

17

Gewöhnliche Differenzialgleichungen

Wir betrachten nun allgemeine gewöhnliche Differenzialgleichungen erster Ordnung in endlich-dimensionalen Räumen von der Form

$$\dot{x} = v(x).$$

Anders als im Fall linearer Differenzialgleichungen gibt es hier in den meisten Fällen keine Darstellung von Lösungen mittels eines Exponentials oder Ähnlichem, und sogar ihre Existenz oder Eindeutigkeit sind meist nicht evident.

Man benötigt daher allgemeine Existenz- und Eindeutigkeitssätze. Für die Existenz reicht schon die Stetigkeit der rechten Seite, und für die Eindeutigkeit deren lokale Lipschitzstetigkeit. Diese zieht dann auch die stetige Abhängigkeit der Lösungen von den Anfangswerten nach sich.

17.1

Vektorfelder und Differenzialgleichungen

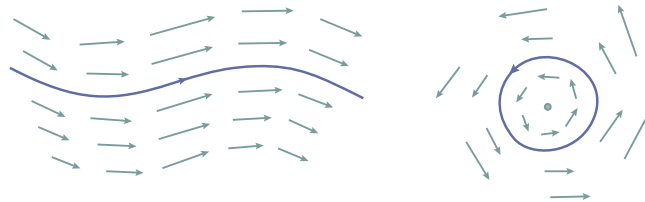
Sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum.

Definition Ein *Vektorfeld* auf einem Gebiet $\Omega \subset V$ ist eine Abbildung

$$v : \Omega \rightarrow V, \quad x \mapsto v(x). \quad \times$$

Ein Vektorfeld weist also jeden Punkt x im Definitionsbereich $\Omega \subset V$ einen Vektor $v(x)$ in *demselden* Vektorraum V zu. Daher definiert ein solches Feld eine *gewöhnliche Differenzialgleichung* auf Ω .

Abb 1 Zwei Vektorfelder und zwei Lösungskurven



Definition Ist $v: \Omega \rightarrow V$ ein Vektorfeld auf einem Gebiet $\Omega \subset V$, so heißt

$$\dot{x} = v(x), \quad x \in \Omega, \quad (1)$$

eine *gewöhnliche, autonome Differenzialgleichung erster Ordnung* auf Ω . Eine *Lösung* dieser Differenzialgleichung ist eine stetig differenzierbare Kurve $\varphi: I \rightarrow \Omega$ derart, dass

$$\dot{\varphi}(t) = v(\varphi(t)), \quad t \in I. \quad \times$$

Geometrisch bedeutet dies, dass der Geschwindigkeitsvektor der Kurve φ in jedem Punkt mit dem dortigen Vektor des Vektorfeldes v übereinstimmt. Die Menge Ω selbst bezeichnet man in diesem Zusammenhang auch als *Phasen-* oder *Konfigurationsraum* der Differenzialgleichung.

Bemerkungen a. Jede differenzierbare Lösung ist auch *stetig* differenzierbar, da die Ableitung ja die Differenzialgleichung erfüllt.

b. Die Differenzialgleichung (1) heißt *gewöhnlich*, da ihre Lösungen φ Funktionen *einer* Variable t sind, die üblicherweise als Zeit interpretiert wird. Auf der anderen Seite stehen die *partiellen* Differenzialgleichungen, die Funktionen mehrerer Variablen und deren partielle Ableitungen betreffen. Sie heißt von *erster Ordnung*, da nur die erste Ableitung nach t involviert ist. Und sie heißt *autonom*, da das Vektorfeld v nicht explizit von t abhängt.

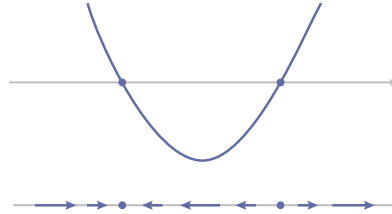
c. Im Standardfall des $\mathbb{R}^n$ ist (1) äquivalent zu einem System

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= v_1(x_1, \dots, x_n), \\ \dot{x}_2 &= v_2(x_1, \dots, x_n), \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= v_n(x_1, \dots, x_n), \end{aligned}$$

von n im Allgemeinen gekoppelten, nichtlinearen Differenzialgleichungen. $\rightarrow$

Abb 2

Eine skalare Funktion
interpretiert als
Vektorfeld



► A. Jede reelle Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definiert eine skalare Differenzialgleichung $\dot{x} = f(x)$ auf ihrem Definitionsbereich Abb 2 . Das Polynom $f(x) = x^2$ zum Beispiel definiert die Differenzialgleichung

$$\dot{x} = x^2, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Ihre allgemeine Lösung ist gegeben durch

$$\varphi(t) = \frac{a}{1 - at}$$

mit $a \in \mathbb{R}$ und $at \neq 1$ – siehe Kapitel 12.

B. Ein linearer Operator $A \in L(V)$ definiert ein lineares Vektorfeld auf V , nämlich $A: x \mapsto Ax$. Die zugehörige Differenzialgleichung ist

$$\dot{x} = Ax, \quad x \in V.$$

Ihre allgemeine Lösung ist, wie wir gesehen haben, gegeben durch

$$\varphi(t) = e^{At}x_0, \quad x_0 \in V. \quad \blacktriangleleft$$

■ Weitere Differenzialgleichungen

Wir beschränken uns hier auf *autonome* Differenzialgleichungen *erster* Ordnung. Für die Frage der Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen beispielsweise ist dies jedoch keine wesentliche Einschränkung, da sich andere Typen von Differenzialgleichungen in diese Form bringen lassen. Wir geben drei Beispiele, das allgemeine Vorgehen ergibt sich daraus.

► A. In Kapitel 12 haben wir nichtautonome Differenzialgleichungen

$$\dot{x} = f(t, x)$$

in einer Variablen betrachtet. Führen wir die Zeit als zusätzliche Koordinate x_0 ein und setzen $x_1 = x$, so ist dies äquivalent zu dem autonomen System

$$\dot{x}_0 = 1,$$

$$\dot{x}_1 = f(x_0, x_1).$$

B. Eine skalare Differenzialgleichung höherer Ordnung wird zu einem System von Differenzialgleichungen erster Ordnung, indem man die höheren Ableitungen als zusätzliche Koordinaten einführt. So ist

$$\ddot{x} + a\dot{x} + b\dot{x} = f(x)$$

mit $x_1 = x$, $x_2 = \dot{x}$ und $x_3 = \ddot{x}$ äquivalent zu dem System

$$\dot{x}_1 = x_2,$$

$$\dot{x}_2 = x_3,$$

$$\dot{x}_3 = f(x_1) - bx_2 - ax_3.$$

C. Hängt ein Vektorfeld von Parametern ab, so kann man auch diese als zusätzliche Koordinaten einführen. So ist

$$\dot{x} = f(x, \lambda)$$

mit $x_1 = x$, $x_2 = \lambda$ äquivalent zu dem System

$$\dot{x}_1 = f(x_1, x_2),$$

$$\dot{x}_2 = 0.$$

Damit werden Sätze über die Abhängigkeit von Lösungen von Parametern auf solche über die Abhängigkeit von Lösungen von Anfangswerten zurückgeführt. ◀

■ Anfangswertprobleme

Bereits die Lösungen von elementaren Differenzialgleichungen sind nicht eindeutig, solange keine weiteren Daten vorgegeben werden. Dasselbe gilt natürlich auch hier. Eindeutigkeit kann man nur für *Anfangswertprobleme* erwarten.

Definition Unter einem zu einem Vektorfeld v auf Ω gehörenden *Anfangswertproblem* – kurz *Awps* – versteht man das System

$$\dot{x} = v(x), \quad x(t_0) = x_0$$

mit einem $x_0 \in \Omega$. Eine *lokale Lösung* des Awps ist eine Lösung $\varphi: I_0 \rightarrow \Omega$ dieser Differenzialgleichung mit $t_0 \in I_0$ und $\varphi(t_0) = x_0$. ✕

- 1 ▶ A. Die Lösung von $\dot{x} = ax$, $x(0) = x_0$ auf der reellen Geraden ist

$$\varphi(t) = e^{at} x_0.$$

Sie existiert für alle $t \in \mathbb{R}$.

B. Die Lösung von $\dot{x} = x^2$, $x(0) = x_0$ ist

$$\varphi(t) = \frac{x_0}{1 - x_0 t}.$$

Ist $x_0 \neq 0$, so ist diese für $t \rightarrow 1/x_0$ unbeschränkt und daher nicht für alle t definiert. Es gibt also keine *globale* Lösung.

C. Ist x_0 ein *kritischer Punkt* des Vektorfeldes ν , das heißt,

$$\nu(x_0) = 0,$$

so besitzt das zugehörige Awp immer die für alle t erklärte triviale Lösung

$$\varphi(t) \equiv x_0.$$

Diese wird auch als *Gleichgewichtslösung* bezeichnet, der Punkt x_0 selbst als *Gleichgewichtspunkt*.

D. Das lineare Awp $\dot{x} = Ax$, $x(0) = x_0$ besitzt die Lösung

$$\varphi(t) = e^{At} x_0.$$

Der Nullpunkt ist hier immer ein Gleichgewichtspunkt. ◀

Die Wahl des Anfangszeitpunktes t_0 ist bei *autonomen* Differenzialgleichungen unerheblich. Denn ist φ eine Lösung von $\dot{x} = \nu(x)$, so ist auch

$$\dot{\varphi}(t - t_0) = \nu(\varphi(t - t_0)).$$

Die zeitliche verschobene Kurve ist also ebenfalls eine Lösung, und wir können erreichen, dass $t_0 = 0$.

Für nichtlineare Anfangswertprobleme lässt sich nur in wenigen Fällen eine Lösung explizit angeben. Man kann sogar beweisen, dass Lösungen in den meisten Fällen nicht durch ›geschlossene Ausdrücke‹ dargestellt werden können. Man benötigt daher allgemeine *Existenzsätze*. Sehr allgemein ist der

- 2 **Existenzsatz von Peano** Ist das Vektorfeld ν stetig, so besitzt jedes zugehörige Anfangswertproblem wenigstens eine lokale Lösung. ✕

Diese Lösungskurve muss allerdings nicht eindeutig sein. So besitzt

$$\dot{x} = x^{2/3}, \quad x(0) = 0$$

unendlich viele Lösungen_{17.7}.

Wir benötigen diesen Satz im Folgenden nicht. Daher skizzieren wir einen Beweis in einer Übungsaufgabe_{A-7}. Im übernächsten Abschnitt beweisen wir einen Existenz- und Eindeigkeitssatz, der wesentlich wichtiger ist.

17.2

Einige Hilfssätze

Für den allgemeinen Existenz- und Eindeigkeitssatz benötigen wir einige technische Hilfsmittel, die auch für sich von Interesse sind. Die Norm auf dem Vektorraum V sei im Folgenden $\|\cdot\|$.

■ Lipschitzstetige Vektorfelder

Definition Ein Vektorfeld v auf einem Gebiet $\Omega \subset V$ heißt *lokal lipschitzstetig*, wenn zu jedem Punkt in Ω eine Umgebung $U \subset \Omega$ und ein $L \geq 0$ existiert, so dass v auf U L -lipschitzstetig ist. $\times$

► A. Lineare Vektorfelder $x \mapsto Ax$ sind *global lipschitzstetig*, denn

$$\|Ax - Ay\| = \|A(x - y)\| \leq \|A\| \|x - y\|, \quad x, y \in V.$$

B. Jedes C^1 -Vektorfeld auf einem Gebiet ist lokal lipschitz aufgrund des Schrankensatzes 14.17.

C. Das Vektorfeld $x \mapsto x^{2/3}$ ist im Punkt $0 \in \mathbb{R}$ *nicht* lokal lipschitz. ◀

3 **Lemma K** Ist v auf dem Gebiet Ω lokal lipschitz, so ist v auf jeder kompakten Teilmenge $K \subset \Omega$ *gleichmäßig lipschitz*. $\times$

◀◀◀ Sei $K \subset \Omega$ kompakt. Wäre v nicht gleichmäßig lipschitz auf K , so existierten zu jedem $n \geq 1$ Punkte $x_n \neq y_n$ in K derart, dass

$$\|v(x_n) - v(y_n)\| \geq n \|x_n - y_n\|.$$

Also ist

$$\|x_n - y_n\| \leq \frac{2}{n} \sup_{x \in K} \|v(x)\| \leq \frac{2M}{n}, \quad n \geq 1,$$

denn $\|v\|$ ist auf K stetig und daher beschränkt.

Da K kompakt ist, besitzt die Folge (x_n) eine konvergente Teilfolge mit Grenzwert $p \in K$. Die entsprechende Teilfolge von (y_n) konvergiert dann wegen der vorangehenden Abschätzung ebenfalls gegen p . Da aber v in einer Umgebung von p lipschitz ist, ergibt sich für hinreichend große n ein Widerspruch zur Wahl von x_n und y_n . $\gggg$

Die Lösungskurven eines Vektorfeldes können dessen Definitionsbereich verlassen – sie können sogar in endlicher Zeit unbeschränkt werden. Um diese Komplikation zu umgehen, betrachten wir zunächst Vektorfelder, die auf dem gesamten Raum definiert und gleichmäßig lipschitz sind. Gegebenenfalls kann

man dies durch eine *lipschitzstetige Fortsetzung* erreichen. — Wir betrachten zuerst den Fall einer skalaren Funktion.

- 4 **Lemma L** Sei $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ L -lipschitz auf einer nichtleeren abgeschlossenen Teilmenge M von V . Dann existiert eine Fortsetzung $\phi: V \rightarrow \mathbb{R}$ von f mit derselben Lipschitzkonstante L . ✕

⟨⟨⟨ Nach Voraussetzung gilt

$$|f(u) - f(v)| \leq L \|u - v\|, \quad u, v \in M. \quad (2)$$

Fixieren wir irgendein u_0 in M , so gilt für jedes $x \in V$ und $u \in M$ aufgrund der Dreiecksungleichung die obere Abschätzung

$$\begin{aligned} f(u) - L \|x - u\| &\leq f(u_0) + |f(u) - f(u_0)| - L \|x - u\| \\ &\leq f(u_0) + L \|u - u_0\| - L \|x - u\| \\ &\leq f(u_0) + L \|x - u_0\|. \end{aligned}$$

Die linke Seite ist somit für alle $u \in M$ gleichmäßig beschränkt und damit

$$\phi: V \rightarrow \mathbb{R}, \quad \phi(x) := \sup_{u \in M} (f(u) - L \|x - u\|)$$

wohldefiniert.

Aus (2) folgt andererseits $f(v) \geq f(u) - L \|v - u\|$ und deshalb

$$\sup_{u \in M} (f(u) - L \|v - u\|) = f(v), \quad v \in M.$$

Also ist $\phi = f$ auf M und damit ϕ eine Fortsetzung von f auf ganz V .

Nun gilt für jedes $y \in V$

$$\phi(x) \geq f(u) - L \|y - u\| - L \|x - y\|, \quad u \in M.$$

Also gilt dies auch für das Supremum über $u \in M$ und deshalb

$$\phi(x) \geq \phi(y) - L \|x - y\|.$$

Dasselbe gilt mit den Rollen von x und y vertauscht, so dass wir insgesamt

$$|\phi(x) - \phi(y)| \leq L \|x - y\|$$

erhalten. Somit ist ϕ L -lipschitz auf V . ⟩⟩⟩

- 5 **Korollar** Jedes lipschitzstetige Vektorfeld auf einer kompakten Menge in V besitzt eine lipschitzstetige Fortsetzung auf ganz V . ✕

⟨⟨⟨ Wähle eine beliebige Basis in V , und setze jede einzelne Komponentenfunktion mit dem vorangehenden Lemma auf ganz V fort. Die Behauptung für die daraus resultierende Fortsetzung des gesamten Vektorfeldes folgt, weil alle Normen in V äquivalent sind. ⟩⟩⟩

■ Das Lemma von Gronwall

Dieses Lemma spielt bei der Untersuchung von gewöhnlichen Differenzialgleichungen eine zentrale Rolle.

6 **Lemma von Gronwall** Ist $u: [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und gilt

$$u(t) \leq a + b \int_0^t u(s) \, ds, \quad 0 \leq t \leq T,$$

mit reellen Konstanten a und b , wobei $b \geq 0$, so gilt

$$u(t) \leq a e^{bt}, \quad 0 \leq t \leq T. \quad \times$$

⟨⟨⟨ Setze

$$v(t) := a + b \int_0^t u(s) \, ds, \quad 0 \leq t \leq T.$$

Dann ist v stetig differenzierbar und $u \leq v$ auf $[0, T]$ nach Voraussetzung. Wegen $b \geq 0$ gilt dann auch $v' = bu \leq bv$ und folglich

$$(v e^{-bt})' = (v' - bv) e^{-bt} \leq 0.$$

Die Funktion $v e^{-bt}$ ist also monoton fallend auf $[0, T]$ und daher

$$v(t) e^{-bt} \leq v(t) e^{-bt} \Big|_{t=0} = v(0) = a, \quad 0 \leq t \leq T.$$

Somit ist auch $u(t) \leq v(t) \leq a e^{bt}$. ⟩⟩⟩

Im Fall $a = 0$ erhalten wir folgendes

7 **Korollar** Ist $u: [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und gilt

$$0 \leq u(t) \leq b \int_0^t u(s) \, ds, \quad 0 \leq t \leq T,$$

mit einer reellen Zahl $b \geq 0$, so ist $u \equiv 0$. $\times$

■ Die Integralgleichung

Schließlich benötigen wir noch eine Umformulierung einer *Differenzialgleichung* für *differenzierbare* Kurven in eine *Integralgleichung* für *stetige* Kurven. Letztere ist analytisch wesentlich leichter zu handhaben. Insbesondere können wir hierauf den Banachschen Fixpunktsatz anwenden.

8 **Lemma I** Sei $v: \Omega \rightarrow V$ ein stetiges Vektorfeld auf einem Gebiet Ω . Dann ist $\varphi: I \rightarrow \Omega$ eine Lösung des Anfangswertproblems

$$\dot{x} = v(x), \quad x(0) = x_0$$

genau dann, wenn φ stetig ist und die *Integralgleichung*

$$\varphi(t) = x_0 + \int_0^t \nu(\varphi(s)) \, ds$$

für alle $t \in I$ erfüllt. $\times$

⟨⟨⟨ Ist φ Lösung des Awps, so folgt aus dem Hauptsatz 13.9

$$\begin{aligned} \varphi(t) - x_0 &= \varphi(t) - \varphi(0) \\ &= \int_0^t \dot{\varphi}(s) \, ds = \int_0^t \nu(\varphi(s)) \, ds. \end{aligned}$$

Gilt umgekehrt diese Gleichung für ein stetiges φ , so ist wiederum aufgrund des Hauptsatzes φ auch differenzierbar, und es ist

$$\dot{\varphi}(t) = \nu(\varphi(t)).$$

Außerdem ist offensichtlich $\varphi(0) = x_0$. $\rangle\rangle\rangle$

■ Banachscher Fixpunktsatz

Der letzte Hilfssatz ist tatsächlich ein fundamentales und mächtiges Werkzeug der Funktionalanalysis.

- 9 **Banachscher Fixpunktsatz** Sei E ein Banachraum, $X \subset E$ eine abgeschlossene Teilmenge, und $T: X \rightarrow X$ eine *Kontraktion* – das heißt, θ -Lipschitz mit $\theta < 1$. Dann besitzt T in X genau einen Fixpunkt. $\times$

⟨⟨⟨ *Eindeutigkeit:* Sind p und $\tilde{p}$ zwei Fixpunkte von T in X , so folgt

$$\|p - \tilde{p}\| = \|T(p) - T(\tilde{p})\| \leq \theta \|p - \tilde{p}\|,$$

also $(1 - \theta) \|p - \tilde{p}\| \leq 0$. Wegen $1 - \theta > 0$ impliziert dies $\|p - \tilde{p}\| = 0$. Also ist der Fixpunkt in X eindeutig.

Existenz: Wähle irgendeinen Punkt $x_0 \in X$ und setze

$$x_n = T^n(x_0), \quad n \geq 1,$$

wobei T^n die n -fache Anwendung des Operators T bezeichnet. Mit Induktion folgt $x_n \in X$ für alle $n \geq 0$ sowie

$$\|x_{n+1} - x_n\| \leq \theta \|x_n - x_{n-1}\| \leq \theta^n \|x_1 - x_0\|, \quad n \geq 0. \quad (3)$$

Für $m > n \geq 0$ folgt hieraus

$$\begin{aligned}
\|x_m - x_n\| &\leq \sum_{i=n}^{m-1} \|x_{i+1} - x_i\| \\
&\leq \sum_{i=n}^{\infty} \theta^i \|x_1 - x_0\| = \frac{\theta^n}{1-\theta} \|x_1 - x_0\|.
\end{aligned} \tag{4}$$

Somit bildet (x_n) eine Cauchyfolge in X . Aufgrund der Vollständigkeit von E besitzt diese Cauchyfolge einen Grenzwert $p \in E$, und aufgrund der Abgeschlossenheit von X gehört dieser ebenfalls zu X . Dieser Grenzwert ist ein Fixpunkt von T , denn (3) ist äquivalent mit

$$\|T(x_n) - x_n\| \leq \theta^n \|x_1 - x_0\|, \quad n \geq 0,$$

und mit $x_n \rightarrow p$ und der Stetigkeit von T erhalten wir $\|T(p) - p\| = 0$. Damit ist alles gezeigt. $\gggg$

Der Beweis des Banachschen Fixpunktsatzes liefert nicht nur die Existenz des Fixpunktes, sondern gleichzeitig auch ein schnell konvergierendes Konstruktionsverfahren einschließlich Fehlerabschätzung.

- 10 **Zusatz zum Banachschen Fixpunktsatz** Jede Folge $x_n = T^n(x_0)$ mit beliebigem Startwert $x_0 \in X$ konvergiert gegen den eindeutigen Fixpunkt p von T , und es gilt

$$\|x_n - p\| \leq \frac{\theta^n}{1-\theta} \|x_1 - x_0\|. \quad \times$$

《《《 Dies folgt aus (4) mit $m \rightarrow \infty$ und $x_m \rightarrow p$. $\gggg$

17.3

Der Existenz- und Eindeutigkeitssatz

Wir wollen die Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen des Awps

$$\dot{x} = v(x), \quad x(0) = x_0$$

für lipschitzstetige Vektorfelder v zeigen. Wie so oft, ist die Eindeutigkeit der leichtere Teil. Daher erledigen wir dies zuerst.

- 11 **Satz** Ist $v: V \hookrightarrow V$ lipschitzstetig, so ist jede Lösung des obigen Anfangswertproblems auf ihrem Existenzintervall eindeutig. $\times$

《《《 Seien φ, ψ zwei auf demselben Intervall I um 0 definierte Lösungen desselben Awps. Dann erfüllen beide die zugehörige Integralgleichung von

Lemma I₈, so dass

$$(\varphi - \psi)(t) = \int_0^t [\nu(\varphi(s)) - \nu(\psi(s))] ds, \quad t \in I.$$

Für $t > 0$ folgt mit einer Lipschitzkonstanten L für ν die Abschätzung

$$\|(\varphi - \psi)(t)\| \leq \int_0^t \|\nu(\varphi(s)) - \nu(\psi(s))\| ds \leq L \int_0^t \|(\varphi - \psi)(s)\| ds.$$

Für die stetige Funktion $u(t) = \|(\varphi - \psi)(t)\|$ gilt somit

$$0 \leq u(t) \leq L \int_0^t u(s) ds.$$

Mit dem Korollar zum Lemma von Gronwall₇ folgt

$$\|(\varphi - \psi)(t)\| = 0, \quad t \in I \cap [0, \infty).$$

Für $t \in I \cap (-\infty, 0]$ gilt Entsprechendes. Also ist $\varphi = \psi$ auf I . $\gggg$

Für den Existenzbeweis gehen wir nun davon aus, dass das Vektorfeld ν auf ganz V erklärt und gleichmäßig lipschitzstetig ist. Dies vermeidet technische Komplikationen, da Lösungen in endlicher Zeit nicht unbeschränkt werden können. Den allgemeinen Fall führen wir später auf diesen zurück.

- 12 **Globaler Existenz- und Eindeutigkeitssatz** *Ist das Vektorfeld ν gleichmäßig lipschitz auf ganz V , so besitzt jedes Anfangswertproblem eine für alle Zeiten definierte eindeutige Lösung.* $\times$

$\llll$ Wir schreiben das zu lösende Awp als Integralgleichung₈

$$\varphi(t) = x_0 + \int_0^t \nu(\varphi(s)) ds, \quad t \in \mathbb{R},$$

für die Kurve φ . Diese fassen wir als Fixpunktgleichung eines Operators T auf einem Raum E stetiger Kurven auf.

Sei dazu L eine globale Lipschitzkonstante von ν und

$$E = \{\varphi \in C(\mathbb{R}, V) : \|\varphi\|_L < \infty\}$$

der Raum aller stetigen Kurven $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow V$ mit endlicher gewichteter Norm

$$\|\varphi\|_L := \sup_{t \in \mathbb{R}} \|\varphi(t)\| e^{-2L|t|}.$$

Eine Cauchyfolge in dieser Norm konvergiert gleichmäßig auf jedem beschränkten t -Intervall I . Daher bildet E mit dieser Norm einen Banachraum_{A-1}. Die Teilmenge aller solcher Kurven mit Anfangswert x_0 ,

$$X = \{\varphi \in E : \varphi(0) = x_0\},$$

ist abgeschlossen in E . Definieren wir den Operator T auf X durch

$$(T\varphi)(t) = x_0 + \int_0^t \nu(\varphi(s)) \, ds, \quad t \in \mathbb{R},$$

so ist φ eine Lösung des Awps genau dann, wenn $\varphi \in X$ und $T\varphi = \varphi$.

Wir zeigen die Existenz eines solchen Fixpunkts mithilfe des Banachschen Fixpunktsatzes 9. Zwei Dinge sind hierfür zu zeigen.

a. T ist wohldefiniert und bildet X in sich ab Offensichtlich ist $\psi = T\varphi$ eine stetige Kurve in V mit $\psi(0) = x_0$. Damit ψ auch wieder zu X gehört, müssen wir $\|\psi\|_L < \infty$ zeigen. — Nun ist

$$\begin{aligned} \|\psi(t) - x_0\| &\leq \int_0^{|t|} \|\nu(\varphi(s))\| \, ds \\ &\leq \int_0^{|t|} (\|\nu(\varphi(s)) - \nu(x_0)\| + \|\nu(x_0)\|) \, ds \\ &\leq \int_0^{|t|} (L \|\varphi(s) - x_0\| + \|\nu(x_0)\|) \, ds. \end{aligned}$$

Ferner ist $\|\varphi(s) - x_0\| \leq \|\varphi - x_0\|_L e^{2L|s|}$ aufgrund der Definition von $\|\cdot\|_L$. Zusammen mit der groben Abschätzung

$$\int_0^{|t|} L e^{2Ls} \, ds \leq e^{2L|t|}$$

erhalten wir

$$\|\psi(t) - x_0\| \leq \|\varphi - x_0\|_L e^{2L|t|} + |t| \|\nu(x_0)\|.$$

Also ist

$$\|\psi - x_0\|_L = \sup_{t \in \mathbb{R}} \|\psi(t) - x_0\| e^{-2L|t|} < \infty,$$

und damit $\psi \in X$.

b. T ist eine Kontraktion auf X Seien $\varphi, \psi \in X$. Aufgrund der Integralgleichung gilt dann

$$\begin{aligned} \|(T\varphi - T\psi)(t)\| &\leq \int_0^{|t|} \|\nu(\varphi(s)) - \nu(\psi(s))\| \, ds \\ &\leq \int_0^{|t|} L \|\varphi(s) - \psi(s)\| \, ds \\ &\leq \|\varphi - \psi\|_L \int_0^{|t|} L e^{2Ls} \, ds \\ &\leq \frac{1}{2} \|\varphi - \psi\|_L e^{2L|t|}. \end{aligned}$$

Also ist

$$\|T\varphi - T\psi\|_L = \sup_{t \in \mathbb{R}} \|(T\varphi - T\psi)(t)\| e^{-2L|t|} \leq \frac{1}{2} \|\varphi - \psi\|_L.$$

Somit ist $T: X \rightarrow X$ eine Kontraktion mit dem Faktor $1/2$.

Schluss Somit ist der Banachsche Fixpunktsatz ₉ anwendbar, und T besitzt einen eindeutigen Fixpunkt $\varphi \in X$. Dieser ist die gesuchte Lösung des Awps. Deren Eindeutigkeit hatten wir bereits gezeigt ₁₁. $\ggg$

Der Banachsche Fixpunktsatz liefert mit seinem Zusatz ₁₀ zugleich ein Verfahren zur *Konstruktion* eines Fixpunktes von T . Dieser ist Grenzwert der Folge $T^n \varphi_0$ zu einem beliebigen Startwert $\varphi_0 \in X$. Im Zusammenhang mit gewöhnlichen Differenzialgleichungen ist dies bekannt als das *Iterationsverfahren von Picard-Lindelöf*.

- 13 **Satz von Picard-Lindelöf** Sei ν ein lipschitzstetiges Vektorfeld auf V . Dann ist die eindeutige Lösung des Anfangswertproblems

$$\dot{x} = \nu(x), \quad x(0) = x_0,$$

der Limes der Folge von Kurven

$$\varphi_n = T^n \varphi_0, \quad n \geq 1,$$

mit $\varphi_0 \equiv x_0$ und

$$(T\varphi)(t) = x_0 + \int_0^t \nu(\varphi(s)) \, ds, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Diese Folge konvergiert gleichmäßig auf jedem kompakten Zeitintervall. $\times$

$\lll$ Der Zusatz zum Banachschen Fixpunktsatz ₁₀ sagt aus, dass für jeden beliebigen Startwert $\varphi_0 \in X$ die Folge $(T^n \varphi_0)_{n \geq 0}$ in der Norm des Banachraumes E gegen den Fixpunkt $\varphi \in X$ von T konvergiert. Ein solcher Startwert ist zum Beispiel die konstante Kurve $\varphi_0 \equiv x_0$, und Konvergenz in der Norm $\|\cdot\|_L$ impliziert gleichmäßige Konvergenz auf jedem kompakten t -Intervall. $\ggg$

$\blacktriangleright$ Jedes lineare Vektorfeld $A: x \mapsto Ax$ ist global lipschitzstetig, die vorangehenden Sätze sind also anwendbar. Wenden wir das Picard-Lindelöfsche Iterationsverfahren auf das zugehörige Awp an, so erhalten wir $\varphi_0(t) \equiv x_0$,

$$\begin{aligned} \varphi_1(t) &= x_0 + \int_0^t A\varphi_0(s) \, ds = x_0 + tAx_0, \\ \varphi_2(t) &= x_0 + \int_0^t A\varphi_1(s) \, ds = x_0 + tAx_0 + \frac{1}{2}t^2A^2x_0, \end{aligned}$$

und allgemein mit Induktion

$$\varphi_n(t) = \left(\sum_{k=0}^n \frac{t^k}{k!} A^k \right) x_0.$$

Im Limes erhält man die Lösung $\varphi(t) = e^{At}x_0$, wobei wir aufgrund des letzten Satzes bereits wissen, dass diese Reihe auf jedem kompakten t -Intervall gleichmäßig konvergiert. ◀

■ Der nichtautonome Fall

Die Beweise der letzten drei Sätze bleiben *unverändert* gültig, wenn das Vektorfeld zusätzlich stetig von der Zeit t abhängt. Lipschitzstetigkeit in t ist *nicht* erforderlich, wir müssen lediglich verlangen, dass die Lipschitzstetigkeit in der Ortsvariablen x gleichmäßig für alle t gilt.

- 14 **Zusatz** Der Existenz- und Eindeutigkeitsatz ₁₂ und der Satz von Picard-Lindelöf ₁₃ gelten ebenfalls für nichtautonome Vektorfelder

$$\nu : \mathbb{R} \times V \rightarrow V, \quad (t, x) \mapsto \nu(t, x),$$

die stetig in der Zeitvariable und gleichmäßig lipschitzstetig in der Ortsvariable in dem Sinne sind, dass es ein $L \geq 0$ gibt, so dass

$$\|\nu(t, x) - \nu(t, y)\| \leq L \|x - y\|$$

für alle $x, y \in V$ und $t \in \mathbb{R}$. ✕

■ Stetige Abhängigkeit

Bis jetzt haben wir die Lösungen eines Anfangswertproblems als individuelle Kurven betrachtet, also als Funktionen nur von t . Nun betrachten wir sie auch als Funktion des Anfangswerts x_0 . Dies machen wir sichtbar, indem wir $\varphi^t(x_0)$ oder $\varphi_{x_0}(t)$ für die Lösung zum Anfangswert x_0 schreiben. Die Integralgleichung ₈ lautet damit

$$\varphi^t(x_0) = x_0 + \int_0^t \nu(\varphi^s(x_0)) \, ds$$

für t im Existenzintervall der Kurve.

- 15 **Stetigkeitssatz** Sei ν ein L -lipschitzstetiges Vektorfeld auf ganz V . Für seine Lösungskurven gilt dann

$$\|\varphi^t(x) - \varphi^t(y)\| \leq e^{L|t|} \|x - y\|$$

für alle $t \in \mathbb{R}$ und alle $x, y \in V$. ✕

»»» Aus den Integralgleichungen für $\varphi^t(x)$ und $\varphi^t(y)$ folgt für $t \geq 0$

$$\begin{aligned} & \|\varphi^t(x) - \varphi^t(y)\| \\ & \leq \|x - y\| + \int_0^t \|\nu(\varphi^s(x)) - \nu(\varphi^s(y))\| ds \\ & \leq \|x - y\| + L \int_0^t \|\varphi^s(x) - \varphi^s(y)\| ds. \end{aligned}$$

Wenden wir das Lemma von Gronwall₆ auf $u(t) = \|\varphi^t(x) - \varphi^t(y)\|$ an, so erhalten wir die Behauptung für $t \geq 0$. Den Fall $t \leq 0$ führt man hierauf zurück. »»»

Bemerkungen *a.* Das exponentielle Anwachsen der oberen Schranke ist im Allgemeinen nicht zu verbessern. Für die Lösungen von $\dot{x} = ax$ auf $\mathbb{R}$ mit $a \neq 0$ gilt ja bereits

$$|\varphi^t(x_0) - \varphi^t(0)| = |e^{at}x_0 - e^{at}0| = e^{at}|x_0 - 0|.$$

Entsprechendes gilt, wenn man lineare Differenzialgleichungen $\dot{x} = Ax$ mit Diagonalmatrizen A betrachtet.

b. Fixieren wir die Anfangswerte von Lösungen und betrachten *beliebige* Zeitintervalle, so können noch so kleine Abstände exponentiell anwachsen. Dies ist der sogenannte *Effekt der empfindlichen Abhängigkeit von den Anfangswerten*, der in vielen Systemen beobachtet werden kann.

c. Fixieren wir dagegen ein *kompaktes* Zeitintervall $[a, b]$ um 0, so hängen die Lösungen *gleichmäßig* vom Anfangswert ab. Denn es gilt ja

$$\|\varphi_x - \varphi_y\|_{[a,b]} = \sup_{t \in [a,b]} \|\varphi_x(t) - \varphi_y(t)\| \leq M \|x - y\|$$

mit $M = e^{L(b-a)}$. Auf einem beschränkten Zeitintervall ist der Abstand verschiedener Lösungskurven also gleichmäßig klein, wenn nur ihre Anfangswerte hinreichend kleinen Abstand haben.

d. Mit der im Beweis des Existenzsatzes₁₂ eingeführten Norm $\|\varphi\|_L$ folgt aus dem Stetigkeitssatz auch

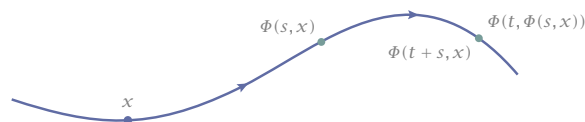
$$\|\varphi_x - \varphi_y\|_L \leq \|x - y\|,$$

Der Operator

$$I: V \rightarrow E, \quad x \mapsto \varphi_x,$$

der jedem Anfangswert in $x \in V$ seine entsprechende Lösungskurve $\varphi_x \in E$ zuordnet, ist also *lipschitzstetig* bezüglich $\|\cdot\|_L$. $\rightarrow$

Abb 3 Flusseigenschaft



17.4 Flüsse

Ist das Vektorfeld ν lipschitz auf V , so definieren alle seine – eindeutigen – Lösungskurven zu allen Anfangswerten zusammen eine Abbildung

$$\Phi: \mathbb{R} \times V \rightarrow V, \quad \Phi(t, x) = \varphi^t(x) = \varphi_x(t),$$

genannt der *Fluss* oder die *Flussabbildung* des Vektorfeldes. Aufgrund des Stetigkeitssatzes₁₅ ist sie stetig in x , und aufgrund der Konstruktion sogar differenzierbar in t . Außerdem gilt Folgendes.

16 Flusssatz Ist das Vektorfeld ν lipschitz auf V , so gilt für seine Flussabbildung

$$\Phi(0, x) = x,$$

$$\Phi(t + s, x) = \Phi(t, (\Phi(s, x)))$$

für alle $x \in V$ und alle $s, t \in \mathbb{R}$. $\times$

«» Da $\Phi(t, x)$ die Lösungskurve zum Anfangswert x bezeichnet, ist natürlich $\Phi(0, x) = x$ für alle x . Betrachten wir beide Seiten der zweiten Gleichung als Funktion von t bei festem s , so sind *beide* Lösungskurven desselben Vektorfeldes ν mit demselben Anfangswert $\Phi(s, x)$ bei $t = 0$. Denn es gilt ja

$$\frac{d}{dt} \Phi(t + s, x) = \nu(\Phi(t + s, x))$$

und

$$\frac{d}{dt} \Phi(t, \Phi(s, x)) = \nu(\Phi(t, \Phi(s, x))).$$

Aufgrund des Eindeutigkeitsatzes₁₁ stimmen beide Seiten somit überein. »»»

Die Gleichung

$$\Phi(t + s, x) = \Phi(t, (\Phi(s, x)))$$

bedeutet, dass es keinen Unterschied macht, ob ich vom Punkt x der Lösungskurve bis zum Zeitpunkt s folge und $\Phi(s, x)$ als Anfangswert einer weiteren Lösungskurve bis zum Zeitpunkt t wähle, oder ob ich gleich von x ›ohne Zwischenstop‹ bis zum Zeitpunkt $t + s$ fortschreite Abb 3.

■ Zeit- t -Abbildungen

Wir wechseln jetzt die Perspektive und betrachten die Flussabbildung nicht als Bündel von Lösungskurven, sondern als Familie von *Zeit- t -Abbildungen*

$$\Phi^t : V \rightarrow V, \quad x \mapsto \Phi^t(x) = \Phi(t, x).$$

Diese bildet also jeden Punkt $x \in V$ auf den Punkt $\varphi^t(x)$ der Lösungskurve mit Anfangswert x ab.

- 17 **Satz** Die Familie der Zeit- t -Abbildungen $(\Phi^t)_{t \in \mathbb{R}}$ eines lipschitzstetigen Vektorfeldes auf V bildet eine 1-Parametergruppe von Homöomorphismen von V . Das heißt, jedes Φ^t ist ein Homöomorphismus von V , und es gilt

$$\Phi^0 = id, \quad \Phi^{t+s} = \Phi^t \circ \Phi^s$$

für alle $t, s \in \mathbb{R}$. $\times$

⟨⟨⟨ Die Identitäten sind gleichbedeutend mit denen des Flusssatzes ¹⁶ und müssen nicht mehr bewiesen werden. Aus ihnen folgt insbesondere

$$\Phi^t \circ \Phi^{-t} = \Phi^{t-t} = \Phi^0 = \Phi^{-t+t} = \Phi^{-t} \circ \Phi^t.$$

Wegen $\Phi^0 = id$ ist also Φ^t umkehrbar, und die Umkehrabbildung ist

$$(\Phi^t)^{-1} = \Phi^{-t}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Da diese stetig sind, ist jede Zeit- t -Abbildung ein Homöomorphismus von V . ⟩⟩⟩

Bemerkungen a. Die Flussabbildung eines Vektorfeldes definiert somit einen *Homomorphismus* der additiven Gruppe $\mathbb{R}$ in die Gruppe $\text{Hom}(V)$ der Homöomorphismen auf V :

$$\Phi : (\mathbb{R}, +) \rightarrow (\text{Hom}, \circ), \quad t \mapsto \Phi^t.$$

Eine solche Familie von Abbildungen wird auch als *dynamisches System mit kontinuierlicher Zeit* bezeichnet.

b. Der Satz verallgemeinert das entsprechende Resultat für lineare Vektorfelder A . Dort war ja

$$\Phi^t = e^{At} : V \rightarrow V$$

eine 1-Parametergruppe von *linearen* Isomorphismen von V . Die Gruppenstruktur war dort eine algebraische Identität, die wir ohne den EE-Satz zeigten. $\rightarrow$

■ Differenzierbarkeit

Ein lipschitzstetiges Vektorfeld generiert also eine 1-Parametergruppe von Homöomorphismen des Vektorraumes V . Ist das Vektorfeld darüber hinaus stetig differenzierbar, so gilt dasselbe auch für seine Flussabbildung.

- 18 **Satz** Ist das lipschitzstetige Vektorfeld ν auf V stetig differenzierbar, so ist jede Zeit- t -Abbildung Φ^t seines Flusses ein Diffeomorphismus von V . $\times$

Da wir bereits wissen, dass es sich bei den Zeit- t -Abbildungen um Homöomorphismen handelt, ist nur noch deren stetige Differenzierbarkeit zu zeigen. Es genügt daher, Folgendes zu beweisen.

- 19 **Proposition** Ist das lipschitzstetige Vektorfeld ν stetig differenzierbar, so ist jede Zeit- t -Abbildung Φ^t seines Flusses ebenfalls stetig differenzierbar. Seine Ableitung $\Lambda^t := D\Phi^t(x)$ ist die eindeutige Lösung des nichtautonomen linearen Anfangswertproblems

$$\dot{\Lambda} = A(t)\Lambda, \quad \Lambda(0) = \text{Id}, \quad (5)$$

mit $A(t) := D\nu(\Phi^t(x))$. $\times$

Dieses Awp ergibt sich wie folgt. Falls wir die Differentialgleichung

$$\dot{\Phi}^t(x) = \nu(\Phi^t(x))$$

nach x differenzieren und Differenziation nach x und t vertauschen dürfen, so erhalten wir die Differentialgleichung

$$(D\Phi^t(x))' = D\nu(\Phi^t(x))D\Phi^t(x).$$

Ihr Anfangswert ist $D\Phi^0(x) = \text{Id}$, da ja $\Phi^0 = \text{id}$. Fixieren wir also x , so erhalten wir genau das behauptete Awp für $\Lambda(t) := D\Phi^t(x)$.

Die Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung ist jedenfalls kein Problem:

- 20 **Lemma** Ist das Vektorfeld ν auf V lipschitz und C^1 , so besitzt das Anfangswertproblem (5) eine für alle t definierte eindeutige Lösung. $\times$

⟨⟨⟨ Ist ν stetig differenzierbar, so liefert die Definition von $A(t)$ eine stetige Abbildung $A: \mathbb{R} \rightarrow L(V)$. Diese ist gleichmäßig beschränkt in der Operatornorm von $L(V)$ durch die globale Lipschitzkonstante von ν . Somit können wir $\dot{\Lambda} = A(t)\Lambda$ auffassen als eine stetig von t abhängende lipschitzstetige Differentialgleichung auf dem Vektorraum $L(V)$. Der Zusatz zum Existenz- und Eindeutigkeitssatz 14 liefert dazu die gewünschte eindeutige Lösung. ⟩⟩⟩

⟨⟨⟨ *Beweis der Proposition* Wir zeigen, dass

$$W^t(h) := \Phi^t(x+h) - \Phi^t(x) - \Lambda^t h = o(\|h\|).$$

Dann ist Λ^t von (5) die Ableitung der Flussabbildung. — Aufgrund des Hauptsatzes gilt

$$\begin{aligned}\Lambda^t h &= h + \int_0^t A(s) \Lambda^s h \, ds, \\ \Phi^t(x) &= x + \int_0^t \nu(\Phi^s(x)) \, ds, \\ \Phi^t(x+h) &= x+h + \int_0^t \nu(\Phi^s(x+h)) \, ds.\end{aligned}$$

Also ist

$$W^t(h) = \int_0^t (\nu(\Phi^s(x+h)) - \nu(\Phi^s(x)) - A(s)\Lambda^s h) \, ds.$$

Mit $\Lambda^s h = \Phi^s(x+h) - \Phi^s(x) - W^s(h)$ wird dies zu

$$\begin{aligned}W^t(h) &= \int_0^t (\nu(\Phi^s(x+h)) - \nu(\Phi^s(x)) - A(s)(\Phi^s(x+h) - \Phi^s(x))) \, ds \\ &\quad + \int_0^t A(s)W^s(h) \, ds \\ &= \int_0^t \Delta(s) \, ds + \int_0^t A(s)W^s(h) \, ds\end{aligned}$$

mit

$$\Delta(s) = \nu(\Phi^s(x+h)) - \nu(\Phi^s(x)) - A(s)(\Phi^s(x+h) - \Phi^s(x)).$$

Aufgrund der gleichmäßigen Lipschitzstetigkeit von ν ist $\|A(s)\| \leq L$ für alle s und x . Also folgt

$$\|W^t(h)\| \leq \int_0^t \|\Delta(s)\| \, ds + L \int_0^t \|W^s(h)\| \, ds.$$

Mit einer Variante des Lemmas von Gronwall_{A-12} gilt dann

$$\|W^t(h)\| \leq \int_0^t \|\Delta(s)\| e^{L(t-s)} \, ds.$$

Mit $A(s) = D\nu(\Phi^s(x))$ und dem Mittelwertsatz ist nun

$$\|\Delta(s)\| \leq \sup_{\xi \in I(s)} \|D\nu(\xi) - D\nu(\Phi^s(x))\| \|\Phi^s(x+h) - \Phi^s(x)\|$$

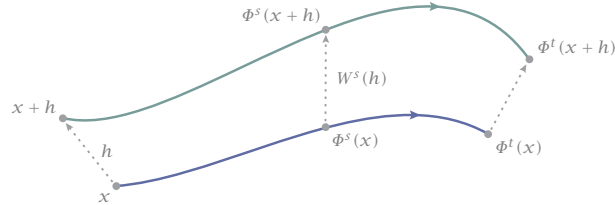
mit $I(s) = [(\Phi^s(x+h), \Phi^s(x))]$. Aufgrund des Stetigkeitssatzes₁₅ ist

$$\|\Phi^s(x+h) - \Phi^s(x)\| = O(\|h\|).$$

Andererseits gilt $\xi \rightarrow \Phi^s(x)$ für $h \rightarrow 0$, und deshalb

$$\|D\nu(\xi) - D\nu(\Phi^s(x))\| \rightarrow 0, \quad h \rightarrow 0.$$

Abb 4
Zum Beweis der
Proposition



Also ist $\|\Delta^t(h)\| = o(\|h\|)$ und damit auch

$$\|W^t(h)\| = o(\|h\|),$$

wie zu zeigen war. $\gggg$

■ Höhere Regularität

Besitzt das Vektorfeld höhere Regularitätseigenschaften, so vererben sich diese auf den Fluss.

21 Satz Ist das Vektorfeld ν auf V von der Klasse C^r , wobei $1 \leq r \leq \infty$, so ist seine Flussabbildung Φ ebenfalls C^r . $\times$

$\llll$ Für $r = 1$ ist die Behauptung bereits bewiesen¹⁸. Wir gehen daher induktiv davon aus, dass die Behauptung für irgendein $r \geq 1$ gilt, und beweisen deren Gültigkeit für $r + 1$.

Sei also ν ein C^{r+1} -Vektorfeld. Betrachte das Differenzialgleichungssystem

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \nu(x), \\ \dot{u} &= D\nu(x)u, \end{aligned} \tag{6}$$

und das zugehörige Vektorfeld

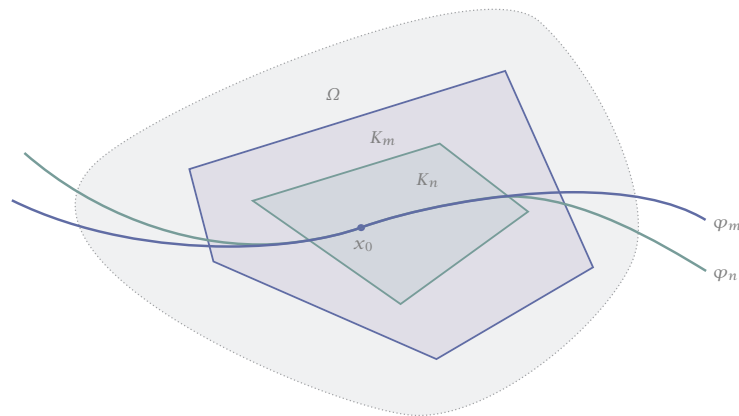
$$w : V \times V \rightarrow V \times V, \quad w(x, u) = \begin{pmatrix} \nu(x) \\ D\nu(x)u \end{pmatrix}.$$

Dieses ist C^r auf $V \times V$. Also ist nach Induktionsannahme auch seine Flussabbildung Ψ von der Klasse C^r . Diese Flussabbildung ist aber gerade

$$\Psi^t(x, u) = \begin{pmatrix} \Phi^t(x) \\ D\Phi^t(x)u \end{pmatrix},$$

denn die zweite Gleichung in (6) ist gerade die Variationsgleichung der ersten Gleichung¹⁹. Also ist nach Induktionsannahme $D\Phi^t$ eine C^r -Abbildung. Dasselbe gilt für $\dot{\Phi}^t$ aufgrund der Differenzialgleichung. Also ist Φ selbst eine C^{r+1} -Abbildung, und die Induktion ist abgeschlossen. $\gggg$

Abb 5 Konstruktion einer maximalen Lösungskurve



■ Maximale Flüsse

Bis jetzt gingen wir davon aus, dass ein Vektorfeld auf ganz V definiert und dort lipschitz ist. Das ist natürlich nicht immer der Fall.

► A. Die Differenzialgleichung $\dot{x} = x^2$ ist auf ganz $\mathbb{R}$ erklärt, aber nicht gleichmäßig lipschitzstetig. Tatsächlich ist jede nichttriviale Lösung

$$x(t) = \frac{x_0}{1 - x_0 t}, \quad x_0 \neq 0,$$

nicht auf ganz $\mathbb{R}$ erklärt.

B. Die Differenzialgleichung $\dot{x} = x^{-2}$ hat eine Singularität im Punkt 0, und die Lösung

$$x(t) = \sqrt[3]{3t + 1}$$

erreicht diesen Punkt in endlicher Zeit, verlässt also den Definitionsbereich der Differenzialgleichung. ◀

Lösungen existieren im Allgemeinen also nicht für alle Zeiten. Jedes Awp eines lokal lipschitzstetigen Vektorfeldes besitzt jedoch immer eine eindeutige lokale und sogar *maximale Lösung* $\varphi: J \rightarrow \Omega$. Das heißt, für jede andere Lösung $\psi: I \rightarrow \Omega$ desselben Awps gilt $I \subset J$ und $\psi = \varphi|_I$.

- 22 **Lokaler EE-Satz** Das Vektorfeld v sei auf einem Gebiet Ω lokal lipschitzstetig. Dann besitzt jedes zugehörige Anfangswertproblem eine eindeutige maximale Lösung. ✕

»»» Zu jedem Gebiet Ω existiert eine *Ausschöpfung*

$$K_1 \subset K_2 \subset \dots \subset \Omega, \quad \bigcup_{n \geq 1} K_n = \Omega,$$

durch kompakte Teilmengen – zum Beispiel

$$K_n = \{x \in \Omega : \text{dist}(x, \Omega^c) \geq 1/n \wedge \|x\| \leq n\}.$$

Aufgrund von Lemma K₃ ist die Einschränkung $v|_{K_n}$ gleichmäßig lipschitzstetig, und aufgrund von Lemma L₄ kann es von dort zu einem gleichmäßig lipschitzstetigen Vektorfeld v_n auf ganz V fortgesetzt werden.

Sei nun $x_0 \in \Omega$ ein beliebiger Anfangswert, und ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $x_0 \in K_1$. Für jedes $n \geq 1$ existiert dann eine eindeutige globale Lösung φ_n zum Vektorfeld v_n und Anfangswert x_0 , und zu dieser ein größtes *offenes* Intervall $I_n \ni 0$ mit der Eigenschaft

$$\varphi_n(I_n) \subset K_n.$$

Eventuell gilt auch $\varphi_n(I_n^-) \subset K_n$, aber das ist unerheblich. Wegen $K_1 \subset K_2 \subset \dots$ gilt dann auch $I_1 \subset I_2 \subset \dots$ sowie

$$\varphi_m|_{I_n} = \varphi_n, \quad m \geq n.$$

Setze jetzt

$$J := \bigcup_{n \geq 1} I_n$$

und definiere $\varphi: J \rightarrow \Omega$ durch $\varphi|_{I_n} = \varphi_n$. Aufgrund des Eindeutigkeitsatzes 11 ist φ eine wohldefinierte Lösung zum Anfangswert x_0 innerhalb von Ω .

Um ihre Maximalität zu zeigen, betrachte beispielsweise

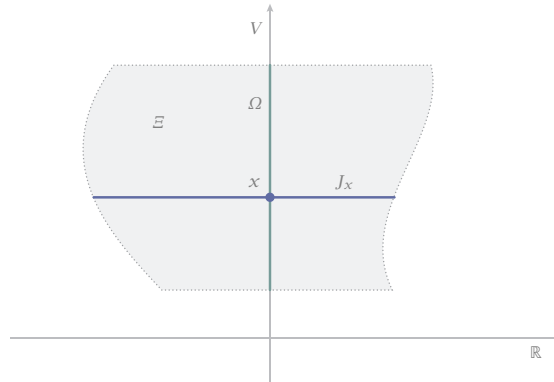
$$J_+ = J \cap [0, \infty) = [0, b), \quad 0 < b \leq \infty.$$

Ist $b = \infty$, so ist J_+ sicher maximal. Sei also $b < \infty$. Gäbe es eine Lösung zum selben Anfangswert über den Zeitpunkt b hinaus, so existierte $\lim_{t \nearrow b} \varphi(t)$, und der kompakte Kurvenabschnitt $\varphi([0, b])$ wäre im Innern einer der kompakten Mengen K_n enthalten. Dies aber widerspricht der Definition der Intervalle I_n und J . »»»

Der *maximale Fluss* eines Vektorfeldes v ist die Bündelung aller seiner maximalen Lösungskurven. Wir setzen

$$E = \bigcup_{x \in \Omega} J_x \times \{x\} = \{(t, x) \in \mathbb{R} \times \Omega : t \in J_x\},$$

Abb 6
Die Menge Ξ



wobei J_x das maximale Existenzintervall der Lösungskurve zum Anfangswert x bezeichnet, und definieren

$$\Phi: \Xi \rightarrow \Omega, \quad (t, x) \mapsto \varphi(t, x)$$

genau wie im Fall des globalen Flusses. Dann gilt folgender

- 23 **Satz** Die Menge Ξ ist eine offene Umgebung von $\{0\} \times \Omega \subset \mathbb{R} \times \Omega$, und Φ ist ein maximaler Fluss auf Ω bestehend aus maximalen Lösungskurven des Vektorfeldes v . $\times$

««« Dies ist als Übung überlassen 6. »»»

Lokal gilt für den maximalen Fluss dasselbe wie für den globalen Fluss im Flusssatz 16, also

$$\Phi^0(x) = x, \quad \Phi^{t+s} = \Phi^t(\Phi^s(x)),$$

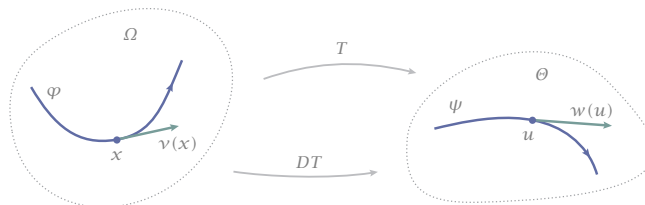
wann immer alle Ausdrücke definiert sind.

17.5

Konjugation von Vektorfeldern und Flüssen

Um eine Differenzialgleichung zu verstehen, kann man nach geeigneten Koordinaten suchen, in denen sie besonders einfach wird – das ist die sogenannte *Transformationsmethode*. Damit stellt sich die Frage, wie sich Vektorfelder und Differenzialgleichungen unter Koordinatentransformationen überhaupt transformieren.

Abb 7 Zum Transformationsgesetz



■ Transformation von Vektorfeldern

Gegeben seien ein Vektorfeld v auf einem Gebiet Ω in V und ein Diffeomorphismus

$$T: \Omega \rightarrow \Theta$$

von Ω auf ein weiteres Gebiet Θ in V . Das transformierte Vektorfeld w auf Θ ist natürlicherweise dadurch charakterisiert, dass T Lösungskurven φ von v in Lösungskurven ψ von w abbildet. Für die Kurve $\psi = T \circ \varphi$ soll also gelten

$$\begin{aligned} \dot{\psi} &= (T \circ \varphi)' = (DT \circ \varphi) \dot{\varphi} = (DT \circ \varphi) v(\varphi) \\ &\stackrel{!}{=} w(\psi) = w(T \circ \varphi). \end{aligned}$$

Vergleich beider Gleichungen ergibt

$$w(T \circ \varphi) = (DT \circ \varphi) v(\varphi).$$

Betrachten wir $\varphi = \varphi(t, x)$ zum Zeitpunkt $t = 0$, so erhalten wir

$$w(T(x)) = DT(x) v(x), \quad x \in \Omega.$$

Damit erhalten wir folgendes

- 24 **Transformationsgesetz** Ein Diffeomorphismus $T: \Omega \rightarrow \Theta$ transformiert ein Vektorfeld v auf Ω in ein Vektorfeld w auf Θ gemäß der Gleichung

$$w \circ T = DT \cdot v. \quad \times$$

Diese Gleichung lässt sich sowohl nach v als auch nach w auflösen. Auflösen nach w ergibt

$$w = DT \cdot v \circ T^{-1} =: T_* v.$$

Man transportiert also v von Ω mit der Tangentialabbildung DT weiter nach Θ , weshalb man $T_* v$ den *push forward* von v nennt. Auflösen nach v ergibt

$$v = DT^{-1} w \circ T =: T^* w.$$

Man holt also w mit der inversen Tangentialabbildung DT^{-1} von Θ zurück nach Ω , weshalb man T^*w den *pull back* von w nennt. Beide Gleichungen sind äquivalent, aber die zweite ist technisch meist einfacher, da nur die lineare Abbildung DT invertiert wird statt der im Allgemeinen nichtlinearen Abbildung T .

Definition Zwei Vektorfelder v auf Ω und w auf Θ heißen *C^1 -konjugiert*, falls es einen Diffeomorphismus $T: \Omega \rightarrow \Theta$ gibt, so dass $T_*v = w$. $\times$

Bemerkung Das Vektorfeld T_*v ist auch erklärt, wenn T nicht surjektiv ist, sondern eine sogenannte *Einbettung*. Dagegen ist T^*w auch erklärt, wenn T nur ein lokaler, aber kein globaler Diffeomorphismus ist. Dies ist beispielsweise bei den Polarkoordinaten der Fall – siehe nächstes Beispiel. $\rightarrow$

► Praktisch transformiert man Vektorfelder durch direktes Differenzieren der Gleichung $\psi = T \circ \varphi$ statt die Transformationsformel zu bemühen.

A. Ist $\dot{x} = Ax$ und $\dot{y} = Ty$ mit einem Isomorphismus $T: V \rightarrow V$. Dann ist

$$\dot{y} = (Tx)' = T\dot{x} = TAx \stackrel{!}{=} By = BTx,$$

also $TA = BT$. Somit erhalten wir

$$A = T^*B = T^{-1}BT, \quad B = T_*A = TAT^{-1},$$

wobei T^* hier *nicht* die adjungierte Abbildung zu T bezeichnet.

B. Betrachte das Vektorfeld $v(x) = x^2$ auf $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Mit

$$T: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}^*, \quad x = -\frac{1}{y}$$

erhält man

$$\dot{x} = x^2 = \frac{1}{y^2} \stackrel{!}{=} \left(-\frac{1}{y}\right)' = \frac{\dot{y}}{y^2}.$$

Man erhält $\dot{y} = 1$. Also ist

$$T^*v = 1, \quad T_*1 = v,$$

wenn 1 das konstante Vektorfeld mit Wert 1 bezeichnet.

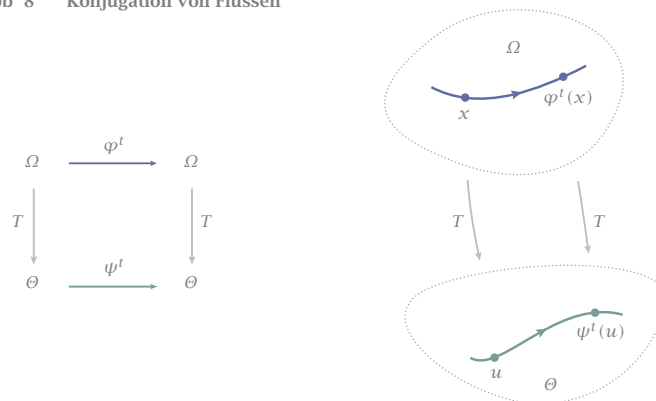
C. Die Abbildung

$$(r, \theta) \mapsto (x, y) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$$

definiert Polarkoordinaten in der Ebene außerhalb des Nullpunkts. Sie ist ein lokaler, jedoch kein globaler Diffeomorphismus. Daher ist lediglich der pull back definiert. Eine direkte Rechnung ergibt

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \dot{r} \cos \theta - r \dot{\theta} \sin \theta, \\ \dot{y} &= \dot{r} \sin \theta + r \dot{\theta} \cos \theta. \end{aligned}$$

Abb 8 Konjugation von Flüssen



Multiplikation der ersten Gleichung mit $x = r \cos \theta$, der zweiten mit $y = r \sin \theta$ und Addition ergibt

$$x\dot{x} + y\dot{y} = r\dot{r} \cos^2 \theta + r\dot{r} \sin^2 \theta = r\dot{r},$$

also

$$\dot{r} = \frac{x\dot{x} + y\dot{y}}{r}.$$

Analog erhält man

$$\dot{\theta} = \frac{x\dot{y} - y\dot{x}}{r^2}.$$

Diese Gleichungen sind für $r > 0$ wohldefiniert. ◀

■ Konjugation von Flüssen

Können zwei Vektorfelder durch einen Diffeomorphismus ineinander transformiert werden, so betrachtet man diese als *äquivalent*. Ihre Lösungskurven werden dann ebenfalls durch diesen Diffeomorphismus aufeinander abgebildet – das war ja auch der Ausgangspunkt des Transformationsgesetzes.

Zunächst die Definition. Flüsse bezeichnen wir von nun an wieder mit kleinen griechischen Buchstaben, da sie ohnehin aus Lösungskurven bestehen.

Definition Zwei Flüsse φ auf Ω und ψ auf Θ heißen *lokal C^1 -konjugiert*, falls es einen Diffeomorphismus $T: \Omega \rightarrow \Theta$ gibt, so dass

$$T \circ \varphi^t = \psi^t \circ T$$

in einem offenen t -Intervall um 0 für jeden Anfangswert in Ω . Mit anderen Worten, es kommutiert das in Abbildung 8 links stehende Diagramm. $\times$

- 25 **Satz** Zwei Vektorfelder sind C^1 -konjugiert genau dann, wenn ihre Flüsse lokal C^1 -konjugiert sind $\times$

⟷⇐ Sind die Flüsse lokal konjugiert, so gilt für jedes $x \in \Omega$

$$T \circ \varphi^t = \psi^t \circ T$$

lokal um jeden Punkt auf einem kleinen t -Intervall um 0. Ableiten nach t bei $t = 0$ ergibt dann $DT(\varphi^0)\dot{\varphi}^0 = \dot{\psi}^0 \circ T$. Mit $\dot{\varphi}^0 = \nu$ und $\dot{\psi}^0 = w$ folgt

$$DT \cdot \nu = w \circ T.$$

Also sind auch die Vektorfelder konjugiert.

⇒ Es gelte umgekehrt die letzte Gleichung. Dann gilt lokal um $t = 0$

$$\begin{aligned} (T \circ \varphi^t)' &= DT(\varphi^t)\dot{\varphi}^t = DT(\varphi^t)\nu(\varphi^t) \\ &= (DT \cdot \nu) \circ \varphi^t \\ &= (w \circ T) \circ \varphi^t = w(T \circ \varphi^t). \end{aligned}$$

Somit ist $T \circ \varphi^t(x)$ eine lokale Lösungskurve des Vektorfeldes w zum Anfangswert $T(x)$. Dasselbe gilt aber auch für die Kurve $\psi^t(T(x))$. Aufgrund des EE-Satzes ist also $T(\varphi^t(x)) = \psi^t(T(x))$ für kleine t , sprich

$$T \circ \varphi^t = \psi^t \circ T. \quad \rangle\rangle\rangle\rangle$$

Bemerkung Offensichtlich kann man Flüsse auch *topologisch* konjugieren – also per Homöomorphismus –, Vektorfelder aber nicht, da die Jacobische eines Homöomorphismus ja nicht definiert ist. Man nennt daher Vektorfeld *topologisch konjugiert*, wenn ihre Flüsse topologisch konjugiert sind. Dieser wesentlich flexiblere Konjugationsbegriff ist für das Studium dynamischer Systeme wichtig. $\rightarrow$

■ Der Rektifizierungssatz

Wir können nun den einfachsten Satz in der Klassifikation von Vektorfeldern beweisen. Er betrifft ihre Gestalt lokal um *reguläre Punkte*.

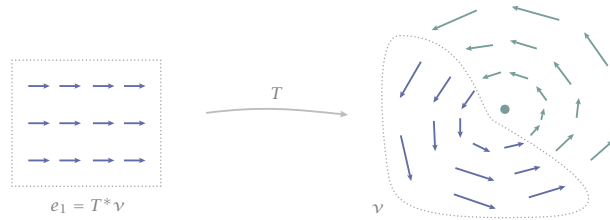
Definition Ein Punkt p heißt *singulärer Punkt* eines Vektorfeldes ν , falls

$$\nu(p) = 0.$$

Andernfalls heißt er *regulärer Punkt*. $\times$

- 26 **Rektifizierungssatz** Lokal um einen regulären Punkt p ist ein C^1 -Vektorfeld C^1 -konjugiert zu einem konstanten Vektorfeld. $\times$

Abb 9 Der Rektifizierungssatz



««« Wir betrachten den Standardfall eines Vektorfeldes $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_n)$ auf dem $\mathbb{R}^n$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, dass

$$p = 0, \quad \nu_1(0) \neq 0.$$

Es existiert dann eine Umgebung $I \times U$ von $(0, 0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, auf der der Fluss von ν erklärt ist und eine C^1 -Abbildung $\varphi: I \times U \rightarrow \mathbb{R}^n$ definiert.

Auf einer noch festzulegenden kleinen Umgebung W von $0 \in \mathbb{R}^n$ definieren wir damit eine Abbildung

$$T: W \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad u \mapsto T(u) = \varphi^{u_1}(0, \hat{u}),$$

wobei $u = (u_1, \dots, u_n)$ und $\hat{u} = (u_2, \dots, u_n)$. Für diese Abbildung gilt dann

$$\left. \frac{\partial T}{\partial u_1}(0) = \dot{\varphi}^t(0, \hat{u}) \right|_0 = \dot{\varphi}^0(0) = \nu(0)$$

und – indem wir erst $t = 0$ setzen und dann nach u_i differenzieren –

$$\frac{\partial T}{\partial u_i}(0) = \frac{\partial \varphi^0}{\partial u_i}(0) = e_i, \quad 2 \leq i \leq n.$$

Also ist

$$DT(0) = \left(\frac{\partial T_i}{\partial u_j} \right) = \begin{pmatrix} \nu_1(0) & 0 & \dots & 0 \\ \nu_2(0) & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \nu_n(0) & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix},$$

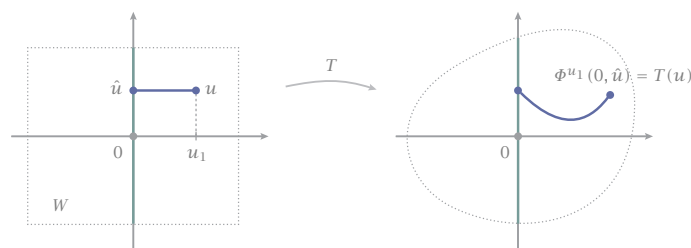
und somit

$$\det DT(0) = \nu_1(0) \neq 0.$$

Also ist T ein *lokaler Diffeomorphismus*. Wählen wir also W hinreichend klein, so ist T ein Diffeomorphismus von W auf eine Umgebung von $T(0) = 0$.

Diese Abbildung T konjugiert die Flüsse von e_1 und ν . Der Fluss von e_1 ist

$$\psi^t(u) = u + t e_1 = (u_1 + t, u_2, \dots, u_n).$$

Abb 10 Definition der Abbildung T


Mit der Definition von T folgt

$$\begin{aligned} (\varphi^t \circ T)(u) &= \varphi^t \circ \varphi^{u_1}(0, \hat{u}) \\ &= \varphi^{t+u_1}(0, \hat{u}) \\ &= T(t + u_1, \hat{u}) = T \circ \psi^t(u). \end{aligned}$$

Also gilt

$$\varphi^t \circ T = T \circ \psi^t.$$

Da T die Flüsse von ν und e_1 konjugiert, konjugiert T auch die Vektorfelder selbst ₂₅. >>>>

Damit ist klar, dass reguläre Punkte eines Vektorfeldes *lokal völlig uninteressant* sind. Interessant sind nur die singulären Punkte – wie im richtigen Leben. Dies ist allerdings nur ein *lokales* Bild. Es erlaubt keinerlei Aussage über das globale Verhalten der Lösungskurven – ob es sich beispielsweise um periodische, quasiperiodische oder chaotische Bahnen handelt.