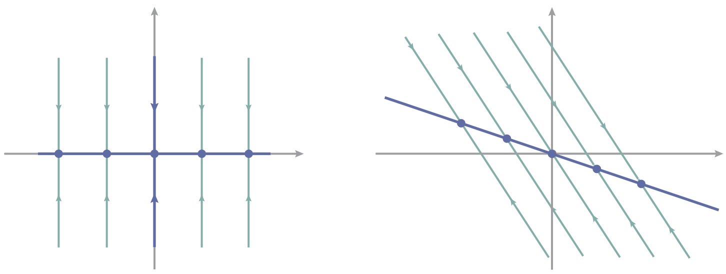
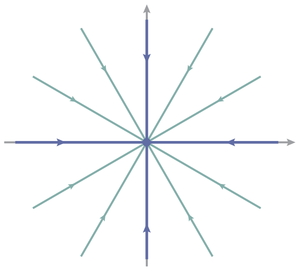


Abb 4 Entarteter stabiler Knoten, diagonalisierbar



$$T^{-1}AT = \operatorname{diag}(\lambda, \lambda) = \lambda I.$$

Dann ist aber auch $A = T\lambda I T^{-1} = \lambda T T^{-1} = \lambda I$. Mit anderen Worten, A ist ein Vielfaches der Identität, und diese hat Diagonalgestalt in jeder Basis. ⟫⟫⟫

A ist ein Diagonaloperator Für $\lambda < 0$ spricht man von einem *entarteten stabilen Knoten*. Alle Lösungen konvergieren gegen den Gleichgewichtspunkt 0, und sämtliche Lösungskurven sind Geraden – siehe Abbildung 4. Entsprechendes gilt für $\lambda > 0$, dem *entarteten instabilen Knoten*.

A ist ein Jordanblock In geeigneten Koordinaten ist

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \lambda I + N, \qquad N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Da I und N kommutieren und N^2 verschwindet, ist

$$\mathrm{e}^{tA} = \mathrm{e}^{t\lambda I}\mathrm{e}^{tN} = \mathrm{e}^{\lambda t}(I + Nt) = \mathrm{e}^{\lambda t}\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Die allgemeine Lösung ist damit

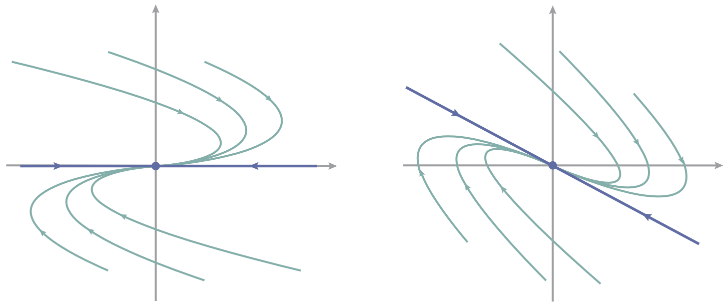
$$x(t) = \mathrm{e}^{\lambda t}\begin{pmatrix} a + bt \\ b \end{pmatrix}, \qquad a, b \in \mathbb{R}. \tag{4}$$

Alle Lösungskurven sind dabei im Gleichgewichtspunkt tangential an die Abszisse, also den eindimensionalen Eigenraum des doppelten Eigenwerts. Man spricht ebenfalls von einem *entarteten Knoten* – siehe Abbildung 5.

13 **Entarteter stabiler Knoten** *Hat A den doppelten reellen Eigenwerte $\lambda < 0$ und Diagonalgestalt, so konvergieren alle Lösungen für $t \to \infty$ aus allen Richtungen geradlinig gegen den Gleichgewichtspunkt 0. Hat A dagegen keine Diagonalgestalt, so konvergieren diese tangential zum eindimensionalen λ-Eigenraum gegen den Gleichgewichtspunkt 0.* ⋊

16.12

Abb 5 Entarteter stabiler Knoten, nicht diagonalisierbar



Für $\lambda > 0$ gilt Entsprechendes für $t \to -\infty$. Der Fall eines nichtdiagonalisierbaren Operators mit doppeltem Eigenwert 0 ist in Abbildung 6 skizziert.

Die verschiedenen Knoten kann man somit geometrisch anhand der Anzahl der asymptotischen Richtungen ihrer Lösungskurven unterscheiden. Diese ist

$$\begin{array}{ccl} 2 & \text{für} & \lambda \neq \mu, \\ \infty & \text{für} & \lambda = \mu,\ A = \lambda I, \\ 1 & \text{für} & \lambda = \mu,\ A \neq \lambda I. \end{array}$$

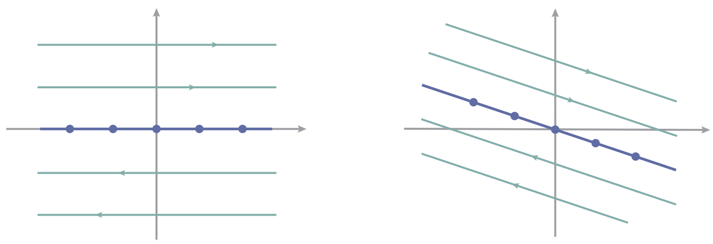
Die Anzahl 2 gilt im Prinzip auch für den Sattel, nur dass hier fast alle Lösungen weder für $t \to \infty$ noch für $t \to -\infty$ konvergieren.

▪ Komplexe Eigenwerte

Ein zweidimensionaler reeller Operator mit nicht-reellen Eigenwerten kann in folgende *reelle Normalform* gebracht werden.

14 **Lemma** *Hat der zweidimensionale Operator A komplexe Eigenwerte $\alpha \pm \mathrm{i}\omega$ mit $\omega \neq 0$, so ist in geeigneten Koordinaten*

Abb 6 Entarteter Knoten mit Eigenwert 0



$$A = \begin{pmatrix} \alpha & -\omega \\ \omega & \alpha \end{pmatrix} = \alpha I + \omega J, \qquad J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad ⋊$$

⟨⟨⟨⟨ Zum Eigenwert $\alpha + \mathrm{i}\omega$ existiert ein komplexer Eigenvektor $v + \mathrm{i}u$ mit

$$A(v + \mathrm{i}u) = (\alpha + \mathrm{i}\omega)(v + \mathrm{i}u) = (\alpha v - \omega u) + \mathrm{i}(\alpha u + \omega v).$$

Somit gilt

$$Au = \alpha u + \omega v, \qquad Av = -\omega u + \alpha v.$$

In der reellen Basis (v, u) – in dieser Reihenfolge – erhält A damit die angegebene Gestalt. ⟩⟩⟩⟩

Da I und J kommutieren, gilt in diesen Koordinaten A-9

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{At} &= \mathrm{e}^{\alpha It + \omega Jt} \\ &= \mathrm{e}^{\alpha It}\mathrm{e}^{\omega Jt} = \mathrm{e}^{\alpha t}\begin{pmatrix} \cos\omega t & -\sin\omega t \\ \sin\omega t & \cos\omega t \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Diese Abbildung beschreibt eine Streckung um den Faktor $\mathrm{e}^{\alpha t}$ und eine Drehung um den Winkel ωt im mathematischen Sinn – also gegen den Uhrzeigersinn für $\omega t > 0$. Es handelt sich also um eine *Drehstreckung*. Da diese beiden Operationen kommutieren, muss deren Reihenfolge nicht spezifiziert werden.

15 **Strudel und Zentrum** *Hat A die nichtreellen Eigenwerte $\alpha \pm \mathrm{i}\omega$, so ist die 1-Parametergruppe e^{At} eine Familie von Drehstreckungen mit dem Faktor $\mathrm{e}^{\alpha t}$ und dem Winkel ωt. Man spricht von einem Zentrum, falls $\alpha = 0$, und einem stabilen oder instabilen Strudel, falls $\alpha < 0$ respektive $\alpha > 0$.* ⋊

In einem stabilen Strudel konvergieren alle Lösungen gegen den Gleichgewichtspunkt, *ohne* eine asymptotische Richtung anzustreben. Dies unterscheidet ihn vom stabilen Knoten.

Abb 7 Stabiler Strudel in angepassten und allgemeinen Koordinaten

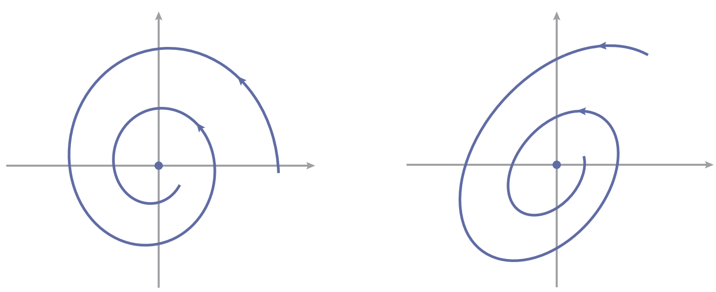
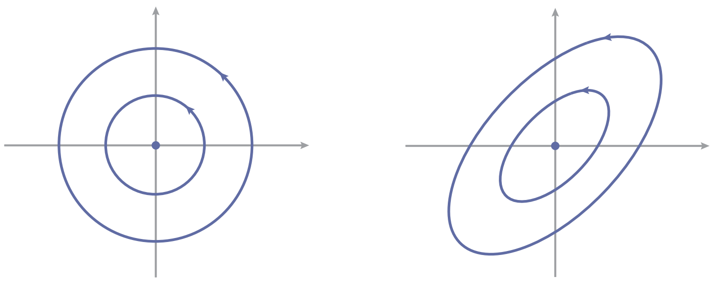


Abb 8 Zentrum in angepassten und allgemeinen Koordinaten



Das Zentrum ist unter den zweidimensionalen linearen Systemen das *einzige* mit nichttrivialen periodischen Lösungen. Außerdem haben alle Lösungen *dieselbe Periode*

$$T = \frac{2\pi}{\omega}.$$

Dies ist charakteristisch für *lineare* Systeme. In nichtlinearen Systemen wie dem mathematischen Pendel variiert dagegen die Periode periodischer Lösungen mit deren Amplitude.

Klassifikation zweidimensionaler Systeme

Wir klassifizieren die zweidimensionalen Systeme anhand ihrer Determinante und Spur. Mit

$$s = \operatorname{sp} A, \qquad d = \det A$$

ist das charakteristische Polynom eines zweidimensionalen Operators A

$$p(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \lambda^2 - s\lambda + d,$$

wie man anhand einer beliebigen Matrixdarstellung verifiziert. Seine Eigenwerte sind somit

$$\lambda_\pm = \frac{1}{2}(s \pm \sqrt{s^2 - 4d}).$$

Die eben diskutierten Fälle korrespondieren dann mit dem Vorzeichen der Diskriminante

$$\Delta \coloneqq s^2 - 4d$$

und dem Vorzeichen der Determinante:

$$\begin{aligned} &\det A < 0 && \rightsquigarrow \text{ Sattel,}\\ &\det A \geqslant 0 &&\\ &\quad \wedge\ \Delta > 0 && \rightsquigarrow \text{ Knoten,}\\ &\quad\ \Delta = 0 && \rightsquigarrow \text{ entarteter Knoten,}\\ &\quad\ \Delta < 0 && \rightsquigarrow \text{ Strudel oder Zentrum.} \end{aligned}$$

Im Fall $\det A \geqslant 0$ bestimmt das Vorzeichen der Spur von A die Stabilität des Gleichgewichtspunktes:

$$\begin{aligned} &\det A \geqslant 0 &&\\ &\quad \wedge\ \operatorname{sp} A < 0 && \rightsquigarrow \text{ stabil,}\\ &\quad\ \operatorname{sp} A > 0 && \rightsquigarrow \text{ instabil.} \end{aligned}$$

Abbildung 9 zeigt diese Fälle in einem Spur-Determinante-Diagramm, zusammen mit der zugehörigen Konfiguration der beiden Eigenwerte. Die Kurve

$$\Delta = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \det A = (\operatorname{sp} A)^2/4$$

ist eine Parabel, die Knoten und Sattel von Strudeln und Zentren trennt. Sie ist der Ort der entarteten Knoten, wobei deren Typ – diagonalisierbar oder nicht – nicht von Spur und Determinante ablesbar ist.

Die Fälle

$$\begin{aligned} \det A = 0 &\quad \rightsquigarrow \quad A \text{ singulär,}\\ \Delta = 0 &\quad \rightsquigarrow \quad \text{doppelte Eigenwerte,}\\ \operatorname{sp} A = 0 &\quad \rightsquigarrow \quad \text{Fluss flächentreu} \end{aligned}$$

sind ›untypisch‹ und treten in einem ›allgemeinen‹ System nicht auf.

▪ Der harmonische Oszillator mit Dämpfung

16.16

Als Beispiel betrachten wir den harmonischen Oszillator mit Dämpfung. Er wird durch die Gleichung

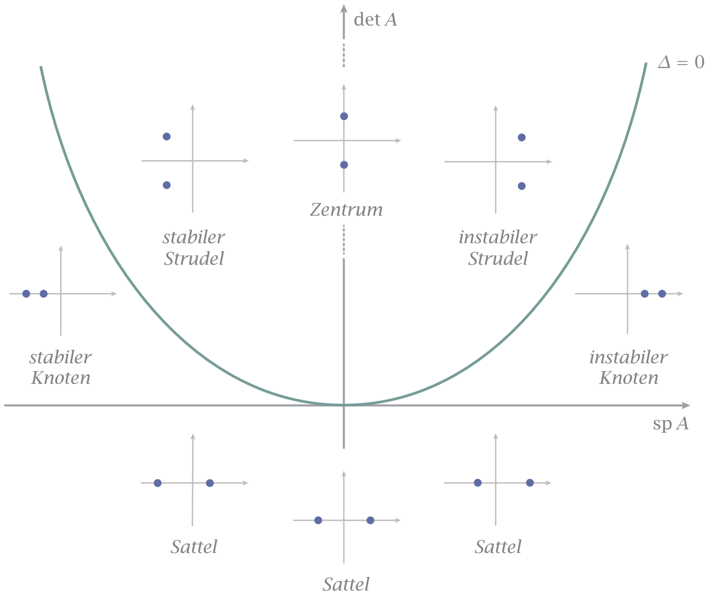
$$\ddot{u} = -\omega^2 u - \rho \dot{u}$$

beschrieben. Hierbei ist $\omega > 0$ die Frequenz des ungedämpften Oszillators und $\rho \geqslant 0$ der Reibungskoeffizient der Dämpfung. Diese ist proportional zur Geschwindigkeit $\dot{u}$ und wirkt dieser entgegengesetzt.

Setzen wir

$$u = x_1, \qquad \dot{u} = x_2,$$

Abb 9 Spur-Determinante-Diagramm



so ist die Gleichung äquivalent zum System

$$\dot{x} = Ax, \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & -\rho \end{pmatrix}.$$

Es ist also

$$\operatorname{sp} A = -\rho \leqslant 0, \qquad \det A = \omega^2 > 0, \qquad \Delta = \rho^2 - 4\omega^2.$$

Insbesondere ist

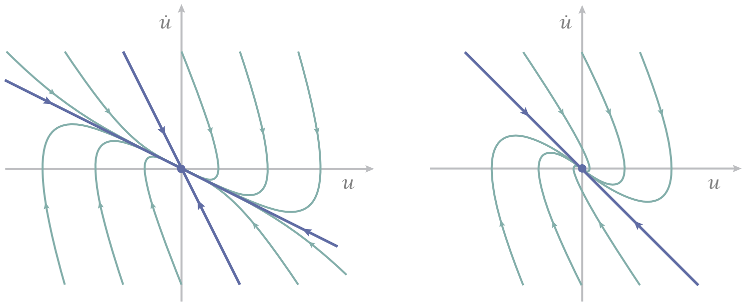
$$\Delta = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \rho = 2\omega.$$

Betrachten wir die Frequenz ω als fest und den Reibungskoeffizienten ρ als Parameter, so erhalten wir eine Familie von Operatoren $A = A(\rho)$, die im Spur-Determinante-Diagramm eine horizontale Halbgerade beschreiben, die die Parabel $\Delta = 0$ im Punkt $(-2\omega, \omega)$ schneidet und im Punkt $(0, \omega)$ endet. Dabei treten vier Fälle auf.

Stabiler Knoten für $\rho > 2\omega$ Fast alle Lösungen konvergieren gegen die Gleichgewichtslage in der Richtung des Eigenraumes des größeren der beiden negativen Eigenwerte, wobei sie höchstens einmal die Richtung wechseln (Abbildung 10 links).

16.17

Abb 10 Stark gedämpfter Oszillator: stabiler und entarteter Knoten



Entarteter stabiler Knoten für $\rho = 2\omega$ Da A *kein* Diagonaloperator ist, konvergieren alle Lösungen in der Richtung des eindimensionalen Eigenraumes von A gegen 0. Dieser wird von dem Vektor $(1, -1)^\top$ aufgespannt (Abbildung 10 rechts).

Stabiler Strudel für $0 < \rho < 2\omega$ Man spricht von *gedämpften Schwingungen*. Der Oszillator schwingt mit immer kleineren Ausschlägen unendlich oft um die Gleichgewichtslage (Abbildung 11 zeigt Lösungen für *verschiedene* ρ).

Zentrum für $\rho = 0$ Man spricht von *ungedämpften Schwingungen*. Alle Lösungen sind periodisch mit Frequenz ω und Periode $T = 2\pi/\omega$.

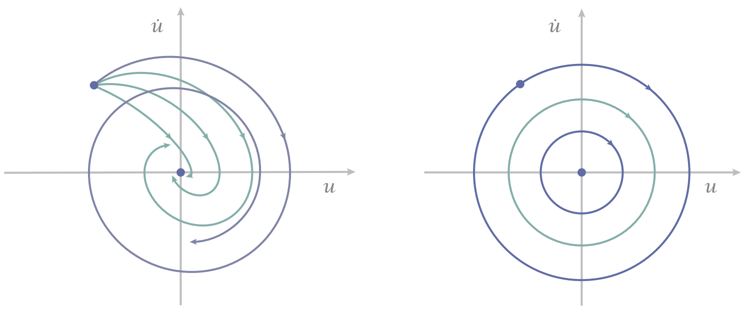
Im Fall der gedämpften Schwingung sind die Eigenwerte $\alpha \pm \mu i$ mit

$$\alpha = -\rho/2, \qquad \mu = \sqrt{\omega^2 - \rho^2/4}.$$

Für die Auslenkung u des Oszillators erhält man somit

$$u(t) = a e^{\alpha t} \cos \mu t + b e^{\alpha t} \sin \mu t, \qquad a, b \in \mathbb{R}.$$

Abb 11 Gedämpfte und ungedämpfte Schwingungen: Strudel und Zentrum



16.18

Mit $r^2 = a^2 + b^2$ und trigonometrischen Identitäten erhält dies die Form

$$u(t) = r\mathrm{e}^{\alpha t}\cos(\mu t + \tau)$$

mit der Amplitude r und der Phase τ als Parameter.

Man nennt μ die *reduzierte Frequenz* des gedämpften Oszillators. Für die zugehörige Periode gilt

$$T = \frac{2\pi}{\mu} \to \begin{cases} \infty, & \rho \nearrow 2\omega, \\ \dfrac{2\pi}{\omega}, & \rho \searrow 0. \end{cases}$$

16.4
Diagonalisierbare Gleichungen

Wir betrachten nun $\dot{x} = Ax$ in einem endlich-dimensionalen Vektorraum. Am einfachsten ist die Situation, wenn A in einer geeigneten Basis Diagonalgestalt annimmt, oder, wie man sagt, *im Reellen diagonalisert kann*. Dies ist immer dann der Fall, wenn alle Eigenwerte von A reell und verschieden sind, oder allgemeiner, wenn A bezüglich eines Skalarproduktes *symmetrisch* ist.

▪ Reelle Diagonalisierbarkeit

16 **Satz aus der linearen Algebra** *Sind alle Eigenwerte von $A \in L(V)$ reell und einfach, so besitzt der Vektorraum V eine Basis aus Eigenvektoren von A. In dieser nimmt A Diagonalgestalt an. Dasselbe gilt, wenn A symmetrisch bezüglich eines Skalarproduktes ist.* ⋊

Für reelle wie auch komplexe Eigenwerte gilt nun Folgendes, wenn wir die reelle Differenzialgleichung $\dot{x} = Ax$ ›im Komplexen‹ betrachten.

17 **Lemma** *Ist v Eigenvektor von $A \in L(V)$ zum Eigenwert λ, so ist $\mathrm{e}^{\lambda t}v$ eine Lösung der linearen Differenzialgleichung $\dot{x} = Ax$.* ⋊

⟨⟨⟨⟨⟨ Wegen $Av = \lambda v$ gilt ja für jedes t

$$(\mathrm{e}^{\lambda t}v)^{\cdot} = \mathrm{e}^{\lambda t}\lambda v = \mathrm{e}^{\lambda t}Av = A(\mathrm{e}^{\lambda t}v).$$ ⟩⟩⟩⟩⟩

Geometrisch betrachtet spannt der Eigenvektor v einen unter A invarianten eindimensionalen Unterraum von V auf, auf dem sich die Differenzialgleichung auf $\dot{x} = \lambda x$ reduziert. Ist λ reell, so ist dies ein eindimensionaler reeller Unterraum. Ist λ komplex, so entspricht dem ein zweidimensionaler reeller Unterraum, wie wir gleich zeigen werden.

Ist nun $v_1, .., v_n$ eine Basis aus Eigenvektoren von A zu den reellen Eigenwerten $\lambda_1, .., \lambda_n$, so bilden die Kurven

$$\varphi_k(t) = \mathrm{e}^{\lambda_k t} v_k, \qquad 1 \leqslant k \leqslant n, \tag{5}$$

ein Fundamentalsystem von Lösungen zu $\dot{x} = Ax$. Da sich jede andere Lösung daraus linear kombinieren lässt $_9$, erhalten wir folgenden

18 **Satz** *Besitzt V eine Basis aus reellen Eigenvektoren $v_1, .., v_n$ von A mit Eigenwerten $\lambda_1, .., \lambda_n$, so bilden die Kurven* (5) *ein Fundamentalsystem von $\dot{x} = Ax$. Die allgemeine Lösung ist somit*

$$\varphi(t) = \sum_{k=1}^{n} c_k \mathrm{e}^{\lambda_k t} v_k, \qquad c_k \in \mathbb{R}. \quad \rtimes \tag{6}$$

Die allgemeine Lösung ist somit die Überlagerung der n Exponenziallösungen auf den durch die einzelnen Eigenvektoren aufgespannten eindimensionalen invarianten Unterräumen. Dies wird auch als *Superpositionsprinzip* bezeichnet. Beispiele sind der Sattel und die Knoten aus Abschnitt 3.

Unter den Voraussetzungen des Satzes existiert auch eine Koordinatentransformation T, so dass

$$T^{-1}AT = D = \operatorname{diag}(\lambda_1, .., \lambda_n).$$

Wegen $AT = TD$ bestehen die Spalten der Matrixdarstellung von T aus den Eigenvektoren von A. Die allgemeine Lösung von $\dot{x} = Ax$ ist damit

$$\varphi(t) = T\mathrm{e}^{Dt} c, \qquad c = (c_1, .., c_n)^\top \in \mathbb{R}^n.$$

Dies ist nur eine andere Schreibweise für (6).

19 **Korollar** *Sind alle Eigenwerte von A einfach und negativ, so gilt*

$$\lim_{t \to \infty} \varphi(t) = 0$$

für jede Lösung von $\dot{x} = Ax$. $\rtimes$

Diesen Satz werden wir später wesentlich verallgemeinern $_{28}$.

▪ Diagonalisierbarkeit im Komplexen

Besitzt A einen *komplexen* Eigenwert λ mit notwendigerweise komplexem Eigenvektor w, so ist $\mathrm{e}^{\lambda t} w$ eine komplexe Lösung von $\dot{x} = Ax$ $_{17}$. Ihr Real- und Imaginärteil ergeben dann zwei linear unabhängige reelle Lösungen.

20 **Lemma** *Ist $w = v + \mathrm{i}u$ ein komplexer Eigenvektor von A zum komplexen Eigenwert $\lambda = \alpha + \mathrm{i}\omega$, $\omega \neq 0$, so bilden*

$$v\,\mathrm{e}^{\alpha t}\cos\omega t - u\,\mathrm{e}^{\alpha t}\sin\omega t,$$
$$v\,\mathrm{e}^{\alpha t}\sin\omega t + u\,\mathrm{e}^{\alpha t}\cos\omega t,$$

zwei linear unabhängige Lösungen von $\dot{x} = Ax$. ⋊

⟪⟪⟪ Mit $\mathrm{e}^{\lambda t}w$ ist auch die komplex konjugierte Kurve eine Lösung, da die Gleichung reell ist. Aufgrund ihrer Linearität sind dann auch der Real- und Imaginärteil von

$$\mathrm{e}^{\lambda t}w = \mathrm{e}^{\alpha t}(\cos\omega t + \mathrm{i}\sin\omega t)(v + \mathrm{i}u)$$

eine Lösung, was gerade die Behauptung ergibt. Die Vektoren u und v sind linear unabhängig, da es andernfalls auch einen reellen Eigenvektor zu λ gäbe und damit λ selbst reell wäre. ⟫⟫⟫

Wie wir bereits bei den zweidimensionalen Systemen gesehen haben $_{14}$, spannen die Vektoren v und u einen unter A invarianten, zweidimensionalen Unterraum von V auf, auf dem A die Matrixdarstellung

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & -\omega \\ \omega & \alpha \end{pmatrix}$$

erhält. Dieser Unterraum wird also von einem Strudel oder Zentrum ausgefüllt, je nachdem, ob $\alpha \neq 0$ oder $\alpha = 0$.

Der zu λ konjugierte Eigenwert $\bar{\lambda} = \alpha - \mathrm{i}\omega$ mit Eigenvektor $\bar{w} = v - \mathrm{i}u$ definiert übrigens denselben Unterraum und dieselbe Dynamik, allerdings mit entgegengesetzter Orientierung.

21 **Satz aus der linearen Algebra** *Sind alle Eigenwerte*

$$\lambda_1, .., \lambda_r,\ \alpha_{r+1} \pm \mathrm{i}\omega_{r+1}, .., \alpha_m \pm \mathrm{i}\omega_m$$

von A einfach mit mit Eigenvektoren v_k respektive $w_k = v_k + \mathrm{i}u_k$, so bilden die Vektoren

$$v_1, .., v_r,\ u_{r+1}, v_{r+1}, .., u_m, v_m$$

eine reelle Basis des Vektorraums V. In dieser erhält der Operator die Blockdiagonalgestalt

$$A = \operatorname{diag}(\lambda_1, .., \lambda_r, \Lambda_{r+1}, .., \Lambda_m)$$

mit

$$\Lambda_k = \begin{pmatrix} \alpha_k & -\omega_k \\ \omega_k & \alpha_k \end{pmatrix}, \qquad r < k \leqslant m.$$

Dasselbe gilt, wenn A normal bezüglich eines Skalarproduktes ist. ⋊

Bilden wir zu den reellen Eigenvektoren die Exponenziallösungen und zu den komplexen die Lösungen des vorangehenden Lemmas 20, so gelangen wir wieder zu einem Fundamentalsystem für $\dot{x} = Ax$. Damit gelangen wir zu folgendem

22 **Satz** *Ist $A \in L(V)$ im Komplexen diagonalisierbar mit Eigenwerten*

$$\lambda_1, .., \lambda_r, \; \alpha_{r+1} \pm \mathrm{i}\omega_{r+1}, .., \alpha_m \pm \mathrm{i}\omega_m$$

und Eigenvektoren v_k respektive $w_k = v_k + \mathrm{i}u_k$, so bilden die Kurven

$$\mathrm{e}^{\lambda_k t} v_k, \qquad 1 \leqslant k \leqslant r,$$

sowie

$$\begin{aligned} &v_k \,\mathrm{e}^{\alpha_k t} \cos \omega_k t - u_k \,\mathrm{e}^{\alpha_k t} \sin \omega_k t, \\ &v_k \,\mathrm{e}^{\alpha_k t} \sin \omega_k t + u_k \,\mathrm{e}^{\alpha_k t} \cos \omega_k t, \end{aligned} \qquad r+1 \leqslant k \leqslant m,$$

ein Fundamentalsystem zu $\dot{x} = Ax$. Jede Linearkombination aus diesen Kurven ergibt somit eine Lösung dieser Differenzialgleichung. ⋊

Die allgemeine Lösung ist damit die ungestörte Überlagerung der Exponenziallösungen zu den reellen Eigenwerten, und der Strudel- oder Zentrumslösungen zu Paaren komplexer Eigenwerte. Damit lassen sich qualitativ die Lösungen fast aller drei- und vierdimensionalen linearen Differenzialgleichungen beschreiben.

▷ *Beispiel* Betrachte $\dot{x} = Ax$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Die Eigenwerte sind 1 und $2 \pm 3\mathrm{i}$, Eigenvektoren sind beispielsweise

$$\begin{aligned} w &= (-10, 3, 1), \\ v + \mathrm{i}u &= (0, -\mathrm{i}, 1) = (0, 0, 1) + \mathrm{i}(0, -1, 0). \end{aligned}$$

Die allgemeine Lösung lautet damit

$$\begin{aligned} \varphi(t) = a\mathrm{e}^t w & \\ &+ \mathrm{e}^{2t}(b \sin 3t + c \cos 3t)\, v \\ &+ \mathrm{e}^{2t}(b \cos 3t - c \sin 3t)\, u \end{aligned}$$

mit reellen Parametern a, b, c. Schreiben wir noch $b = r\cos\tau$ und $c = r\sin\tau$ mit $r^2 = b^2 + c^2$, so wird dies zu

$$\varphi(t) = a\mathrm{e}^t w + r\mathrm{e}^{2t} \sin(3t + \tau)\, v + r\mathrm{e}^{2t} \cos(3t + \tau)\, u.$$

In der reellen Basis w, v, u erhält A durch

$$x = Ty, \qquad T = \begin{pmatrix} -10 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

die Blockdiagonalgestalt

$$T^{-1}AT = B = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 2 & -3 \\ & 3 & 2 \end{pmatrix},$$

und es ist

$$\mathrm{e}^{tB} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{t} & & \\ & \mathrm{e}^{2t}\cos 3t & -\mathrm{e}^{2t}\sin 3t \\ & \mathrm{e}^{2t}\sin 3t & \mathrm{e}^{2t}\cos 3t \end{pmatrix}. \quad \triangleleft$$

16.5 Allgemeine Gleichungen

Wir betrachten nun den allgemeinen Fall eines nicht diagonalisierbaren Operators A. Aus der linearen Algebra ist bekannt, dass A im Komplexen in eine Blockdiagonalgestalt $\operatorname{diag}(J_1, .., J_m)$ gebracht werden kann, die auf der Diagonalen aus elementaren Jordanblöcken besteht. Die Gestalt dieser *jordanschen Normalform* ist dabei bis auf die Anordnung der einzelnen Jordanblöcke eindeutig. Für unsere Zwecke ist diese Normalform allerdings zu detailliert. Es reicht die Existenz einer Zerlegung eines beliebigen Operators in einen halbeinfachen und einen nilpotenten Anteil.

23 **Satz über die SN-Zerlegung** *Jeder Operator $A \in L(V)$ besitzt im Komplexen eine eindeutige Zerlegung in zwei Operatoren $A = S + N$ mit folgenden Eigenschaften:*

(i) *S ist im Komplexen diagonalisierbar,*
(ii) *N ist nilpotent, und*
(iii) *S und N kommutieren: $SN = NS$.* ⋊

Wir geben hier nur eine Skizze des Beweises. Ausgangspunkt ist der folgende Spektralzerlegungssatz. Dabei heißt eine Teilmenge von $\mathbb{C}$ *invariant unter komplexer Konjugation*, wenn sie mit jedem Element auch dessen komplex Konjugiertes enthält.

24 **Reller Spektralzerlegungssatz** *Sei $\sigma = \sigma_1 \cup .. \cup \sigma_m$ eine Zerlegung des Spektrums σ von $A \in L(V)$ in disjunkte, unter komplexer Konjugation invariante Teilmengen. Dann existiert eine unter A invariante Zerlegung $V = V_1 \oplus .. \oplus V_m$ des Vektorraumes V derart, dass*

$$\sigma(A \,|\, V_k) = \sigma_k, \qquad 1 \leqslant k \leqslant m.$$

Dabei ist die Dimension von V_k gleich der Summe der Vielfachheiten der in σ_k enthaltenen Eigenwerte. Bezüglich dieser Zerlegung besitzt A die Blockdiagonalgestalt

$$A = \operatorname{diag}(A_1, .., A_m) \tag{7}$$

mit $A_k \coloneqq A \,|\, V_k$ für $1 \leqslant k \leqslant m$. ⋊

⟨⟨⟨⟨ *Beweisskizze zur SN-Zerlegung* Der Einfachheit halber seien alle Eigenwerte von A reell. Andernfalls betrachtet man zuerst A auf der Komplexifizierung von V und leitet aus der entsprechenden komplexen SN-Zerlegung die behauptete reelle Zerlegung ab. Die Details findet man zum Beispiel in Hirsch-Smale, Kapitel 6.

Seien $\lambda_1, .., \lambda_r$ die *verschiedenen* reellen Eigenwerte von A. Dann 24 existiert eine Zerlegung $V = V_1 \oplus .. \oplus V_r$ derart, dass

$$\sigma(A_k) = \{\lambda_k\}, \qquad A_k \coloneqq A \,|\, V_k, \qquad k = 1, .., r.$$

Wir setzen dann

$$S_k \coloneqq \lambda_k I, \qquad N_k \coloneqq A_k - S_k.$$

Dann ist S_k halbeinfach und $A_k = S_k + N_k$. Ferner ist N_k nilpotent, da

$$\sigma(N_k) = \sigma(A_k - \lambda_k I) = \{0\}.$$

Mit $S = S_1 \oplus .. \oplus S_m$ und $N = N_1 \oplus .. \oplus N_m$ erhalten wir dann eine SN-Zerlegung von A mit den gewünschten Eigenschaften.

Bleibt die Eindeutigkeit zu zeigen. Da S und N mit $A = S + N$ kommutieren, sind die Unterräume V_k auch unter S und N invariant. Also gilt

$$S_k \coloneqq S \,|\, V_k : \; V_k \to V_k, \qquad N_k \coloneqq N \,|\, V_k : \; V_k \to V_k,$$

sowie $A_k = S_k + N_k$. Wir behaupten, dass S_k auf V_k identisch ist mit $S_k' \coloneqq \lambda_k I$. Setzen wir dazu $N_k' = A_k - S_k'$, so ist $S_k' + N_k' = A_k = S_k + N_k$ und damit

$$S_k - S_k' = N_k' - N_k.$$

Hierbei ist $S_k - S_k'$ halbeinfach, da jede Ähnlichkeitstransformation $S_k' = \lambda_k I$ unverändert lässt. Ferner ist N_k' nilpotent, da das Spektrum von N_k' nur die 0

enthält. Schließlich kommutieren N_k und N_k', da N_k mit A_k und der Identität kommutiert. Aus der binomischen Formel für $(N_k' - N_k)^m$ mit m hinreichend groß folgt, dass dann auch $N_k' - N_k$ nilpotent ist.

Also ist $S_k - S_k'$ halbeinfach und nilpotent. Diese Eigenschaft hat aber nur der Nulloperator. Es ist also $S_k = S_k'$, und weiter $N_k' = N_k$. Da dies für jedes k gilt, ist die Eindeutigkeit der SN-Zerlegung gezeigt. ⟫⟫⟫

Bemerkung Die jordansche Normalform geht über die SN-Zerlegung hinaus, indem sie noch eine Aussage über die Normalform nilpotenter Operatoren macht. ⊸

25 **Lemma** *Ist $A = S + N$ eine SN-Zerlegung von A mit $N^{m+1} = 0$, so gilt*

$$\mathrm{e}^A = \mathrm{e}^S \left(1 + N + .. + \frac{1}{m!} N^m\right). \qquad ⋊$$

⟪⟪⟪ Da S und N kommutieren, gilt $\mathrm{e}^A = \mathrm{e}^{S+N} = \mathrm{e}^S \mathrm{e}^N$. Wegen $N^{m+1} = 0$ bricht die Exponenzialreihe von e^N spätestens nach dem m-ten Term ab. ⟫⟫⟫

Um die Gestalt der allgemeinen Lösung von $\dot{x} = Ax$ zu bestimmen, genügt es nun, jede Komponente $A_k = S_k + N_k$ der Zerlegung (7) einzeln zu betrachten. Bezeichnet ν_k die Vielfachheit des k-ten Eigenwerts, so ist $N_k^{\nu_k} = 0$. Im reellen Fall folgt dies aus $\dim V_k = \nu_k$, im komplexen Fall aus der Tatsache, dass V_k aus der Reellifizierung zweier komplexer Unterräume der Dimension ν_k entsteht. Aufgrund des letzten Lemmas treten daher in $\mathrm{e}^{A_k t}$ nur Polynome vom Grad kleiner ν_k auf.

Wir formulieren den reellen und komplexen Fall wieder getrennt. Ein *Quasipolynom* ist ein Produkt aus einer Exponenzialfunktion und einem Polynom.

26 **Reeller Fall** *Der Operator $A \in L(V)$ habe nur reelle Eigenwerte $\lambda_1, .., \lambda_m$ mit Vielfachheiten $\nu_1, .., \nu_m$. Dann ist in einer beliebigen Basis jede Komponente einer Lösung von $\dot{x} = Ax$ eine Linearkombination aus Quasipolynomen*

$$p_k(t)\mathrm{e}^{\lambda_k t}, \qquad 1 \leqslant k \leqslant m,$$

wobei $\operatorname{grad} p_k < \nu_k$ *für alle k.* ⋊

Bemerkungen *a.* Sind alle Eigenwerte einfach, so ist $\nu_k = 1$ für alle k. Somit ist $k = n$, alle Polynome p_k sind konstant, und wir erhalten wieder den Satz für einfache reelle Eigenwerte 18.

b. Der maximale Grad von p_k kann kleiner als $\nu_k - 1$ sein. Dies hängt von der Jordanschen Normalform von A ab. Beispielsweise sind alle p_k konstant genau dann, wenn A halbeinfach ist. ⊸

27 **Allgemeiner Fall** *Der Operator $A \in L(V)$ habe die Eigenwerte*

$$\lambda_1, .., \lambda_r, \; \alpha_{r+1} \pm \mathrm{i}\omega_{r+1}, .., \alpha_m \pm \mathrm{i}\omega_m$$

mit Vielfachheiten $\nu_1, .., \nu_m$. Dann ist in einer beliebigen Basis jede Komponente einer Lösung von $\dot{x} = Ax$ eine Linearkombination aus den Quasipolynomen

$$p_k(t)\mathrm{e}^{\lambda_k t}, \qquad 1 \leqslant k \leqslant r,$$

und den Funktionen

$$p_k(t)\mathrm{e}^{\alpha_k t}\cos\omega_k t, \quad q_k(t)\mathrm{e}^{\alpha_k t}\sin\omega_k t, \qquad r < k \leqslant m,$$

wobei $\operatorname{grad} p_k, \operatorname{grad} q_k < \nu_k$ *für alle* k. ⋊

Man beachte, dass im Unterschied zu den Ergebnissen für halbeinfache Operatoren *nicht jede* Linearkombination aus den genannten Funktionen eine Lösung darstellt.

■ Schlussfolgerungen

28 **Satz** *Das Spektrum von A liegt in der linken komplexen Halbebene genau dann, wenn*

$$\lim_{t\to\infty} \varphi(t) = 0$$

für jede Lösung φ von $\dot{x} = Ax$. ⋊

⟨⟨⟨⟨⟨ $\Rightarrow$ Für ein Produkt r aus einem Polynom und einer trigonometrischen Funktion und $\alpha < 0$ gilt

$$\lim_{t\to\infty} \mathrm{e}^{\alpha t} r(t) = 0.$$

Da jede Komponente einer Lösung φ von $\dot{x} = Ax$ aufgrund des letzten Satzes aus einer Linearkombination solcher Funktionen besteht, gilt daher auch $\lim_{t\to\infty} \varphi(t) = 0$.

$\Leftarrow$ Dies zeigen wir indirekt. Existiert wenigstens ein reeller oder komplexer Eigenwert $\lambda = \alpha + \mathrm{i}\omega$ mit $\alpha \geqslant 0$, so existiert dazu auch wenigstens ein reeller oder komplexer Eigenvektor v und damit eine reelle oder komplexe Lösung $\varphi(t) = \mathrm{e}^{\lambda t} v$ dieser Differenzialgleichung. Ihr Real- oder Imaginärteil liefert eine reelle Lösung φ, die für $t \to \infty$ *nicht* gegen Null konvergiert. ⟩⟩⟩⟩⟩

29 **Satz** *Das Spektrum von A liegt in der rechten komplexen Halbebene genau dann, wenn*

$$\lim_{t\to\infty} |\varphi(t)| = \infty$$

für jede Lösung φ von $\dot{x} = Ax$ außer der Gleichgewichtslösung. Es liegt auf der imaginären Achse genau dann, wenn

$$\lim_{t\to\pm\infty} \frac{1}{t} \log|\varphi(t)| = 0$$

für jede Lösung φ von $\dot{x} = Ax$ außer der Gleichgewichtslösung. ⋊

⟪⟪ Dies sei als Übung überlassen. ⟫⟫