18

Wegintegrale

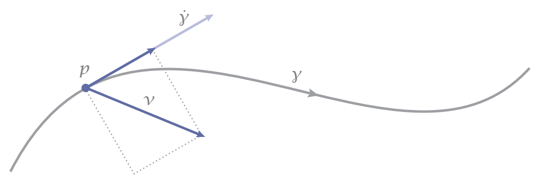
Die entlang eines geradlinigen Weges bei gleichbleibender Krafteinwirkung geleistete Arbeit ist das Produkt aus zurückgelegter Wegstrecke und in Richtung dieser Wegstrecke wirkender Kraftkomponente. Will man allgemeiner die geleistete Arbeit entlang eines beliebigen Weges γ innerhalb eines Kraftfeldes v bestimmen, so ist in jedem Punkt die anliegende Kraft auf den momentanen Geschwindigkeitsvektor zu projizieren und das resultierende Produkt über den Weg zu integrieren. Dies führt zu einem Integral der Form

$$\int_a^b \langle v(\gamma(t)), \dot{\gamma}(t) \rangle \,\mathrm{d}t$$

für die geleistete Arbeit.

Mathematisch kann man den Integranden auffassen als die Anwendung der *Linearform* $\langle v, \cdot \rangle$ auf den *Vektor* $\dot{\gamma}$. Die Weiterentwicklung dieses Gedankens führt zum Begriff der *Differenzialform*, die entlang eines Weges zu integrieren ist. Dies vermeidet unter anderem die Einbeziehung eines Skalarprodukt und erlaubt eine koordinatenfreie Interpretation solcher Kurvenintegrale.

Abb 1 Weg in einem Kraftfeld



18.1 Pfaffsche Formen

Sei zunächst V ein Vektorraum endlicher Dimension und $V^* = L(V, \mathbb{R})$ sein Dualraum, also der Raum aller stetigen linearen Abbildungen $V \to \mathbb{R}$.

1 **Definition** *Eine Pfaffsche Form oder 1-Form ist eine Abbildung*

$$\alpha : V \hookrightarrow V^*, \quad x \mapsto \alpha(x),$$

die jedem Punkt in ihrem Definitionsbereich eine Linearform zuordnet. ⋊

Pfaffsche Formen werden auch *Differenzialformen vom Grad 1* genannt. Für die Anwendung einer 1-Form α am Punkt x auf einen Vektor h in V schreiben wir $\alpha(x)h$ oder kürzer $\alpha(h)$, wenn der Punkt x keine besondere Rolle spielt.

Bemerkung Wir beschränken uns auf *reellwertige* 1-Formen. Komplexwertige 1-Formen spielen in der Funktionentheorie eine zentrale Rolle und werden im dritten Band betrachtet. ⊸

2 ⊳ A. Eine differenzierbare Funktion $f : V \hookrightarrow \mathbb{R}$ definiert eine Pfaffsche Form

$$\mathrm{d}f : V \hookrightarrow V^*, \qquad x \mapsto \mathrm{d}f(x),$$

genannt das *Differenzial* von f, durch

$$\mathrm{d}f(x)h := Df(x)h = \partial_h f(x).$$

B. Sei $v : V \hookrightarrow V$ ein stetiges *Vektorfeld*, also eine Abbildung, die jedem Punkt in seinem Definitionsbereich in V einen Vektor *desselben* Vektorraumes zuordnet. Mithilfe eines Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ auf V induziert dies eine 1-Form

$$\alpha_v := \langle v, \cdot \rangle .$$

Ist $\alpha_v = \mathrm{d}f$, so ist $v = \nabla f$, denn

$$\langle \nabla f, \cdot \rangle = \mathrm{d}f = \alpha_v = \langle v, \cdot \rangle . \quad ◂$$

▪ Der Standardfall

Wie sehen 1-Formen im Standardfall $V = \mathbb{R}^n$ aus? Auf dem $\mathbb{R}^n$ sind die *Koordinatenfunktionen*

$$\pi_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad \pi_k(x) = x_k,$$

stetig differenzierbar, und es gilt

$$\mathrm{d}\pi_k(h) = D\pi_k(h) = h_k.$$

Für die Standardbasis $e_1, .., e_n$ des $\mathbb{R}^n$ gilt insbesondere

$$\mathrm{d}\pi_k(e_l) = \delta_{kl}, \qquad 1 \leqslant k, l \leqslant n.$$

Die Differenziale $\mathrm{d}\pi_1, .., \mathrm{d}\pi_n$ bilden also gerade die zur Standardbasis $e_1, .., e_n$ *duale Basis*. Bezeichnen wir jetzt vereinfachend die k-te Koordinatenfunktion mit x_k anstelle von π_k, gelangen wir zur folgenden

Definition *Die zur Standardbasis $e_1, .., e_n$ des Vektorraumes $\mathbb{R}^n$ duale Basis des Dualraums wird mit $\mathrm{d}x_1, .., \mathrm{d}x_n$ bezeichnet.* ⋊

Jede 1-Form im $\mathbb{R}^n$ kann damit dargestellt werden als Linearkombination dieser Basisformen, also als

$$\alpha = \sum_{k=1}^{n} a_k(x)\,\mathrm{d}x_k.$$

Ihre Koeffizienten sind reelle Funktionen, für die $a_k = \alpha(e_k)$ gilt.

▷ A. Im eindimensionalen Standardfall hat jede Pfaffsche Form die Gestalt

$$a(x)\,\mathrm{d}x.$$

Sie ist also durch eine einzige skalare Funktion gegeben.

B. Das Differenzial einer C^1-Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ hat die Darstellung

$$\mathrm{d}f = \sum_{k=1}^{n} \partial_k f(x)\,\mathrm{d}x_k,$$

denn $\mathrm{d}f(e_k) = Dfe_k = \partial_k f$. Die partiellen Ableitungen von f sind also gerade die Koeffizienten des Differenzials $\mathrm{d}f$ bezüglich der Standardbasis.

C. Die durch ein Vektorfeld $v = \sum_{k=1}^{n} v_k e_k$ induzierte 1-Form 2 ist

$$\alpha_v = \langle v, \cdot \rangle = \sum_{k=1}^{n} v_k\,\mathrm{d}x_k,$$

denn deren Koeffizienten sind $\alpha_v(e_k) = \langle v, e_k \rangle = v_k$. Dies schreibt man auch gerne als klassisches Skalarprodukt

$$\alpha_v = v \bullet \mathrm{d}x$$

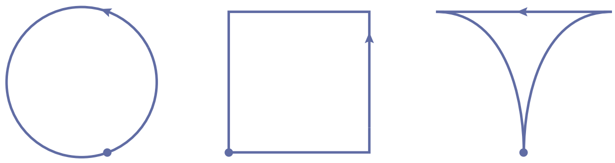
aus $v = (v_1, .., v_n)$ und $\mathrm{d}x = (\mathrm{d}x_1, .., \mathrm{d}x_n)$. ◁

Schließlich erklären wir noch die Regularität von 1-Formen.

Definition *Eine 1-Form α heißt stetig respektive von der Klasse C^r, wenn sie als Abbildung $\alpha : V \to V^*$ stetig respektive von der Klasse C^r ist.* ⋊

Für eine Basisdarstellung einer 1-Form bedeutet dies, dass sämtliche Koeffizientenfunktionen stetig respektive von der Klasse C^r sind.

Abb 2 Stückweise stetig differenzierbare geschlossene Kurven



18.2 Kurven- und Wegintegrale

Wir definieren nun das Integral von 1-Formen entlang Kurven so, wie wir in der Einleitung das Arbeitsintegral skizziert haben. Dabei betrachten wir stückweise stetig differenzierbare Kurven, die wir in Abschnitt 13.5 wie folgt definiert hatten. Zur Wiederholung:

Definition *Eine stetige Kurve $\gamma\colon I \to V$ ist stückweise stetig differenzierbar, wenn es eine Teilung $(t_1, .., t_n)$ des Intervalls I gibt, so dass alle Abschnitte $\gamma|_{[t_{k-1},t_k]}$ mit $1 \leqslant k \leqslant n$ stetig differenzierbar sind. Die Klasse aller dieser Kurven wird mit $D^1(I,V)$ bezeichnet.* ⋊

Insbesondere besitzt die Ableitung einer D^1-Kurve in jedem inneren Teilungspunkt links- und rechtsseitige Grenzwerte. Summe und skalare Vielfache von D^1-Kurven sind wieder D^1-Kurven. Somit ist $D^1(I,V)$ ein reeller Vektorraum.

Da wir es im Folgenden nur mit Integralen zu tun haben, müssen wir die Teilungspunkte einer D^1-Kurve nicht explizit betrachten. Für die Kurvenlänge gilt zum Beispiel

$$L(\gamma) = \sum_{k=1}^{n} L(\gamma|_{[t_{k-1},t_k]}) = \sum_{k=1}^{n} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \|\dot\gamma(t)\|\,\mathrm{d}t = \int_a^b \|\dot\gamma(t)\|\,\mathrm{d}t,$$

denn die endlich vielen Sprungstellen des Integranden an den Teilungspunkten haben keinen Einfluss auf das Integral $_{11.12}$. Ebenso verhält es sich mit den übrigen Integralen, die wir noch betrachten werden. — Nun zur Definition des Kurvenintegrals.

3 **Definition** *Sei $\alpha\colon V \hookrightarrow V^*$ eine stetige 1-Form und $\gamma\colon [a,b] \to V$ eine stückweise stetig differenzierbare Kurve im Definitionsbereich von α. Dann heißt*

$$\int_\gamma \alpha \coloneqq \int_a^b \alpha(\gamma(t))\dot\gamma(t)\,\mathrm{d}t$$

das Kurvenintegral von α längs der Kurve γ. ⋊

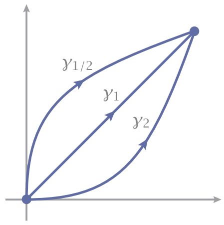


Abb 3

Integrationswege γ_σ in Beispiel 4

An jedem Kurvenpunkt $\gamma(t)$ wird also die 1-Form $\alpha(\gamma(t))$ auf den Vektor $\dot\gamma(t)$ angewendet. Das Ergebnis ist eine skalare Funktion, die wie üblich über das Parameterintervall der Kurve integriert wird.

Im Standardfall mit

$$\alpha = \sum_{k=1}^{n} a_k \, \mathrm{d}x_k, \qquad \dot\gamma = \sum_{k=1}^{n} \dot\gamma_k e_k$$

ergibt dies

$$\int_\gamma \alpha = \int_a^b \left(\sum_{k=1}^{n} a_k(\gamma(t))\dot\gamma_k(t) \right) \mathrm{d}t,$$

da ja

$$\mathrm{d}x_k(\dot\gamma) = \sum_{l=1}^{n} \dot\gamma_l \, \mathrm{d}x_k(e_l) = \dot\gamma_k.$$

4 ⊳ Sei $\alpha = y^2 \, \mathrm{d}x + \mathrm{d}y$ eine 1-Form auf $\mathbb{R}^2$ und $\sigma > 0$. Entlang der Kurve

$$\gamma_\sigma : \; [0,1] \to \mathbb{R}^2, \quad \gamma_\sigma(t) = (t, t^\sigma)$$

erhält man

$$\begin{aligned}\int_{\gamma_\sigma} \alpha &= \int_0^1 (t^{2\sigma} \, \mathrm{d}x + \mathrm{d}y)\,(1, \sigma t^{\sigma-1})^\top \, \mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 (t^{2\sigma} + \sigma t^{\sigma-1}) \, \mathrm{d}t \\ &= \frac{t^{2\sigma+1}}{2\sigma+1} + t^\sigma \Big|_0^1 = 1 + \frac{1}{2\sigma+1}.\end{aligned}$$

Das Ergebnis hängt also vom Weg ab, auch wenn alle Kurven gleichen Anfangspunkt $(0,0)$ und gleichen Endpunkt $(1,1)$ haben. ⊲

5 ⊳ *Windungsform* Die 1-Form

$$\upsilon = \frac{x \, \mathrm{d}y - y \, \mathrm{d}x}{x^2 + y^2}$$

auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ wird *Windungsform* genannt. Für die Standardparametrisierung γ des Einheitskreises, also $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$ mit $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$, erhält man

$$\begin{aligned}\int_\gamma \upsilon &= \int_0^{2\pi} (-\sin t \,\mathrm{d}x + \cos t \,\mathrm{d}y)\,(-\sin t, \cos t)^\top \,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{2\pi} (\sin^2 t + \cos^2 t)\,\mathrm{d}t \\ &= 2\pi.\end{aligned}$$

Ist allgemeiner $m \in \mathbb{Z}$ und γ_m mit $\gamma_m(t) = (\cos mt, \sin mt)$ der m-mal durchlaufene Einheitskreis, so ist

$$\int_{\gamma_m} \upsilon = \int_0^{2\pi} m(\sin^2 t + \cos^2 t)\,\mathrm{d}t = 2\pi m.$$

Das Integral misst also, bis auf den Faktor 2π, wie oft sich γ_m um den Nullpunkt herum windet. Wie wir noch sehen werden, gilt dies auch für jede andere geschlossene Kurve, die nicht durch den Nullpunkt hindurch läuft 17. ◂

▪ Invarianz

Das Interessante und Wesentliche am Kurvenintegral ist, dass es *unabhängig* von der gewählten Parametrisierung der Kurve ist.

6 **Lemma** *Sei $\alpha \colon V \hookrightarrow V^*$ eine stetige 1-Form, $\gamma \colon I \to V$ eine D^1-Kurve im Definitionsbereich von α und $\varphi \colon I_* \to I$ eine orientierungstreue D^1-Parametertransformation. Dann gilt*

$$\int_{\gamma\circ\varphi} \alpha = \int_\gamma \alpha. \qquad \rtimes$$

⟨⟨⟨⟨⟨ Seien γ und φ zunächst stetig differenzierbar. Für $I_* = [a_*, b_*]$ gilt

$$I = [a,b] = \varphi(I_*) = [\varphi(a_*), \varphi(b_*)],$$

da φ die Orientierung erhält. Für $\gamma_* = \gamma \circ \varphi$ folgt mit der klassischen Substitutionsregel daher

$$\begin{aligned}\int_{\gamma_*} \alpha &= \int_{a_*}^{b_*} \alpha(\gamma_*(t))\dot{\gamma}_*(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_{a_*}^{b_*} \alpha(\gamma(\varphi(t)))\dot{\gamma}(\varphi(t))\dot{\varphi}(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_{\varphi(a_*)}^{\varphi(b_*)} \alpha(\gamma(s))\dot{\gamma}(s)\,\mathrm{d}s = \int_a^b \alpha(\gamma(s))\dot{\gamma}(s)\,\mathrm{d}s = \int_\gamma \alpha.\end{aligned}$$

Mit einer geeigneten Zerlegung in endlich viele Teilintervalle folgt die Behauptung dann auch für D^1-Kurven und D^1-Parametertransformationen. ⟩⟩⟩⟩⟩

Die Unabhängigkeit des Kurvenintegrals einer 1-Form von der gewählten Parametrisierung der Kurve erlaubt es uns, dieses auch für einen *Weg* zu definieren, also eine *Äquivalenzklasse* von parametrisierten Kurven.

Definition *Das Wegintegral einer stetigen 1-Form α entlang eines Weges ω ist definiert als*

$$\int_\omega \alpha \coloneqq \int_\gamma \alpha,$$

wobei γ eine beliebige D^1-Parametrisierung von ω bezeichnet. ⋊

Bemerkung Man kann das Wegintegral auch für geeignete *stetige* Kurven definieren und stetige Parametertransformationen betrachten. Uns geht es hier jedoch nicht um möglichst geringe Regularitätsvoraussetzungen. Daher gehen wir darauf nicht ein. ⊸

18.3 Wegintegrale exakter 1-Formen

Die explizite Bestimmung eines klassischen Integrals ist aufgrund des Hauptsatzes 11.17 gleichbedeutend mit dem Auffinden einer Stammfunktion. Entsprechendes gilt auch für Wegintegrale, wenn die betreffende 1-Form *exakt* ist.

Definition *Eine 1-Form α heißt exakt, wenn es eine C^1-Funktion f gibt, so dass*

$$\alpha = \mathrm{d}f$$

auf dem gemeinsamen offenen Definitionsbereich. Jede solche Funktion f heißt eine Stammfunktion von α. ⋊

▷ *1-Formen auf einem Intervall* Ist $\alpha = a(x)\,\mathrm{d}x$ stetig auf dem Intervall I und $x_0 \in I$, so definiert aufgrund des Stammfunktionensatzes 11.15 [1]

$$f(x) \coloneqq \int_{x_0}^{x} a(t)\,\mathrm{d}t, \qquad x \in I,$$

eine stetig differenzierbare Funktion f auf I mit der Eigenschaft, dass

$$\mathrm{d}f(x) = f'(x)\,\mathrm{d}x = a(x)\,\mathrm{d}x.$$

Somit ist *jede* auf einem Intervall stetige 1-Form exakt. ◁

[1] Im Folgenden verwenden wir $\mathrm{d}t$ für das klassische Integral und $\mathrm{d}x$ für 1-Formen.

⊳ *Zentralfeld auf $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$* Eine 1-Form der Gestalt

$$\alpha = \varphi(\|x\|) \sum_{k=1}^{n} x_k \,\mathrm{d}x_k$$

mit einer stetigen Funktion $\varphi\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$ ist exakt. Eine Stammfunktion f auf $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ ist zum Beispiel gegeben durch

$$f(x) = F(\|x\|) = \int_1^{\|x\|} t\varphi(t)\,\mathrm{d}t.$$

Denn für die euklidische Norm gilt

$$\mathrm{d}(\|x\|) = \sum_{k=1}^{n} \frac{x_k}{\|x\|}\,\mathrm{d}x_k, \qquad x \neq 0,$$

und somit

$$\mathrm{d}f(x) = F'(\|x\|)\mathrm{d}(\|x\|) = \varphi(\|x\|)\sum_{k=1}^{n} x_k \,\mathrm{d}x_k. \quad ⊲$$

Die Wegintegrale exakter 1-Formen sind nun leicht zu berechnen. Es gilt folgende Verallgemeinerung des Hauptsatzes $_{11.17}$.

7 **Hauptsatz für Wegintegrale** *Ist die 1-Form α exakt mit Stammfunktion f, so gilt*

$$\int_\omega \alpha = \int_\omega \mathrm{d}f = f\,\Big|_{\omega_a}^{\omega_b}$$

für jeden stückweise stetig differenzierbaren Weg ω im Definitionsbereich von α mit Anfangspunkt ω_a und Endpunkt ω_b. Das Wegintegral einer exakten 1-Form hängt also nur vom Anfangs- und Endpunkt des Weges ab, nicht aber von dessem Verlauf. ⋊

⟨⟨⟨⟨ Sei ω zunächst C^1 und $\gamma\colon [a,b] \to V$ eine C^1-Parametrisierung von ω. Dann ist $f \circ \gamma$ ebenfalls stetig differenzierbar, und es gilt

$$\mathrm{d}f(\gamma(t))\dot{\gamma}(t) = Df(\gamma(t))\gamma'(t) = (f \circ \gamma)'(t).$$

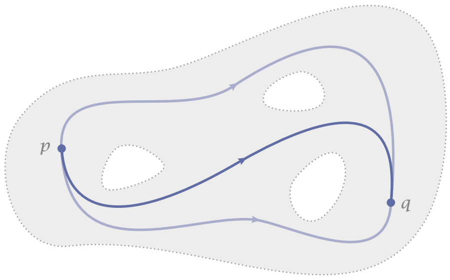
Also ist

$$\begin{aligned}\int_\omega \alpha = \int_\gamma \mathrm{d}f &= \int_a^b \mathrm{d}f(\gamma(t))\dot{\gamma}(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_a^b (f\circ\gamma)'(t)\,\mathrm{d}t = f\circ\gamma\,\Big|_a^b = f\,\Big|_{\gamma(a)}^{\gamma(b)} = f\,\Big|_{\omega_a}^{\omega_b}.\end{aligned}$$

Mit einer geeigneten Zerlegung in endlich viele Teilintervalle folgt die Behauptung dann auch für stückweise stetig differenzierbare Wege und deren Parametrisierungen. ⟩⟩⟩⟩

Abb 4

Verschiedene Wege von p nach q



Die Wegunabhängigkeit ist somit eine *notwendige* Bedingung für die Exaktheit einer 1-Form. Die 1-Form in Beispiel 4 und die Windungsform υ in Beispiel 5 können deshalb nicht exakt sein.

Wir werden gleich sehen, dass umgekehrt diese Bedingung auch *hinreichend* ist, solange wir nur solche Punkte betrachten, die wir auch durch Kurven verbinden können. Dies führt zum Begriff der *wegzusammenhängenden Menge.*

Definition *Eine Teilmenge M von V heißt wegzusammenhängend, wenn es zu je zwei Punkten in M eine ganz in M verlaufende stückweise differenzierbare Kurve gibt, die diese Punkte verbindet.* ⋊

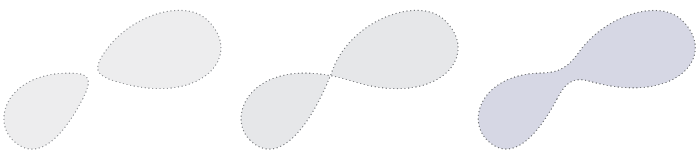
- A. Jedes reelle Intervall ist wegzusammenhängend.
- B. Jede konvexe Menge ist wegzusammenhängend.
- C. $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ ist zusammenhängend für $n \geqslant 2$, nicht aber für $n = 1$.
- D. Nur die Menge rechts in Abbildung 5 ist wegzusammenhängend.

Offene *und* wegzusammenhängende Mengen spielen eine wichtige Rolle in der Analysis und haben deshalb eine eigene Bezeichnung.

Definition *Ein Gebiet ist eine nichtleere, offene und wegzusammenhängende Menge.* ⋊

- A. Jedes nichtleere offene Intervall ist ein Gebiet.
- B. Jede nichtleere offene konvexe Menge ist ein Gebiet.

Abb 5 Zwei nicht und eine zusammenhängende offene Menge



c. Die Menge $\Omega_\varepsilon = \{(u,v) : v^2 > u^2 - \varepsilon\}$ ist nur für $\varepsilon > 0$ ein Gebiet.

d. Die Vereinigung zweier Gebiete ist wieder ein Gebiet genau dann, wenn ihr Durchschnitt nicht leer ist. ◂

Das nächste Lemma zeigt, dass hinsichtlich Stammfunktionen die Gebiete in höheren Dimensionen dieselbe Rolle spielen wie die Intervalle in einer Dimension.

8 **Lemma** *Auf einem Gebiet Ω ist eine differenzierbare Abbildung $f : \Omega \to W$ konstant genau dann, wenn Df verschwindet.* ⋊

⟨⟨⟨⟨⟨ $\Rightarrow$ Das ist trivial, unabhängig davon, ob Ω ein Gebiet ist oder nicht.

$\Leftarrow$ Fixiere einen Punkt $x_0 \in \Omega$ und betrachten einen weiteren Punkt $x \in \Omega$. Es existiert eine stückweise differenzierbare Kurve $\gamma : [a,b] \to \Omega$ mit

$$\gamma(a) = x_0, \qquad \gamma(b) = x.$$

Dann ist auch $g = f \circ \gamma : [a,b] \to W$ stückweise differenzierbar. Da Df nach Voraussetzung überall verschwindet, gilt also auch stückweise

$$g'(t) = Df(\gamma(t))\gamma'(t) = 0.$$

Somit ist g sogar C^1 und wegen $g' = 0$ auch konstant. Also ist $g(a) = g(b)$, was gleichbedeutend ist mit $f(x) = f(x_0)$. Da $x \in \Omega$ beliebig war, ist f konstant auf ganz Ω. ⟩⟩⟩⟩⟩

Auf einem *Gebiet* ist eine differenzierbare Abbildung somit konstant genau dann, wenn ihre Ableitung überall verschwindet $_8$. Für eine skalare Funktion ist dies gleichbedeutend damit, dass ihr Differenzial verschwindet. Somit gilt folgendes

9 **Korollar** *Auf einem Gebiet unterscheiden sich die Stammfunktionen einer exakten 1-Form nur durch eine additive Konstante.* ⋊

Wir zeigen nun, dass auf einem Gebiet die Wegunabhängigkeit von 1-Form-Integralen auch *hinreichend* für die Exaktheit der 1-Form ist.

10 **Satz** *Sei α eine stetige 1-Form auf einem Gebiet Ω. Dann sind folgende Aussagen äquivalent.*

(i) *α ist exakt auf Ω.*

(ii) *Das Wegintegral von α ist unabhängig vom Verlauf des Weges.*

(iii) *Das Wegintegral von α verschwindet für jeden geschlossenen Weg.* ⋊

⟨⟨⟨⟨⟨ (i) $\Rightarrow$ (ii) Das ist der Hauptsatz $_7$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Ein geschlossener Weg hat denselben Anfangs- und Endpunkt wie ein punktförmiger Weg. Das Wegintegral über einen Punktweg ist aber immer Null. Also gilt dies auch für beliebige geschlossene Wege.

(iii) ⇒ (ii) Seien ω_1 und ω_2 zwei D^1-Wege in Ω mit gleichem Anfangs- und Endpunkt. Bilden wir einen neuen Weg χ, indem wir erst ω_1 und dann ω_2 in umgekehrter Richtung durchlaufen, so erhalten wir einen geschlossenen Weg, für den gilt:

$$0 = \int_\chi \alpha = \int_{\omega_1} \alpha - \int_{\omega_2} \alpha.$$

Das ist gleichbedeutend mit der Behauptung.

(ii) ⇒ (i) Dies ist der wesentliche Teil des Satzes. Da nach Voraussetzung jedes Wegintegral von α nur vom Anfangs- und Endpunkt abhängt, können wir eine Funktion $f : \Omega \to \mathbb{R}$ durch

$$f(x) := \int_{x_0}^{x} \alpha$$

definieren, indem wir einen beliebigen Punkt $x_0 \in \Omega$ fixieren und das Integral über einen *beliebigen* Weg in Ω von x_0 nach x bilden. Zu zeigen ist, dass dies eine Stammfunktion von α definiert.

Betrachte $x \in \Omega$. Für alle hinreichend kleinen h liegt $[x, x+h]$ ganz in Ω, und aufgrund der Wegunabhängigkeit des Integrals ist

$$f(x+h) - f(x) = \int_{x_0}^{x+h} \alpha - \int_{x_0}^{x} \alpha = \int_{[x,x+h]} \alpha.$$

Parametrisieren wir $[x, x+h]$ durch $t \mapsto x + th$ mit $0 \leqslant t \leqslant 1$, so folgt

$$f(x+h) - f(x) = \int_0^1 \alpha(x+th)h \, \mathrm{d}t.$$

Subtrahieren wir $\alpha(x)h$, so erhalten wir

$$f(x+h) - f(x) - \alpha(x)h = \int_0^1 [\alpha(x+th) - \alpha(x)] \, h \, \mathrm{d}t.$$

Aufgrund der Stetigkeit von α ist aber $[\alpha(x+th) - \alpha(x)]\, h = o(h)$, also

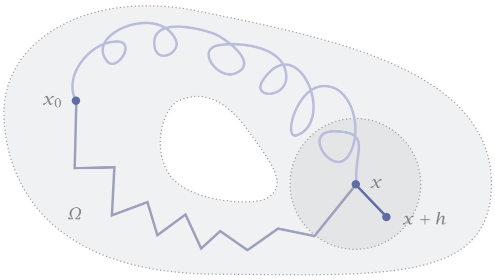
$$f(x+h) = f(x) + \alpha(x)h + o(h).$$

Somit ist f im Punkt x total differenzierbar, und es gilt

$$\mathrm{d}f(x)h = Df(x)h = \alpha(x)h.$$

Somit ist $\mathrm{d}f = \alpha$, was zu zeigen war. ⟫⟫⟫

Abb 6 Definition von $f(x) = \int_{x_0}^{x} \alpha$



18.4 Lokal exakte 1-Formen

Der letzte Satz 10 charakterisiert exakte 1-Formen eindeutig über die Wegunabhängigkeit. Doch ist das Kriterium wenig praktikabel, da man nicht alle Wegintegrale überprüfen kann. Dagegen ist es leicht, eine *notwendige* Bedingung zu formulieren.

11 **Integrabilitätsbedingung** *Ist eine 1-Form $\alpha = \sum_{k=1}^{n} a_k \,\mathrm{d}x_k$ exakt und stetig differenzierbar, so erfüllen ihre Koeffizienten die Integrabilitätsbedingung*

$$\partial_l a_k = \partial_k a_l, \qquad 1 \leqslant k, l \leqslant n. \quad ⋊$$

⟨⟨⟨⟨ Nach Voraussetzung ist

$$\alpha = \mathrm{d}f = \sum_{k=1}^{n} \partial_k f \,\mathrm{d}x_k$$

mit einer stetig differenzierbar Funktion f. Ist α stetig differenzierbar, so sind alle partiellen Ableitungen von f nochmals stetig differenzierbar. Somit ist f sogar C^2, und mit dem Lemma von Schwarz 14.22 gilt

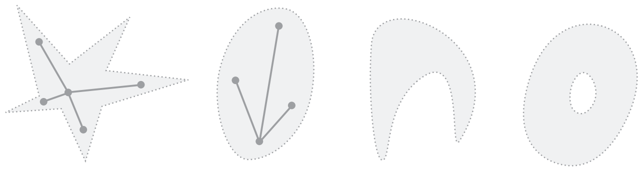
$$\partial_l a_k = \partial_l(\partial_k f) = \partial_k(\partial_l f) = \partial_k a_l, \qquad 1 \leqslant k, l \leqslant n. \quad ⟩⟩⟩⟩$$

Definition *Eine stetig differenzierbare 1-Form heißt geschlossen, wenn sie die Integrabilitätsbedingungen 11 erfüllt.* ⋊

12 **Korollar** *Jede stetig differenzierbare exakte 1-Form ist geschlossen.* ⋊

13 ⊳ A. Auf dem $\mathbb{R}^2$ ist $u \,\mathrm{d}x + v \,\mathrm{d}y$ geschlossen, falls $\partial_y u = \partial_x v$.
B. Somit ist $y^2 \,\mathrm{d}x + \mathrm{d}y$ nicht geschlossen, da $\partial_y(y^2) = 2y \neq 0 = \partial_x(1)$.

Abb 7 Sternförmige und nicht sternförmige Mengen



C. Die Windungsform υ_5 ist geschlossen, denn

$$\partial_x\left(\frac{-x}{x^2+y^2}\right)=\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}=\partial_y\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right).$$

D. Auf dem $\mathbb{R}^3$ ist $\alpha = u\,\mathrm{d}x + v\,\mathrm{d}y + w\,\mathrm{d}z$ geschlossen, falls

$$\partial_y w = \partial_z v, \qquad \partial_z u = \partial_x w, \qquad \partial_x v = \partial_y u.$$

Dies ist äquivalent zu

$$\nabla \times \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} w_y - v_z \\ u_z - w_x \\ v_x - u_y \end{pmatrix} = 0.$$

Man nennt dies auch die *Rotation* des Vektorfelds $(u, v, w)^\top$. ◂

Das Lemma von Poincaré

Die Frage stellt sich, ob umgekehrt jede geschlossene 1-Form exakt ist. Die Antwort hierauf hat einen lokalen und einen globalen Aspekt. Lokal ist dies immer der Fall, wenn das Definitionsgebiet folgende geometrische Gestalt hat.

Definition *Eine Teilmenge M des $\mathbb{R}^n$ heißt sternförmig, wenn es einen Punkt $m \in M$ gibt, so dass $[m, x] \subset M$ für alle $x \in M$. Jeder solche Punkt m heißt ein Zentrum von M.* ⋊

Jede sternförmige Menge ist wegzusammenhängend, aber natürlich ist nicht jede wegzusammenhängende Menge sternförmig – siehe Abbildung 7.

▹ A. Jedes Intervall ist sternförmig bezüglich jedes seiner Punkte.
B. Die geschlitzte Ebene $\mathbb{R}^2 \smallsetminus (0, \infty)$ ist sternförmig mit Zentrum 0.
C. Die gepunktete Ebene $\mathbb{R}^2 \smallsetminus \{0\}$ ist *nicht* sternförmig.
D. Eine Menge ist sternförmig bezüglich jedes ihrer Punkte genau dann, wenn sie konvex ist. ◂

14 **Lemma von Poincaré** *Jede geschlossene 1-Form auf einem sternförmigen Gebiet ist exakt.* ⋊

Zunächst eine Vorüberlegung. *Falls* $\alpha = \mathrm{d}f$, also

$$\alpha(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k(x)\,\mathrm{d}x_k = \sum_{k=1}^{n} \partial_k f(x)\,\mathrm{d}x_k,$$

so gilt auch

$$\alpha(tx)x = \sum_{k=1}^{n} a_k(tx)x_k = \sum_{k=1}^{n} \partial_k f(tx)x_k = \partial_t f(tx).$$

Somit können wir f aus α rekonstruieren, indem wir $\alpha(tx)x$ über $[0,1]$ integrieren. Diese Beobachtung ist die Grundlage des folgendes Beweises.

⟪⟪ *Beweis des Lemmas von Poincaré* Sei α eine geschlossene 1-Form auf einer offenen sternförmigen Menge Ω. Durch Translation der Koordinaten können wir erreichen, dass Ω sternförmig bezüglich 0 ist. Dann ist

$$f(x) = \int_0^1 \alpha(tx)x\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \sum_{l=1}^{n} a_l(tx)x_l\,\mathrm{d}t$$

für jedes $x \in \Omega$ wohldefiniert, denn der Integrationsweg $[0,x]$ ist in Ω enthalten und die Koeffizienten von α sind stetig differenzierbar auf Ω. Also definiert dies eine Funktion $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$.

Da die Koeffizienten a_k in jeder Variablen x_k stetig differenzierbar sind, ist es auch f 14.23, und wir erhalten $\partial_k f$ durch Differenziation unter dem Integral. Es gilt also

$$\begin{aligned}\partial_k f(x) &= \int_0^1 \sum_{l=1}^{n} \partial_k(a_l(tx)x_l)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 \Big(a_k(tx) + t\sum_{l=1}^{n} \partial_k a_l(tx)x_l\Big)\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Aufgrund der Integrabilitätsbedingung ist aber $\partial_k a_l = \partial_l a_k$, und weiter ist

$$a_k(tx) + t\sum_{l=1}^{n} \partial_l a_k(tx)x_l = \partial_t(ta_k(tx)).$$

Also erhalten wir insgesamt

$$\partial_k f(x) = \int_0^1 \partial_t(ta_k(tx))\,\mathrm{d}t = ta_k(tx)\Big|_0^1 = a_k(x).$$

Das war zu zeigen. ⟫⟫

Auf sternförmigen Gebieten ist jede geschlossene 1-Form also exakt. Dies können sehr große Gebiete sein. Auf jeden Fall schließt es aber kleine Umgebungen eines jeden Punktes ein. Somit erhalten wir folgendes lokales Resultat.

15 **Korollar** *Jede geschlossene 1-Form ist lokal exakt.* ⋊

Die Frage, wann aus der lokalen auch die globale Exaktheit folgt, betrachten wir im nächsten Abschnitt.

18.5 Global exakte 1-Formen

Eine lokal exakte 1-Form ist nicht notwendigerweise auch global exakt. Zum Beispiel ist die Windungsform υ [5] geschlossen [13] und daher *lokal* exakt. Sie ist aber *nicht global* exakt, da ihr Integral längs dem geschlossenen Einheitskreis nicht Null ist [5].

Wir wissen bereits, dass notwendig und hinreichend für die Exaktheit einer Form die Unabhängigkeit ihrer Wegintegrale vom *Verlauf* der Wege ist [10]. Als Erstes stellen wir nun fest, dass dies für lokal exakte Formen jedenfalls immer dann gilt, wenn diese Wege ineinander deformiert werden können. Hierzu benötigen wir den Begriff der *Homotopie* von Kurven.

Definition *Zwei stetige Kurven $\gamma_0, \gamma_1\colon [a,b] \to \Omega$ mit gemeinsamen Anfangspunkt p und Endpunkt q heißen homotop in Ω, wenn es eine stetige Abbildung*

$$h\colon \ [0,1] \times [a,b] \to \Omega, \quad (s,t) \mapsto h(s,t) =: h_s(t),$$

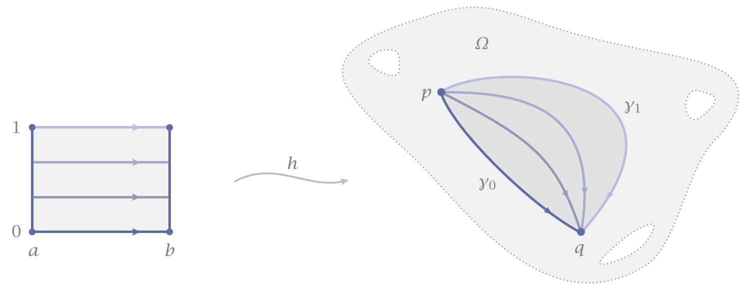
gibt, so dass

$$h_0 = \gamma_0, \qquad h_1 = \gamma_1$$

sowie $h(s,a) = p$ und $h(s,b) = q$ für alle $0 \leqslant s \leqslant 1$. ⋊

Für jedes $s \in [0,1]$ ist also h_s eine stetige Kurve von p nach q innerhalb von Ω, die für $s = 0$ mit γ_0 und für $s = 1$ mit γ_1 übereinstimmt. Da h auch stetig in s ist, erhalten wir eine stetige Deformation der Kurve γ_0 in die Kurve γ_1, wobei die Endpunkte fixiert sind. Wichtig ist, dass diese Homotopie ganz in Ω verläuft. Die Kurven γ_s dürfen nicht über ›Löcher‹ in Ω hinweggezogen werden – siehe Abbildung 8.

Abb 8 Homotopie von γ_0 und γ_1 in Ω



▷ Sind $\gamma_0, \gamma_1 \colon [a,b] \to \Omega$ zwei Kurven in Ω mit gemeinsamen Anfangs- und Endpunkt, und gilt

$$[\gamma_0(t), \gamma_1(t)] \subset \Omega, \qquad 0 \leqslant t \leqslant 1,$$

so sind sie homotop mittels der Homotopie $h \colon [0,1] \times [a,b] \to \Omega$ mit

$$h(s,t) = (1-s)\gamma_0(t) + s\gamma_1(t). \quad ◁$$

Da wir entlang den Kurven in einer Homotopie integrieren wollen, benötigen wir noch etwas mehr als nur die Stetigkeit.

Definition *Zwei Kurven $\gamma_0, \gamma_1 \colon [a,b] \to \Omega$ mit gleichem Anfangs- und Endpunkt sind D^1-homotop, wenn es eine Homotopie $h \colon [0,1] \times [a,b] \to \Omega$ dieser Kurven gibt, die auf jedem horizontalen oder vertikalen Schnitt des Rechtecks $[0,1] \times [a,b]$ stückweise stetig differenzierbar ist.* ⋊

Ein *horizontaler Schnitt* ist hierbei eine Teilmenge

$$\{s\} \times [a,b] \subset [0,1] \times [a,b].$$

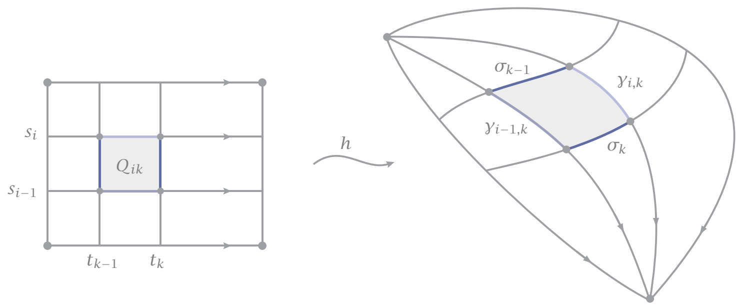
Entsprechend sind vertikale Schnitte erklärt.

16 **Homotopiesatz** *Sei α eine lokal exakte 1-Form auf Ω. Sind γ_0 und γ_1 zwei D^1-homotope Kurven in Ω, so gilt*

$$\int_{\gamma_0} \alpha = \int_{\gamma_1} \alpha. \quad ⋊$$

⟨⟨⟨⟨ Sei $Q = [0,1] \times [a,b]$ und $h \colon Q \to \Omega$ eine D^1-Homotopie von γ_0 und γ_1 in Ω. Zuerst zeigen wir, dass sich Q so in *endlich viele* gleich große achsenparallele Rechtecke zerlegen lässt, dass α auf dem Bild jedes dieser Rechtecke exakt ist.

Abb 9 Zum Beweis des Homotopiesatzes



Angenommen, dies ist *nicht* möglich. Dann können wir eine fallende Folge abgeschlossener Rechtecke $Q \supset Q_1 \supset Q_2 \supset ..$ konstruieren, jedes ein Viertel so groß wie das vorangehende, so dass α auf dem Bild von Q_k keine Stammfunktion besitzt. Der Durchschnitt aller Q_k ist dann ein Punkt $r \in Q$. Nach dem Lemma von Poincaré $_{14}$ ist aber α in einer offenen Umgebung U von $h(r)$ exakt. Diese Umgebung enthält aber die Bilder der Q_k mit k hinreichend groß. Somit erhalten wir einen Widerspruch.

Es gibt somit Teilungen $(s_1, .., s_m)$ von $[0,1]$ und $(t_1, .., t_n)$ von $[a,b]$ so, dass α in einer Umgebung des Bildes jedes Rechtecks

$$Q_{ik} = [s_{i-1}, s_i] \times [t_{k-1}, t_k], \qquad 1 \leqslant i \leqslant m, \quad 1 \leqslant k \leqslant n,$$

exakt ist. Wir zeigen nun, dass die Integrale entlang der Kurven $\gamma_i \coloneqq h_{s_i}$ für sukzessive Teilungspunkte unverändert bleiben, also

$$\int_{\gamma_{i-1}} \alpha = \int_{\gamma_i} \alpha, \qquad 1 \leqslant i \leqslant m,$$

gilt. Daraus folgt dann die Behauptung. — Betrachte dazu die Kurvenabschnitte

$$\gamma_{i,k} = h(s_i, \cdot)\Big|_{[t_{k-1}, t_k]}, \qquad 1 \leqslant k \leqslant n,$$

sowie die Verbindungskurven

$$\sigma_k = h(\cdot, t_k)\Big|_{[s_{i-1}, s_i]}, \qquad 0 \leqslant k \leqslant n.$$

Diese sind sämtlich stückweise stetig differenzierbar, es gilt

$$\gamma_{i-1,k} + \sigma_k = \sigma_{k-1} + \gamma_{i,k},$$

und gemeinsam bilden diese Kurven den Rand des Bildes des Rechtecks Q_{ik} unter h. Nach Konstruktion ist α exakt in einer Umgebung dieser Menge, und daher das Wegintegral entlang beider Kurven gleich. Es gilt also

$$\int_{\gamma_{i-1,k}} \alpha + \int_{\sigma_k} \alpha = \int_{\sigma_{k-1}} \alpha + \int_{\gamma_{i,k}} \alpha.$$

Da dies für jedes $1 \leqslant k \leqslant n$ gilt, ergibt Aufsummieren über k und Kürzen der Integrale über $\sigma_1, .., \sigma_{m-1}$ die Gleichung

$$\sum_{k=1}^{n} \int_{\gamma_{i-1,k}} \alpha + \int_{\sigma_m} \alpha = \int_{\sigma_0} \alpha + \sum_{k=1}^{n} \int_{\gamma_{i,k}} \alpha. \tag{1}$$

Die Integrale über σ_0 und σ_n sind aber Null, da es sich um Punktkurven handelt. Also folgt

$$\int_{\gamma_{i-1}} \alpha = \sum_{k=1}^{n} \int_{\gamma_{i-1,k}} \alpha = \sum_{k=1}^{n} \int_{\gamma_{i,k}} \alpha = \int_{\gamma_i} \alpha. \qquad \rangle\rangle\rangle\rangle\rangle$$

Der Homotopiesatz gilt für beliebige D^1-homotope Kurven mit festem Anfangs- und Endpunkt. Für *geschlossene* Kurven kann man aber diese letzte Forderung fallen lassen. Dies führt zum Begriff der *freien Homotopie*.

Definition *Zwei geschlossene Kurven $\gamma_0, \gamma_1 : [a,b] \to \Omega$ heißen frei homotop in Ω, wenn es eine stetige Abbildung*

$$h : [0,1] \times [a,b] \to \Omega, \quad (s,t) \mapsto h(s,t) = h_s(t),$$

gibt, so dass

$$h_0 = \gamma_0, \qquad h_1 = \gamma_1$$

sowie $h(s,a) = h(s,b)$ für alle $0 \leqslant s \leqslant 1$. ⋊

Alle Kurven h_s der Homotopie verlaufen also in Ω und sind geschlossen. *Frei D^1-homotope Kurven* sind analog zu D^1-homotope Kurven definiert.

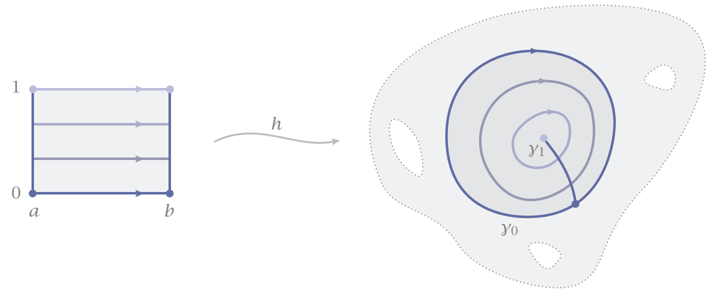
17 **Freier Homotopiesatz** *Sei α eine lokal exakte 1-Form auf Ω. Sind γ_0 und γ_1 zwei geschlossene, in Ω frei D^1-homotope Kurven, so gilt*

$$\int_{\gamma_0} \alpha = \int_{\gamma_1} \alpha. \qquad ⋊$$

⟨⟨⟨⟨⟨ Der Beweis ist identisch mit dem letzten Beweis, bis auf die Bemerkung über die σ-Integrale in (1). Diese sind nicht Null, sondern *gleich*. Die Folgerung hieraus gilt also ebenfalls. ⟩⟩⟩⟩⟩

Ein wichtiger Spezialfall dieses Satzes ergibt sich für *nullhomotope Kurven*. Dies sind geschlossene Kurven, die frei homotop zu einer Punktkurve sind. Da das Kurvenintegral einer beliebigen 1-Form über eine Punktkurve verschwindet, erhalten wir folgenden

Abb 10 Freie Homotopie von γ_0 zu einer Punktkurve γ_1



18 **Satz** *Ist α eine lokal exakte 1-Form auf Ω, so ist*

$$\int_\gamma \alpha = 0$$

für jede in Ω D^1-nullhomotope Kurve γ. ⋊

Wir kommen nun zurück zu der Frage, wann eine lokal exakte 1-Form auch global exakt ist. Wir wissen bereits, dass dies genau dann der Fall ist, wenn ihr Wegintegral entlang jedes geschlossenen Weges verschwindet 10. Aufgrund des letzten Satzes ist dies sicher immer dann der Fall, wenn jede geschlossene Kurve nullhomotop ist. Dies ist nun eine rein topologische Frage und betrifft ausschließlich die Geometrie des Gebietes.

Definition *Eine wegzusammenhängende Teilmenge M in $\mathbb{R}^n$ heißt einfach zusammenhängend, wenn jede geschlossene Kurve in M nullhomotop ist.* ⋊

▷ A. Eine sternförmige Menge ist einfach zusammenhängend, denn jede geschlossene Kurve lässt sich frei homotop zu einem Zentrum zusammenziehen.

B. Die Sphären $\mathbb{S}^n$ sind einfach zusammenhängend für $n \geqslant 2$.

C. Der punktierte Raum $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ ist einfach zusammenhängend.

Abb 11 Einfach zusammenhängende Menge, und nicht

D. Die punktierte Ebene $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ ist *nicht* einfach zusammenhängend.
E. Ebensowenig ist die Kreislinie $\mathbb{S}^1$ einfach zusammenhängend.
F. Der Raum $\mathbb{R}^3$ ohne eine der Koordinatenachsen ist ebenfalls nicht einfach zusammenhängend. ◀

19 **Satz** *Auf einem einfach zusammenhängenden Gebiet Ω ist jede lokal exakte 1-Form auch global exakt. Insbesondere gilt*

$$\int_\gamma \alpha = 0$$

für jede geschlossene D^1-Kurve in Ω. ⋊

⟨⟨⟨⟨ Das Wegintegral einer lokal exakten 1-Form entlang eines beliebigen geschlossenen Weges ist invariant unter freien Homotopien. In einem einfach zusammenhängenden Gebiet ist jede solche Kurve nullhomotop, und damit jedes solche Wegintegral Null. Also ist die lokal exakte 1-Form auch global exakt $_{10}$. ⟩⟩⟩⟩

Bemerkung Der letzte Satz bietet auch eine Möglichkeit zu zeigen, dass ein Gebiet *nicht* einfach zusammenhängend ist. Dies ist der Fall, wenn das Wegintegral einer geschlossenen 1-Form entlang eines einzigen geschlossenen Weges *nicht* Null ist. Eine geeignete 1-Form hierfür ist meist die Windungsform υ $_5$. ⊸

Als letzten Satz erwähnen wir eine Anwendung aus der klassischen Mechanik. Tatsächlich standen solche Anwendungen am Anfang der Entwicklung des Kalküls der Wegintegrale.

20 **Satz** *Auf einem einfach zusammenhängenden Gebiet im $\mathbb{R}^3$ ist jedes stetig differenzierbare Vektorfeld V mit $\nabla \times V = 0$ ein Gradientenfeld, also*

$$V = \nabla U$$

mit einer zweimal stetig differenzierbaren Funktion U. ⋊

⟨⟨⟨⟨ Die Bedingung $\nabla \times V = 0$ ist gleichbedeutend damit, dass die dem Vektorfeld V mittels des Standardskalarprodukts zugeordnete 1-Form α_V geschlossen ist $_{13}$. Also ist α_V lokal exakt. Auf einem einfach zusammenhängenden Gebiet ist sie dann auch global exakt $_{19}$. Es gibt also eine stetig differenzierbare Funktion U mit $\mathrm{d}U = \alpha_V$. Dies ist aber gleichbedeutend mit

$$\nabla U = V.$$

Da außerdem V C^1 ist, ist U selbst C^2. ⟩⟩⟩⟩