

2

Reelle Zahlen

Die reellen Zahlen bilden das Fundament der gesamten Analysis. Es ist daher sinnvoll, sich zunächst Klarheit über dieses Fundament zu verschaffen.

Der *konstruktive* - und historisch korrekte - Zugang beginnt bei den natürlichen Zahlen und führt über die Konstruktion der ganzen und der rationalen Zahlen zu den reellen Zahlen. Jedes Mal ist ein neues Zahlensystem auf dem vorangehenden aufzubauen, und es sind die gewünschten Eigenschaften nachzuweisen. Man erhält so ein tief gegründetes Fundament, doch ist die sorgfältige Ausführung langwierig, um nicht zu sagen langweilig. Auch trägt es unmittelbar wenig zum Verständnis der *eigentlichen* Analysis bei.

Der *axiomatische* - und hier beschriebene - Zugang zu den reellen Zahlen ist direkter. Er besteht darin, eine endliche Anzahl von Postulaten - die sogenannten *Axiome* - zu formulieren, die den Ausgangspunkt für *alle* weiteren Schlüsse bilden. Diese Axiome werden nicht weiter hinterfragt. Sie mögen evident sein, Diese Axiome machen keine Aussage, was die reellen Zahlen *sind*. Sie legen nur fest, welche *Eigenschaften* sie haben. Und nur diese Eigenschaften sind für alles Folgende relevant. — Ziel dieses Kapitels ist die folgende

Charakterisierung der reellen Zahlen Die reellen Zahlen bilden einen vollständigen angeordneten Körper, der mit \mathbb{R} bezeichnet wird. ✕

Im Einzelnen geht es um folgende Eigenschaften:

- (i) Die reellen Zahlen bilden einen *Körper*.
- (ii) Dieser Körper besitzt eine *Ordnungsstruktur*.
- (iii) Und er ist - in einem noch zu definierenden Sinn - *vollständig*.

Die Tatsache, dass wir mit einer einzigen Bezeichnung für diesen Körper auskommen, impliziert noch eine vierte Eigenschaft:

- (iv) Es gibt im Wesentlichen nur *einen* Körper mit diesen Eigenschaften. Darum wird es in den nächsten Abschnitten gehen.

2.1

Die Körperaxiome

Zunächst einmal bilden die reellen Zahlen einen *Körper*. Das ist eine Menge, in der zwei Operationen erklärt sind, die üblicherweise als Addition und Multiplikation bezeichnet werden und die den folgenden *Körperaxiomen* genügen.

- 1 **Körperaxiome** Eine Menge \mathbb{K} mit zwei Operationen $+$ und \cdot , genannt *Addition* und *Multiplikation*, heißt *Körper*, wenn in ihm die folgenden Axiome gelten:

die *Axiome der Addition*:

- (A-1) Die Addition ist assoziativ und kommutativ,
 (A-2) Es gibt ein Element $0 \in \mathbb{K}$, genannt *neutrales Element der Addition*, so dass $x + 0 = x$ für alle $x \in \mathbb{K}$,
 (A-3) Zu jedem Element $x \in \mathbb{K}$ existiert ein Element $y \in \mathbb{K}$, genannt das *additiv Inverse* zu x , so dass $x + y = 0$,

die *Axiome der Multiplikation*:

- (M-1) Die Multiplikation ist assoziativ und kommutativ,
 (M-2) Es gibt ein Element $1 \in \mathbb{K}$ verschieden von 0, genannt *neutrales Element der Multiplikation*, so dass $x \cdot 1 = x$ für alle $x \in \mathbb{K}$,
 (M-3) Zu jedem Element $x \in \mathbb{K}$ verschieden von 0 existiert ein Element $y \in \mathbb{K}$, genannt das *multiplikativ Inverse* zu x , so dass $x \cdot y = 1$,

und das *Distributivgesetz*:

- (D) Für alle $x, y, z \in \mathbb{K}$ gilt $x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)$. \times

Genauer gesagt ist ein Körper ein *Tripel* $(\mathbb{K}, +, \cdot)$, bestehend aus einer Menge \mathbb{K} mit zwei Operationen $+$ und \cdot mit den oben genannten Eigenschaften. Ist aber klar, welche Operationen gemeint sind, spricht man einfach vom *Körper* \mathbb{K} .

Um Klammern zu sparen, vereinbart man, dass ›Punktoperationen‹ stärker binden als ›Strichoperationen‹. Auch lässt man meistens den Punkt weg und schreibt $x y$ für $x \cdot y$. Das Distributivgesetz lautet dann beispielsweise

$$x(y + z) = xy + xz.$$

- 2 \blacktriangleright *Beispiele für Körper* A. Der kleinste Körper ist $\mathbb{F} = \{0, 1\}$, wenn man

$$1 + 1 = 0$$

definiert und ansonsten wie üblich addiert und multipliziert.

B. Die Menge \mathbb{Q} der rationalen Zahlen mit der üblichen Addition und Multiplikation bildet einen Körper.

C. Dasselbe gilt für die Menge \mathbb{C} der komplexen Zahlen.

D. Die Menge

$$\mathbb{Q}(\sqrt{2}) := \{a \oplus b\sqrt{2} : a, b \in \mathbb{Q}\}$$

bildet einen Körper mit den Operationen

$$\begin{aligned}(a \oplus b\sqrt{2}) \oplus (c \oplus d\sqrt{2}) &:= (a + c) \oplus (b + d)\sqrt{2}, \\ (a \oplus b\sqrt{2}) \odot (c \oplus d\sqrt{2}) &:= (ac + 2bd) \oplus (ad + bc)\sqrt{2}.\end{aligned}$$

Das multiplikativ Inverse eines Elementes ungleich Null ist beispielsweise

$$(a \oplus b\sqrt{2})^{-1} = \frac{a}{a^2 - 2b^2} \oplus \frac{-b}{a^2 - 2b^2} \sqrt{2}.$$

Der Nenner verschwindet nicht, da $\sqrt{2}$ nicht rational ist 1.7.

E. Eine rationale Funktion mit rationalen Koeffizienten ist gegeben durch einen Ausdruck der Gestalt

$$\frac{a_m x^m + \dots + a_1 x + a_0}{b_n x^n + \dots + b_1 x + b_0}, \quad m, n \geq 0,$$

mit $a_0, \dots, a_m, b_0, \dots, b_n \in \mathbb{Q}$ und $b_n \neq 0$. Die Menge \mathbb{M} dieser Funktionen mit der üblichen Addition und Multiplikation bildet einen Körper. ◀

Zunächst bemerken wir, dass bereits aus den Axiomen folgt, dass die neutralen und die inversen Elemente immer eindeutig sind. Dies muss also nicht explizit gefordert werden.

3 **Lemma** *In einem Körper sind die neutralen und inversen Elemente eindeutig bestimmt.* ✕

⟨⟨⟨ Sei $\tilde{0}$ ein weiteres neutrales Element der Addition. Dann gilt (A-2) sowohl für 0 als auch für $\tilde{0}$. Zusammen mit (A-1) ergibt sich hieraus

$$\tilde{0} = \tilde{0} + 0 = 0 + \tilde{0} = 0,$$

also $\tilde{0} = 0$. Damit ist die Eindeutigkeit des neutralen Elementes gezeigt.

Ist \tilde{y} neben y ein weiteres additiv Inverses zu x , so folgt aus $x + y = 0$ und $x + \tilde{y} = 0$ und der Assoziativität und Kommutativität der Addition

$$\tilde{y} = \tilde{y} + 0 = \tilde{y} + (x + y) = y + (x + \tilde{y}) = y + 0 = y.$$

Also ist $\tilde{y} = y$. — Entsprechend argumentiert man für die Multiplikation. ⟩⟩⟩

Man schreibt nun $-x$ für das additiv Inverse zu x , und x^{-1} oder $1/x$ für sein multiplikativ Inverses, falls $x \neq 0$. Ferner vereinbart man die Schreibweisen

$$x - y := x + (-y)$$

und, für $y \neq 0$,

$$\frac{x}{y} := x/y := xy^{-1}.$$

Mit diesen Vereinbarungen erhalten wir die Lösungen der Gleichungen $a + x = b$ und $ax = b$ in vertrauter Form.

4 **Satz** In einem Körper \mathbb{K} besitzt jede Gleichung

(i) $a + x = b$ die eindeutige Lösung $x = b - a$,

(ii) $ax = b$ für $a \neq 0$ die eindeutige Lösung $x = b/a$. \times

⟨⟨⟨ Gilt $b = a + x$, so folgt nach Addition des Inversen $-a$ von a mit (A-1) und (A-3) und den vereinbarten Schreibweisen

$$\begin{aligned} b - a &= b + (-a) = (a + x) + (-a) \\ &= (a + (-a)) + x = 0 + x = x. \end{aligned}$$

Entsprechend für die Multiplikation. ⟩⟩⟩

■ Rechenregeln

Die folgenden Rechenregeln sind für die reellen Zahlen wohlvertraut. Sie folgen unmittelbar aus den Körperaxiomen. Somit gelten sie in *jedem anderen* Körper ebenso, ohne dass man dies noch einmal beweisen müsste.

5 **Rechenregeln** In einem Körper \mathbb{K} gilt:

(i) $-(-x) = x$,

(ii) $(x^{-1})^{-1} = x$ für $x \neq 0$,

(iii) $0 \cdot x = 0$,

(iv) $(-1) \cdot x = -x$,

(v) $x(y - z) = xy - xz$,

(vi) $xy = 0 \Rightarrow x = 0 \vee y = 0$. \times

⟨⟨⟨ (i) Aus

$$(-x) + x = x + (-x) = 0$$

folgt, dass x das additive Inverse zu $-x$ ist. Also ist $-(-x) = x$ aufgrund der vereinbarten Notation.

(ii) Analog zu (i).

(iii) Es ist $0 = 0 + 0$, und mit dem Distributivgesetz

$$0 \cdot x = (0 + 0) \cdot x = 0 \cdot x + 0 \cdot x.$$

Addition des additiv Inversen von $0 \cdot x$ auf beiden Seiten ergibt $0 = 0 \cdot x$.

(iv) Mit (iii) ist

$$0 = 0 \cdot x = (1 + (-1)) \cdot x = 1 \cdot x + (-1) \cdot x = x + (-1) \cdot x.$$

Also ist $(-1) \cdot x$ das additiv Inverse zu x , also $-x$.

(v) Mit (iv) erhält man

$$\begin{aligned} x(y - z) &= x(y + (-1) \cdot z) \\ &= xy + (-1) \cdot xz \\ &= xy + (-xz) = xy - xz. \end{aligned}$$

(vi) Sei $xy = 0$. Ist $x = 0$, so sind wir fertig. Ist $x \neq 0$, so können wir die Gleichung mit x^{-1} multiplizieren, und mit (iii) folgt $y = 0$. \ggg

Wegen (vi) ist in einem Körper ein Produkt also nur dann 0, wenn wenigstens ein Faktor 0 ist. Man sagt, ein Körper ist *nullteilerfrei*.

Mit (i) und (iv) folgt übrigens die wohlbekanntete Rechenregel

$$(-1) \cdot (-1) = -(-1) = 1,$$

die hiermit auch bewiesen ist. Wir werden alle diese Regeln im Folgenden verwenden, ohne explizit auf diesen Satz zu verweisen.

Bemerkung Wir haben etwas mühsam Dinge bewiesen, die wir über die reellen Zahlen ›immer schon‹ wussten. Der Satz gilt aber in jedem *beliebigen* Körper, also auch dann, wenn dessen Elemente mit reellen Zahlen keine Ähnlichkeit haben, und die Zeichen $+$ und \cdot etwas völlig anderes bedeuten. Darin liegt die Stärke der axiomatischen Methode: Gelten die Körperaxiome, so gelten auch sofort eine Fülle weiterer Sätze, unabhängig davon, was man sich unter dem Körper vorstellt. \rightarrow

\Rightarrow *Beispiel* In jedem Körper gelten die Regeln des Bruchrechnens, wie zum Beispiel

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}, \quad \text{falls } bd \neq 0. \quad \blacktriangleleft$$

\llll Aus den Axiomen folgt mit den vereinbarten Bezeichnungen

$$\begin{aligned} (ab^{-1} + cd^{-1})(bd) &= ab^{-1}bd + cd^{-1}bd \\ &= ab^{-1}bd + cd^{-1}db \\ &= ad + bc. \end{aligned}$$

Somit ist $ab^{-1} + cd^{-1} = (ad + bc)(bd)^{-1}$, und das ist die Behauptung. \gggg

2.2

Die Anordnungsaxiome

Reelle Zahlen kann man nicht nur addieren und multiplizieren, man kann sie auch hinsichtlich ihrer Größe vergleichen. Sie bilden eine *total geordnete Menge*.

Die folgende Definition entspricht der Charakterisierung einer totalen Ordnung im Trichotomiesatz 1.13.

Definition Eine *total geordnete Menge* ist eine Menge M mit einer Relation, üblicherweise mit $<$ bezeichnet, mit folgenden Eigenschaften:

- (i) *Trichotomie*: Für je zwei Elemente $a, b \in M$ gilt genau eine der Aussagen

$$a < b, \quad a = b, \quad b < a.$$

- (ii) *Transitivität*: Für $a, b, c \in M$ gilt

$$a < b \wedge b < c \Rightarrow a < c. \quad \times$$

Genauer ist eine total geordnete Menge ein *Paar* $(M, <)$, bestehend aus einer Menge M und einer totalen Ordnung $<$ auf ihr. Ist klar, welche Ordnung gemeint sind, spricht man einfach von der *total geordneten Menge* M .

- *Beispiele* A. Die Mengen $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ mit dem üblichen $<$ sind total geordnet.
 B. Die Potenzmenge einer Menge mit mindestens zwei Elementen ist bezüglich \subseteq *nicht* total geordnet. ◀

Eine totale Ordnung eines *Körpers* ist allerdings nur interessant, wenn sich diese auch mit den Körperoperationen verträgt. Dies wird in den folgenden Axiomen gefordert.

Anordnungsaxiome Ein Körper \mathbb{K} heißt *angeordnet*, wenn er durch eine Relation $<$ total geordnet wird, so dass für alle $a, b, c \in \mathbb{K}$ gilt:

$$(O-1) \quad a < b \Rightarrow a + c < b + c,$$

$$(O-2) \quad 0 < a \wedge 0 < b \Rightarrow 0 < ab. \quad \times$$

Ein *angeordneter Körper* ist also genauer ein *Quadrupel* $(\mathbb{K}, +, \cdot, <)$ aus einem Körper \mathbb{K} mit Addition $+$, Multiplikation \cdot und totaler Ordnung $<$. Sind alle diese Bestandteile aus dem Kontext klar, sprechen wir einfach vom *angeordneten Körper* \mathbb{K} .

- *Beispiel* A. Der Körper \mathbb{Q} mit der üblichen Ordnung ist angeordnet.
 B. Der Körper $\mathbb{F} = \{0, 1\}_2$ kann *nicht* angeordnet werden. Denn wäre $0 < 1$, so wäre wegen (O-1) auch

$$1 = 0 + 1 < 1 + 1 = 0,$$

ein Widerspruch. Dasselbe geschieht mit der Annahme $1 < 0$.

c. Die komplexen Zahlen wird durch die *lexikographische Ordnung*

$$a + bi < c + di \Leftrightarrow (a < c) \vee (a = c \wedge b < d)$$

total geordnet. Diese verträgt sich allerdings *nicht* mit den Körperoperationen. In der Tat kann der Körper \mathbb{C} nicht angeordnet werden ??.

d. Im Körper \mathbb{M} der rationalen Funktionen mit rationalen Koeffizienten \mathbb{Q} wird eine totale Ordnung definiert, wenn man Funktionen mit $a_n b_m > 0$ als positiv definiert. ◀

Noch etwas Notation und Terminologie. Man definiert

$$a \leq b \Leftrightarrow a < b \vee a = b$$

sowie $a > b \Leftrightarrow b < a$ und $a \geq b \Leftrightarrow b \leq a$. Ein Element $a \in \mathbb{K}$ heißt *positiv* im Fall $a > 0$, *nichtnegativ* im Fall $a \geq 0$, *nichtpositiv* im Fall $a \leq 0$, und *negativ* im Fall $a < 0$. Dies dürfte nicht weiter überraschen.

Es folgen einige Rechenregeln für Ungleichungen in angeordneten Körpern, die für die reellen Zahlen ebenfalls wohlvertraut sind.

6 Rechenregeln In einem angeordneten Körper \mathbb{K} gilt:

- (i) $a > b \Leftrightarrow a - b > 0 \Leftrightarrow -a < -b$,
- (ii) $a > b \wedge c > 0 \Rightarrow ac > bc$,
- (iii) $a > b \wedge c < 0 \Rightarrow ac < bc$,
- (iv) $a \neq 0 \Rightarrow a^2 := aa > 0$,
- (v) $1 > 0$,
- (vi) $a > 0 \Rightarrow a^{-1} > 0$. ✕

◀◀◀ (i) Addition von $-b$ mit (O-1) ergibt

$$a > b \Rightarrow a - b > b - b = 0.$$

Addition von $-a$ mit (O-1) ergibt dann

$$a - b > 0 \Rightarrow -b > -a.$$

Die umgekehrten Implikationen erhält man analog.

(ii) Mit (i) ist $a - b > 0$. Mit $c > 0$ und (O-2) folgt

$$(a - b)c = ac - bc > 0$$

und damit $ac > bc$.

(iii) Mit $c < 0$ ist $-c > 0$ wegen (i) und somit $-ac > -bc$ mit (ii). Nochmalige Anwendung von (i) liefert die Behauptung.

(iv) Ist $a \neq 0$, so ist entweder $a > 0$ oder $a < 0$. Im ersten Fall folgt

$$a^2 = aa > 0a = 0$$

mit (ii). Dasselbe erhält man im zweiten Fall mit (iii).

(v) Dies folgt aus (iv) mit $a = 1$ und $1 \cdot 1 = 1$.

(vi) Wäre $a > 0$ und $a^{-1} \leq 0$, so wäre wegen (ii) auch $aa^{-1} = 1 \leq 0$, ein Widerspruch. \gggg

Man beachte, dass wir $1 > 0$ nicht als Axiom fordern mussten. Dies ist vielmehr bereits eine Folge der Axiome.

■ Betrag

Definition In einem angeordneten Körper \mathbb{K} ist der *Betrag* $|a|$ eines Elementes definiert durch

$$|a| := \begin{cases} a & \text{für } a \geq 0, \\ -a & \text{für } a < 0. \end{cases} \quad \times$$

Der Betrag ist also eine Funktion

$$|\cdot| : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}, \quad a \mapsto |a|.$$

Für ihn gelten die folgenden Rechenregeln. Dabei wird sich die Bedeutung der ›Dreiecksungleichung‹ erst im Kontext der komplexen Zahlen ergeben. Dort existiert eine ähnliche Betragsfunktion, auch wenn \mathbb{C} nicht angeordnet ist.

7 Rechenregeln Für den Betrag $|\cdot|$ in einem angeordneten Körper gilt:

- (i) $|-a| = |a| \geq 0$,
- (ii) $-|a| \leq a \leq |a|$,
- (iii) $|a| = 0 \Leftrightarrow a = 0$,
- (iv) $|ab| = |a| |b|$,
- (v) $|x - a| < b \Leftrightarrow a - b < x < a + b$,
- (vi) $|a + b| \leq |a| + |b|$ (*Dreiecksungleichung*). \times

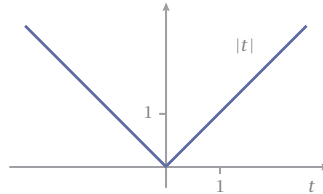
\llll (i) Für $a = 0$ ist alles klar. Für $a > 0$ ist $-a < 0$ und somit

$$|-a| = -(-a) = a = |a| > 0.$$

Für $a < 0$ ist $-a > 0$ und deshalb

$$|-a| = -a = |a| > 0.$$

Abb 1
Graph der
Betragfunktion



(ii) Für $a = 0$ ist wieder nichts zu tun. Für $a > 0$ ist

$$|a| = a > 0 > -a = -|a|,$$

während für $a < 0$

$$|a| = -a > 0 > a = -|a|.$$

Also folgt in allen Fällen die Behauptung.

(iv) Dies folgt direkt aus (ii).

(iii) Dies zeigt man mit den entsprechenden Fallunterscheidungen.

(v) Mit (ii) angewandt auf $|x - a|$ erhalten wir

$$-b < -|x - a| \leq x - a \leq |x - a| < b.$$

Addieren wir a und ignorieren den zweiten und vierten Term, so erhalten wir $a - b < x < a + b$.

(vi) Für $a + b \geq 0$ ist mit (ii)

$$|a + b| = a + b \leq |a| + |b|.$$

Ist aber $a + b < 0$, so ergibt sich ebenfalls mit (ii) und (i)

$$|a + b| = -(a + b) = (-a) + (-b) \leq |-a| + |-b| \leq |a| + |b|. \quad \ggg$$

8 **Korollar** Für den Betrag $|\cdot|$ gilt die *umgekehrte Dreiecksungleichung*

$$||a| - |b|| \leq |a - b|. \quad \times$$

⋈⋈⋈ Wegen der Dreiecksungleichung ist $|a| = |b + (a - b)| \leq |b| + |a - b|$ und damit

$$|a| - |b| \leq |a - b|.$$

Vertauschen wir a und b , so erhalten wir ebenso

$$|b| - |a| \leq |b - a| = |a - b|.$$

Da einer der beiden linken Seiten gleich $||a| - |b||$ sein muss, folgt die Behauptung. ⋈⋈⋈

2.3

Das Vollständigkeitsaxiom

Bisher haben wir über die reellen Zahlen nichts gesagt, was nicht auch für die rationalen Zahlen gilt – sowohl \mathbb{Q} als auch \mathbb{R} sind *angeordnete Körper*. Die rationalen Zahlen haben aber den großen Nachteil, dass es von ihnen ›nicht genug gibt‹. So gibt es, wie wir gesehen haben^{1,7}, keine Wurzel aus 2. Man sagt auch, sie sind ›nicht vollständig‹.

Die Vollständigkeit eines angeordneten Körpers definieren wir durch die Existenz des Supremums und Infimums nichtleerer beschränkter Teilmengen. Diese Begriffe sind in jeder total geordneten Menge erklärt.

Dazu ist es bequem, die $<$ -Notation zu erweitern. Für Teilmengen A, B und Elemente c einer total geordneten Menge erklären wir

$$\begin{aligned} A < c & :\Leftrightarrow a < c \text{ für alle } a \in A, \\ A < B & :\Leftrightarrow a < b \text{ für alle } a \in A \text{ und } b \in B. \end{aligned}$$

Entsprechend sind $A \leq c$ und $A \leq B$ erklärt.

Definition Sei M eine total geordnete Menge. Eine Teilmenge $A \subset M$ heißt *nach oben beschränkt*, wenn $A < t$ für wenigstens ein $t \in M$. Jedes solche $t \in M$ heißt eine *obere Schranke* von A . \times

Unter allen oberen Schranken einer nach oben beschränkten Teilmenge gibt es nicht unbedingt eine kleinste. Existiert sie aber, so nennt man sie das *Supremum* dieser Menge. Die genaue Definition ist folgende.

Definition Sei M eine total geordnete Menge und $A \subset M$. Gilt $A \leq t$, aber $A \not\leq s$ für jedes $s \in M$ mit $s < t$, so heißt t die *kleinste obere Schranke* oder das *Supremum* von A . \times

Das Supremum von A ist also eine obere Schranke von A , die nicht mehr verbessert werden kann. Für jede obere Schranke t von A gilt somit

$$A \leq \sup A \leq t,$$

und für jedes $s \in M$ mit $s < \sup A$ existiert ein $a \in A$ mit $s < a$. Wenn ein Supremum existiert, so ist es eindeutig^{A-14}. Es spielt aber keine Rolle, ob $\sup A$ selbst zur Menge A gehört oder nicht.

Analog werden *nach unten beschränkt* und *untere Schranke* von A definiert. Existiert eine *größte untere Schranke*, so wird sie *Infimum* von A genannt und mit $\inf A$ bezeichnet. Für jede untere Schranke s von A gilt dann

$$s \leq \inf A \leq A,$$

und für jedes $t \in M$ mit $t > \inf A$ existiert ein $a \in A$ mit $a < t$.

- 9 **► Beispiele** A. Die leere Menge ist in jeder total geordneten Menge nach oben und unten beschränkt.

B. Jedes abgeschlossene Intervall

$$[a, b] := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}, \quad a \leq b,$$

ist nach oben und unten beschränkt, und es ist

$$a = \inf [a, b], \quad b = \sup [a, b].$$

In diesem Fall gehören Supremum und Infimum ebenfalls zu $[a, b]$.

C. Für jedes offene Intervalle

$$(a, b) := \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}, \quad a < b,$$

gilt ebenfalls $a = \inf (a, b)$ und $b = \sup (a, b)$. In diesem Fall gehören diese Punkte aber *nicht* zu (a, b) . ◀

- 10 **Vollständigkeitsaxiom** Ein angeordneter Körper \mathbb{K} heißt *vollständig*, wenn jede nicht leere, nach oben beschränkte Teilmenge von \mathbb{K} ein Supremum besitzt. ✕

In angeordneten Körper \mathbb{Q} gilt dieses Axiom *nicht*. Die Menge

$$W = \{r \in \mathbb{Q} : r > 0 \wedge r^2 < 2\} \subset \mathbb{Q}$$

ist zwar nicht leer und nach oben beschränkt, besitzt aber in \mathbb{Q} kein Supremum – siehe die Bemerkung am Ende des nächsten Abschnitts.

Damit haben wir nun alle Axiome versammelt, die wir für die Beschreibung der reellen Zahlen benötigen. In Abschnitt 7 skizzieren wir noch, dass alle vollständigen, angeordneten Körper zueinander *isomorph*, also *gleichgestaltig* sind und somit miteinander identifiziert werden können. Daher ist es gerechtfertigt, von *einem* solchen Körper zu sprechen.

Charakterisierung der reellen Zahlen Die reellen Zahlen bilden einen vollständigen, angeordneten Körper, der mit \mathbb{R} bezeichnet wird. ✕

2.4 Wurzeln

Eine erste Folgerung aus dem Vollständigkeitsaxiom ist die Existenz einer Wurzel zu jeder positiven reellen Zahl. Die reellen Zahlen leisten also das, was

die rationalen Zahlen nicht leisten. Gleichzeitig ergibt sich daraus, dass das Vollständigkeitsaxiom in \mathbb{Q} nicht gilt.

- 11 **Satz und Definition** Zu jeder reellen Zahl $a > 0$ existiert genau eine reelle Zahl $w > 0$ mit $w^2 = a$. Diese wird mit \sqrt{a} bezeichnet und *Quadratwurzel* oder kurz *Wurzel* von a genannt. Für diese reelle Zahl gilt also

$$w = \sqrt{a} \Leftrightarrow w^2 = a \wedge w > 0. \quad \times$$

⟨⟨⟨ Für positive reelle Zahlen u und v gilt A-15

$$u < v \Leftrightarrow u^2 < v^2. \quad (1)$$

Zwei verschiedene positive reelle Zahlen können daher nicht Wurzel derselben Zahl $a > 0$ sein. Dies zeigt die *Eindeutigkeit* der Wurzel.

Um ihre Existenz zu zeigen, bemerken wir zunächst, dass

$$\sqrt{\frac{1}{a}} = \frac{1}{\sqrt{a}}, \quad a > 0,$$

denn die Quadrate beider Seiten ergeben $1/a$. Die Wurzel von a ergibt sich also aus der Wurzel von $1/a$. Daher können wir uns im Folgenden auf den Fall $a \geq 1$ beschränken.

Sei also $a \geq 1$. Betrachte die Menge

$$A = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0 \wedge x^2 \leq a\}.$$

Diese Menge ist nicht leer, denn wegen $0^2 = 0 < 1 \leq a$ gilt $0 \in A$. Sie ist auch beschränkt, denn aus $x^2 \leq a \leq a^2$ folgt mit (1) auch $x \leq a$. Somit ist $A \leq a$. Also existiert aufgrund des Vollständigkeitsaxioms die reelle Zahl

$$w = \sup A.$$

Zu zeigen ist, dass $w^2 = a$. Dazu betrachten wir die reelle Zahl

$$v = w - \frac{w^2 - a}{w + a}. \quad (2)$$

Eine kurze Rechnung ergibt

$$\begin{aligned} v^2 &= w^2 - 2w \frac{w^2 - a}{w + a} + \frac{(w^2 - a)^2}{(w + a)^2} \\ &= a + \frac{w^2 - a}{(w + a)^2} \{(w + a)^2 - 2w(w + a) + w^2 - a\} \\ &= a + c(w^2 - a) \end{aligned} \quad (3)$$

mit

$$c = \frac{a^2 - a}{(w + a)^2} \geq 0.$$

Wäre nun $w^2 > a$, also $w^2 - a > 0$, so folgt mit (2) und (3)

$$v < w, \quad a \leq v^2.$$

Dann wäre v also eine bessere obere Schranke von A als dessen Supremum w , ein Widerspruch. Wäre andererseits $w^2 < a$, also $w^2 - a < 0$, so folgt analog

$$w < v, \quad v^2 \leq a.$$

Somit wäre $v \in A$ und w keine obere Schranke von A , ebenfalls ein Widerspruch. Bleibt also nur

$$w^2 = a,$$

womit die Existenz der Wurzel aus a ebenfalls gezeigt ist. \gggg

Bemerkung Auf exakt dieselbe Weise kann man im angeordneten Körper \mathbb{Q} für die Menge

$$W = \{r \in \mathbb{Q} : r \geq 0 \wedge r^2 < 2\}$$

argumentieren. Hätte diese Menge ein Supremum in \mathbb{Q} , so wäre dies eine rationale Wurzel von 2. Da es eine solche aber nicht gibt, gilt in \mathbb{Q} das Vollständigkeitsaxiom *nicht*. \rightarrow

2.5

Die erweiterte Zahlengerade

Ist eine nichtleere Teilmenge A der reellen Zahlen nach oben beschränkt, so existiert deren Supremum als ein Element in \mathbb{R} . Dafür schreibt man auch

$$\sup A < \infty.$$

Ist dagegen A nach oben unbeschränkt, so schreibt man dafür auch

$$\sup A = \infty.$$

Analoges gilt für $\inf A > -\infty$ und $\inf A = -\infty$.

Auch in vielen anderen Situationen sind die Symbole ∞ und $-\infty$ nützlich. Um deren Verwendung zu regeln, treffen wir daher folgende Vereinbarung.

Definition Unter der *erweiterten Zahlengerade* versteht man die Menge

$$\bar{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$$

zusammen mit der Vereinbarung, dass $-\infty < x < \infty$ für alle $x \in \mathbb{R}$. \times

Abb 2

Zum Approximationsatz



Achtung Das Rechnen mit den Symbolen ∞ und $-\infty$ ist nur in einigen Fällen sinnvoll erklärbar. Es ist nicht möglich, \mathbb{R} zu einem Körper zu machen. \rightarrow

Die Definition des Supremums $\sup A$ einer Menge A impliziert, dass dieses von unten durch Elemente in A beliebig gut approximiert werden kann. Der folgende Satz formuliert diese Eigenschaft gleichermaßen für beschränkte und unbeschränkte Mengen. Vereinbaren wir außerdem

$$\sup \emptyset := -\infty, \quad \inf \emptyset := \infty,$$

so gilt er sogar für die leere Menge.

- 12 **Approximationssatz** Sei A eine beliebige Teilmenge von \mathbb{R} . Dann existiert zu jeder reellen Zahl $s < \sup A$ ein $a \in A$ mit

$$s < a \leq \sup A,$$

und zu jeder reellen Zahl $t > \inf A$ existiert ein $a \in A$ mit

$$\inf A \leq a < t. \quad \times$$

◀◀◀◀ Wir betrachten das Supremum, der Beweis für das Infimum verläuft analog.

Für $A = \emptyset$ ist nichts weiter zu zeigen, da es keine reelle Zahl kleiner als $\sup A = -\infty$ gibt. Sei also $A \neq \emptyset$ und $s < \sup A$ eine beliebige reelle Zahl. Gäbe es kein $a \in A$ mit $a > s$, so wäre

$$A \leq s < \sup A.$$

Falls $\sup A < \infty$, so widerspricht dies der Eigenschaft von $\sup A$, die kleinste obere Schranke von A zu sein. Falls aber $\sup A = \infty$, so widerspricht dies der Unbeschränktheit von A . In jedem Fall erhalten wir einen Widerspruch. Also gibt es ein $a \in A$ mit $a > s$. ▶▶▶▶

Ist also $A \subset \mathbb{R}$ eine beliebige Teilmenge, so wird jede reelle Zahl unterhalb von $\sup A$ durch ein Element in A übertroffen. Man kann also $\sup A$ innerhalb von A beliebig gut approximieren – daher der Name *Approximationssatz*. Später werden wir zeigen, dass es sogar *Folgen* von Punkten in A gibt, die gegen das Supremum *konvergieren*.

Dasselbe gilt entsprechend für das Infimum.

2.6

Intervalle

Die wichtigsten Teilmengen der reellen Zahlen sind die Intervalle.

Definition Ein *Intervall* ist eine Teilmenge der reellen Zahlen, die mit je zwei Punkten² auch alle dazwischen liegenden Punkte enthält. ✕

► **Beispiele** A. Die leere Menge \emptyset ist ein Intervall, denn die Voraussetzung, zwei Punkte in ihr zu finden, ist schon nicht erfüllt.

B. Ebenso ist jede 1-Punkt-Menge $\{a\}$ ein Intervall.

C. Enthält ein Intervall I wenigstens zwei Punkte $u < v$, so enthält es auch jede reelle Zahl a mit $u \leq a \leq v$. ◀

Für ein Intervall $I \neq \emptyset$ definieren wir

$$a = \inf I, \quad b = \sup I$$

als dessen *linken* respektive *rechten Endpunkt*. Diese Punkte gehören zur *erweiterten Zahlengerade* \mathbb{R} , die Fälle

$$a = -\infty, \quad b = \infty$$

sind also möglich. Ebenso kann $a = b$ sein. Ist $a < b$, so folgt aus dem Approximationssatz₁₂ und der Definition des Intervalls, dass auch die Menge $\{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$ zu I gehört. Intervalle mit denselben Endpunkten unterscheiden sich daher nur darin, welche Endpunkte dazu gehören und welche nicht.

Definition Ein nichtleeres Intervall I heißt *links abgeschlossen*, falls es seinen linken Endpunkt enthält, andernfalls heißt es *links offen*. Entsprechend sind *rechts abgeschlossen* und *rechts offen* erklärt. Schließlich heißt ein Intervall *nichtentartet*, wenn es mehr als einen Punkt enthält. ✕

Es gibt somit vier Arten von Intervallen: das *offene Intervall*

$$(a, b) := \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}, \quad -\infty \leq a \leq b \leq \infty,$$

mit der Vereinbarung $(a, a) = \emptyset$; das *abgeschlossene Intervall*

$$[a, b] := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}, \quad -\infty < a \leq b < \infty,$$

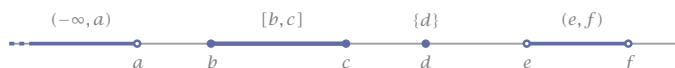
mit der Vereinbarung $[a, a] = \{a\}$; und die *halboffenen Intervalle*

$$(a, b] := \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}, \quad -\infty \leq a \leq b < \infty,$$

$$[a, b) := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}, \quad -\infty < a \leq b \leq \infty.$$

² Punkt meint hier also Zahl. Das ist eine übliche Redeweise.

Abb 3 Verschiedene Intervalle



Dabei sind die Symbole ∞ und $-\infty$ genau dann zugelassen, wenn das betreffende Intervallende offen ist. Daher sind alle diese Intervalle Teilmengen von \mathbb{R} und enthalten weder ∞ noch $-\infty$.

- **Beispiel** A. Das leere Intervall \emptyset ist sowohl offen wie abgeschlossen. ³
 B. Jede Ein-Punkt-Menge $\{a\} \subset \mathbb{R}$ ist ein abgeschlossenes Intervall.
 C. $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$ ist ein offenes Intervall.
 D. $\mathbb{R}^* := \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ist *kein* Intervall. ◀

Die *Länge* eines nichtleeren Intervalls I ist definiert als

$$|I| := \sup I - \inf I.$$

Dies wird vereinbarungsgemäß ∞ genau dann, wenn I unbeschränkt ist.

- A. Ein Intervall I ist nichtentartet genau dann, wenn $|I| > 0$.
 B. Es ist $|[a, a]| = 0$ und

$$|[a, b]| = |(a, b)| = b - a, \quad a < b.$$

- C. Mit der Vereinbarungen von Abschnitt 5 ist

$$|(-\infty, c)| = c - (-\infty) = c + \infty = \infty, \quad c \in \mathbb{R}. \quad \blacktriangleleft$$

2.7

Eindeutigkeit

Es ist durchaus möglich, ganz unterschiedliche *Modelle* der reellen Zahlen zu konstruieren – also total geordnete Mengen mit zwei Operationen, in denen sämtliche geforderten Axiome gelten. Diese verschiedenen Modelle sind jedoch alle von derselben Gestalt – man kann sie mitsamt ihren Strukturen eins-zu-eins aufeinander abbilden. Mathematisch gesprochen sind sie *isomorph*.

Im Fall der reellen Zahlen bedeutet dies Folgendes.

³ ›Offen‹ und ›abgeschlossen‹ schließen sich also nicht gegenseitig aus, im Gegensatz zum umgangssprachlichen Gebrauch.

- 13 **Isomorphiesatz** Sind $(\mathbb{R}, +, \cdot, <)$ und $(\mathbb{R}', +', \cdot', <')$ zwei vollständige angeordnete Körper, so existiert eine bijektive Abbildung $\Phi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}'$ derart, dass

$$\Phi(x + y) = \Phi(x) +' \Phi(y), \quad \Phi(x \cdot y) = \Phi(x) \cdot' \Phi(y)$$

und

$$x < y \Leftrightarrow \Phi(x) <' \Phi(y)$$

für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt. \times

Es spielt also zum Beispiel keine Rolle, ob ich zwei Operanden zuerst in \mathbb{R} addiere und das Ergebnis mit Φ abbilde, oder ob ich zuerst die Operanden mit Φ abbilde und danach in \mathbb{R} addiere.

⟨⟨⟨ *Beweisskizze* Für jede Abbildung Φ mit den geforderten Eigenschaften gilt beispielsweise

$$\Phi(x) = \Phi(x + 0) = \Phi(x) +' \Phi(0)$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Also ist notwendigerweise $\Phi(0) = 0'$. Analog ist $\Phi(1) = 1'$. Es ist daher

$$\Phi(0) := 0', \quad \Phi(1) := 1'$$

zu *definieren*. Damit ist aber Φ auch schon für alle natürlichen Zahlen festgelegt, wie beispielsweise

$$\Phi(2) = \Phi(1 + 1) = \Phi(1) +' \Phi(1) = 1' +' 1' = 2'.$$

Mithilfe der Körperoperationen ist damit Φ auch für die ganzen und rationalen Zahlen eindeutig festgelegt. Mithilfe der Vollständigkeit dann auch für alle irrationalen Zahlen A-17. $\rangle\rangle\rangle$