

5

Folgen

Eine *Folge* in einer beliebigen Menge X ist eine Funktion

$$f: \mathbb{N} \rightarrow X,$$

die man üblicherweise durch Aufzählung ihrer Funktionswerte in der Form

$$(f_1, f_2, f_3, \dots) = (f_n)_{n \geq 1} = (f_n)_n = (f_n)$$

angibt. Man spricht von *Zahlenfolgen*, wenn f eine Abbildung nach $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ ist und alle Folgenglieder demzufolge reelle oder komplexe Zahlen sind.

An einer Folge interessiert uns vor allem ihr *asymptotisches Verhalten* – also wie sie sich verhält, wenn der Folgenindex gegen Unendlich strebt. Gibt es zum Beispiel einen Punkt, dem sich die Folge »immer weiter annähert« und den man als ihren *Grenzwert* bezeichnen könnte?

Die reelle Folge

$$\left(\frac{1}{n}\right)_{n \geq 1} = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots\right)$$

beispielsweise scheint gegen 0 zu streben, denn die Folgenglieder sind positiv, werden aber immer kleiner. Dagegen hat die reelle Folge

$$((-1)^n)_{n \geq 1} = (-1, 1, -1, 1, -1, \dots)$$

wohl keinen Grenzwert, da sie ständig zwischen 1 und -1 wechselt.

Der Begriff des Grenzwertes ist von fundamentaler Bedeutung für die gesamte Analysis. Er präzisiert die intuitive Vorstellung, dass eine Folge einem bestimmten Punkt »beliebig nahe kommt«. Auf ihm basieren die Konzepte der Stetigkeit, Differenziation und Integration.

5.1

Grenzwerte reeller Folgen

Wir betrachten zunächst *reelle Folgen*, also Folgen aus reellen Zahlen. Von zentraler Bedeutung ist der Begriff der *konvergenten Folge* und ihres *Grenzwertes*.

Definition Eine Folge $(a_n)_{n \geq 1}$ reeller Zahlen heißt *konvergent*, wenn es eine reelle Zahl a gibt, so dass zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N \geq 1$ existiert mit der Eigenschaft, dass

$$|a_n - a| < \varepsilon, \quad n \geq N.$$

Diese Zahl a heißt der *Grenzwert* der Folge, geschrieben

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a,$$

und man sagt, (a_n) konvergiert gegen a für n gegen Unendlich. ✕

Andere Schreibweisen hierfür sind

$$a_n \rightarrow a, \quad n \rightarrow \infty,$$

oder auch nur kurz $a_n \rightarrow a$ oder $\lim a_n = a$.

Die in der Definition geforderte Eigenschaft wird als *ε -N-Test* bezeichnet. Zu jeder *Fehlerschranke* $\varepsilon > 0$ muss es eine *Indexschranke* $N \geq 1$ geben, jenseits derer *alle* Folgenglieder einen Abstand kleiner als ε von a haben:

$$n \geq N \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon.$$

Umgekehrt bedeutet dies, dass *höchstens endlich viele* Folgenglieder einen Abstand größer oder gleich ε von a haben, und zwar allenfalls $a_1, \dots, a_{N-1}$.

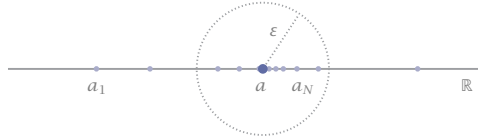
Im ε -N-Test hängt die Schranke N im Allgemeinen von ε ab, weshalb man auch oft $N(\varepsilon)$ schreibt. Es ist aber nicht erforderlich, diese Abhängigkeit *explizit* anzugeben. Es genügt zu zeigen, dass es immer ein solches N *gibt*.

Im ε -N-Test kommt es auf große ε nicht an. Es genügt, hinreichend *kleine* ε zu betrachten. Gilt der ε -N-Test für alle $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ mit irgendeinem $\varepsilon_0 > 0$, so gilt er auch für *alle* $\varepsilon > 0$.

Bei Konvergenzfragen kommt es auch nicht auf die ersten Folgenglieder an. Es spielt keine Rolle, ob die Indizierung einer Folge bei 0, 1, oder irgend einer anderen natürlichen Zahl beginnt. Daher kann man auf eine explizite Angabe im Allgemeinen verzichten.

► **Beispiel** Jede *konstante* reelle Folge ist konvergent – also jede Folge (a_n) mit $a_n = a_m$ für alle $n \neq m$. ◀

Abb 1
 ε -N-Test



»»» Ist (a_n) konstant, so ist $a_n = a$ für alle n , oder $a_n - a = 0$. Somit ist $|a_n - a| = 0 < \varepsilon$ für jedes $\varepsilon > 0$. Also ist auch a der Grenzwert dieser Folge. »»»

1 ➤ **Beispiel** Es gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0. \quad \blacktriangleleft$$

»»» Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert nach dem Prinzip des Archimedes_{3.9} eine natürliche Zahl N mit $1/N < \varepsilon$. Dann gilt für alle $n \geq N$ ebenfalls

$$0 < \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < \varepsilon, \quad n \geq N.$$

Somit gilt auch

$$\left| \frac{1}{n} - 0 \right| < \varepsilon, \quad n \geq N.$$

Damit haben wir für jedes $\varepsilon > 0$ ein geeignetes $N \geq 1$ gefunden. »»»

Der Begriff der konvergenten Folge lässt sich auf den Begriff der **Nullfolge** zurückführen, also einer konvergenten Folge mit Grenzwert 0.

2 **Notiz** Eine reelle Folge (a_n) ist konvergent mit Grenzwert a genau dann, wenn $(a_n - a)$ eine Nullfolge bildet. ✕

»»» Gilt $a_n \rightarrow a$, so existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N \geq 1$ so, dass

$$|a_n - a| < \varepsilon, \quad n \geq N.$$

Dies ist aber äquivalent zu der Aussage, dass $(a_n - a)$ gegen 0 konvergiert. »»»

■ Eindeutigkeit und Beschränktheit

Die Definition des Grenzwertes suggeriert, dass eine konvergente Folge nur *einen* Grenzwert haben kann. Auch wenn dies offensichtlich erscheint, erfordert es einen Beweis.

3 **Eindeutigkeitssatz** Der Grenzwert einer konvergenten reellen Folge ist eindeutig bestimmt. ✕

⟦⟦⟦ Angenommen, (a_n) hat zwei verschiedene Grenzwerte $\tilde{a}$ und $\hat{a}$. Dann ist $\varepsilon := |\tilde{a} - \hat{a}|/2 > 0$. Zu $\varepsilon/2$ existieren dann ein $\tilde{N} \geq 1$ und $\hat{N} \geq 1$, so dass

$$\begin{aligned} |a_n - \tilde{a}| &< \varepsilon/2, & n &\geq \tilde{N}, \\ |a_n - \hat{a}| &< \varepsilon/2, & n &\geq \hat{N}. \end{aligned}$$

Für $N = \max(\tilde{N}, \hat{N})$ folgt hieraus mit der Dreiecksungleichung

$$|\tilde{a} - \hat{a}| \leq |\tilde{a} - a_N| + |a_N - \hat{a}| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon.$$

Dies ist ein Widerspruch zu $2\varepsilon = |\tilde{a} - \hat{a}|$. ⟦⟦⟦

Definition Eine reelle Folge (a_n) heißt *beschränkt*, wenn die Menge aller Folgenglieder als Teilmenge von $\mathbb{R}$ beschränkt ist. Mit anderen Worten, es gibt ein $M \geq 0$, so dass $|a_n| \leq M$ für alle n . ✕

4 **Beschränktheitsatz** Eine konvergente reelle Folge ist beschränkt. ✕

⟦⟦⟦ Ist (a_n) konvergent mit Grenzwert a , so gibt es zum Beispiel zu $\varepsilon = 1$ ein $N \geq 1$, so dass

$$|a_n - a| < 1, \quad n \geq N.$$

Also gilt mit der Dreiecksungleichung auch

$$|a_n| \leq |a_n - a| + |a| < |a| + 1, \quad n \geq N.$$

Wählen wir jetzt

$$M = \max\{|a_1|, \dots, |a_{N-1}|, |a| + 1\},$$

so gilt $|a_n| \leq M$ für alle n . Somit ist die Folge (a_n) beschränkt. ⟦⟦⟦

Definition Eine Folge, die nicht konvergiert, heißt *divergent*. ✕

- **Beispiele** A. Jede unbeschränkte Folge ist divergent.
 B. Die reelle Folge $((-1)^n)_{n \geq 1}$ ist divergent.
 C. Jede Abzählung von $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$ ist divergent _{A-4}. ◀

Die Beispiele zeigen insbesondere, dass aus der Beschränktheit einer Folge allein nicht deren Konvergenz folgt. Wir werden jedoch bald sehen, dass jede *beschränkte monotone* Folge konvergiert, und dass jede beschränkte Folge eine *konvergente Teilfolge* besitzt.

5.2

Grenzwertsätze

Um Folgen auf Konvergenz zu untersuchen, wendet man den ε - N -Test eher selten an. Meistens greift man auf bereits bekannte Grenzwerte zurück und wendet *Grenzwertsätze* an.

Wir bemerkten bereits, dass (a_n) gegen a genau dann konvergiert, wenn $(a_n - a)$ eine Nullfolge bildet². Letzteres zeigt man meist durch Vergleich mit einer bekannten Nullfolge.

- 5 **Majorantenkriterium** Gilt $|a_n - a| \leq |b_n|$ für alle n mit einer Nullfolge (b_n) , so ist die Folge (a_n) konvergent mit Grenzwert a . ✕

⟦ Nach Voraussetzung existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N \geq 1$, so dass

$$|b_n| < \varepsilon, \quad n \geq N.$$

Also ist $|a_n - a| \leq |b_n| < \varepsilon$ für alle $n \geq N$. Somit konvergiert (a_n) gegen a . ⟧

► **Beispiel** Es gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1$. Denn

$$\left| \frac{n}{n+1} - 1 \right| = \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n},$$

und die rechte Seite bildet eine Nullfolge¹. ◀

Nullfolgen haben die nützliche Eigenschaft, »robust« zu sein. Multiplizieren wir sie gliedweise mit einer Folge, von der wir nur wissen, dass sie *beschränkt* ist, so erhalten wir trotzdem wieder eine Nullfolge.

- 6 **Nullfolgensatz** Ist (a_n) eine Nullfolge und (b_n) eine beschränkte Folge, so ist auch $(a_n b_n)$ eine Nullfolge. ✕

⟦ Nach Voraussetzung existiert ein $M > 0$, so dass

$$|b_n| \leq M, \quad n \geq 1.$$

Da (a_n) eine Nullfolge bildet, existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ ein N mit

$$|a_n| < \frac{\varepsilon}{M}, \quad n \geq N.$$

Dann aber gilt

$$|a_n b_n| = |a_n| |b_n| < \frac{\varepsilon}{M} \cdot M = \varepsilon, \quad n \geq N.$$

Das aber bedeutet, dass $a_n b_n \rightarrow 0$. ⟧

► **Beispiele** A. Für eine beliebige beschränkte Folge (b_n) gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{n} = 0.$$

B. Das Produkt der Nullfolge $(1/n)$ mit der unbeschränkten Folge (n^2) ist die unbeschränkte Folge (n) und damit *divergent*. Auf die Beschränktheit der Folge (b_n) kann im Nullfolgensatz also nicht verzichtet werden. ◀

■ Grenzwertgleichungen

Es folgen die klassischen Grenzwertsätze für Summe, Produkt und Quotient konvergenter Folgen.

7 **Satz** Sind die reellen Folgen (a_n) und (b_n) konvergent mit $a_n \rightarrow a$ und $b_n \rightarrow b$, so konvergieren auch $(|a_n|)$, $(a_n + b_n)$ und $(a_n b_n)$, und es gilt

$$|a_n| \rightarrow |a|, \quad a_n + b_n \rightarrow a + b, \quad a_n b_n \rightarrow ab.$$

Ist außerdem $b \neq 0$, so existiert a_n/b_n für alle hinreichend großen n , und

$$a_n/b_n \rightarrow a/b. \quad \times$$

⟨⟨⟨ **Betrag:** Aufgrund der umgekehrten Dreiecksungleichung ?? gilt

$$||a_n| - |a|| \leq |a_n - a|.$$

Da die rechte Seite eine Nullfolge bildet, folgt die Behauptung mit dem Majorantenkriterium 5.

Summe: Sei $\varepsilon > 0$. Dann existieren ein $N_a \geq 1$ und ein $N_b \geq 1$, so dass

$$\begin{aligned} |a_n - a| &< \varepsilon/2, & n &\geq N_a, \\ |b_n - b| &< \varepsilon/2, & n &\geq N_b. \end{aligned}$$

Für $n \geq N = \max\{N_a, N_b\}$ gilt dann

$$|(a_n + b_n) - (a + b)| \leq |a_n - a| + |b_n - b| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

Somit konvergiert $(a_n + b_n)$ gegen $a + b$.

Produkt: Es ist

$$a_n b_n - ab = (a_n - a)b_n + (b_n - b)a.$$

Nach Voraussetzung sind $(a_n - a)$ und $(b_n - b)$ Nullfolgen, und nach dem Beschränktheitsatz 4 ist (b_n) beschränkt. Also sind aufgrund des Nullfolgensatzes 6 auch $(a_n - a)b_n$ und $(b_n - b)a$ Nullfolgen. Mit dem eben Bewiesenen ist auch deren Summe eine Nullfolge, und damit auch $(a_n b_n - ab)$. Also gilt $a_n b_n \rightarrow ab$.

Quotient: Aufgrund der eben bewiesenen Produktregel genügt es zu zeigen, dass $1/b_n \rightarrow 1/b$. Nach Voraussetzung ist $b \neq 0$ und damit $\varepsilon = |b|/2 > 0$. Dazu existiert ein $N \geq 1$, so dass

$$|b_n - b| < \varepsilon, \quad n \geq N.$$

Dann aber ist

$$|b_n| \geq |b| - \varepsilon = \varepsilon, \quad n \geq N.$$

Somit ist $(1/b_n)_{n \geq N}$ *beschränkt*¹. Schreiben wir jetzt

$$\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b} = \frac{b - b_n}{b_n b},$$

so ist die rechte Seite aufgrund des Nullfolgensatzes wieder eine Nullfolge. Also gilt $1/b_n \rightarrow 1/b$. $\gggg$

Für konvergente Folgen (a_n) und (b_n) gilt somit

$$\lim(a_n \diamond b_n) = \lim a_n \diamond \lim b_n$$

für $\diamond \in \{+, \cdot, : \}$, im Fall der Division allerdings nur, wenn $\lim b_n \neq 0$. Man sagt, die Grenzwertbildung *vertauscht* mit den arithmetischen Operationen. Später werden wir dies als die *Stetigkeit* dieser Operationen auf $\mathbb{R}$ interpretieren.

► **Beispiele** A. Bevor man Grenzwertgleichungen anwenden kann, sind oft Umformungen nötig, um konvergente Folgen zu erhalten. Ein typisches Beispiel sind Quotienten, deren Zähler und Nenner für sich betrachtet divergieren. So gilt

$$\frac{n^2 + 2n + 3}{n^2} = 1 + \frac{2}{n} + \frac{3}{n^2} \rightarrow 1.$$

B. Allgemein kürzt man rationale Ausdrücke durch die höchste Potenz, die in Zähler und Nenner auftritt:

$$\frac{n}{n^2 + 2n + 3} = \frac{1/n}{1 + 2/n + 3/n^2} \rightarrow \frac{0}{1} = 0,$$

und

$$\frac{(n^2 + 1)(n - 3)}{(2n + 1)^3} = \frac{(1 + 1/n^2)(1 - 3/n)}{(2 + 1/n)^3} \rightarrow \frac{1 \cdot 1}{2^3} = \frac{1}{8}. \quad \lll$$

¹ Da es auf die ersten Folgenglieder nicht ankommt, fordern wir nicht explizit, dass *alle* b_n von Null verschieden sind.

■ Grenzwertungleichungen

Mindestens ebenso wichtig wie Gleichungen für Grenzwerte sind *Ungleichungen*. Das nächste Lemma bildet hierfür die Grundlage.

- 8 **Lemma** Sei (a_n) eine konvergente reelle Folge und b eine reelle Zahl. Gilt für jedes $\varepsilon > 0$ die Ungleichung

$$a_n \leq b + \varepsilon$$

für unendlich viele n , so ist

$$\lim a_n \leq b. \quad \times$$

⟨⟨⟨⟨ Sei $a = \lim a_n$. Wäre $a > b$, so wäre $\varepsilon = (a - b)/2 > 0$, und es gäbe ein $N \geq 1$, so dass $|a_n - a| < \varepsilon$ für alle $n \geq N$. Insbesondere gilt dann

$$a_n > a - \varepsilon = b + \varepsilon, \quad n \geq N.$$

Dann aber gilt $a_n \leq b + \varepsilon$ nicht mehr für unendlich viele n – ein Widerspruch. Also ist $a \leq b$. ⟩⟩⟩⟩

Bemerkung Typischerweise gilt $a_n \leq b + \varepsilon$ für alle hinreichend großen n . Aber dies wird im Beweis nicht benötigt. $\rightarrow$

- 9 **Grenzwertungleichung** Die reellen Folgen (a_n) und (b_n) seien konvergent. Gilt $a_n \leq b_n$ für unendlich viele n , so gilt auch

$$\lim a_n \leq \lim b_n. \quad \times$$

⟨⟨⟨⟨ Sei $b = \lim b_n$. Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein $N \geq 1$ mit $|b_n - b| < \varepsilon$ für $n \geq N$. Insbesondere gilt dann $b_n < b + \varepsilon$ für alle $n \geq N$, und folglich

$$a_n \leq b_n < b + \varepsilon, \quad n \geq N.$$

Mit dem vorangehenden Lemma folgt daraus

$$\lim a_n \leq b = \lim b_n. \quad \rangle\rangle\rangle\rangle$$

Achtung: Selbst wenn $a_n < b_n$ für alle n gelten sollte, folgt daraus *nicht*, dass die strikte Ungleichung auch für die Grenzwerte gilt. Für $a_n = -1/n$ und $b_n = 1/n$ gilt offensichtlich

$$a_n < b_n, \quad n \geq 1,$$

aber

$$\lim a_n = 0 = \lim b_n.$$

Strikte Ungleichungen überleben einen Grenzübergang im Allgemeinen nicht, und Grenzwertungleichungen sind immer unscharf.

5.3

Einige wichtige Grenzwerte

10 Lemma Für jede reelle Zahl q mit $|q| < 1$ gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$. $\times$

⟨⟨⟨ Der Fall $q = 0$ ist trivial. Sei also $0 < |q| < 1$. Dann ist

$$|q| = \frac{1}{1+r}$$

mit einer reellen Zahl $r > 0$. Aufgrund der Bernoullischen Ungleichung _{3.4} ist

$$(1+r)^n \geq 1+nr.$$

Damit erhalten wir

$$|q^n| = |q|^n = \frac{1}{(1+r)^n} \leq \frac{1}{1+nr} \leq \frac{1}{nr}.$$

Da auf der rechten Seite eine Nullfolge steht, bildet aufgrund des Majorantenkriterium ₅ auch q^n eine Nullfolge. $\rangle\rangle\rangle$

11 Lemma Für jede reelle Zahl q mit $|q| < 1$ und jedes $p \in \mathbb{Z}$ gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^p q^n = 0.$$

Somit dominiert q^n jede Potenz von n , wenn $|q| < 1$. $\times$

⟨⟨⟨ Sei $q \neq 0$, und betrachte $a_n := n^p |q|^n$. Für festes p folgt aus den Grenzwertsätzen ₇

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n} \right)^p = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right) \right)^p = 1.$$

Also gilt auch

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n} \right)^p |q| = |q| < 1.$$

Wählen wir eine beliebige reellen Zahl θ mit $|q| < \theta < 1$, so gibt es also ein $N \geq 1$ mit der Eigenschaft, dass

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < \theta < 1, \quad n \geq N.$$

Also ist $0 < a_{n+1} < \theta a_n$ für alle $n \geq N$, und damit

$$0 < a_{N+n} < \theta^n a_N, \quad n \geq N.$$

Hier bildet θ^n aufgrund des letzten Lemmas ₁₀ eine Nullfolge. Also ₅ bildet auch a_n eine Nullfolge. Das war zu zeigen. $\rangle\rangle\rangle$

12 **Lemma** Für jede reelle Zahl a gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n!} = 0.$$

Die Fakultät wächst somit schneller als jede Potenz. ✕

⟨⟨⟨⟨ Fixiere irgendein θ mit $0 < \theta < 1$. Dann gibt es ein $N \geq 1$, so dass

$$\frac{|a|}{n} \leq \theta, \quad n \geq N.$$

Für alle $n \geq N$ gilt dann

$$0 < \frac{|a|^n}{n!} = \prod_{k=1}^n \frac{|a|}{k} \leq \prod_{k=1}^N \frac{|a|}{k} \cdot \prod_{k=N+1}^n \theta \leq \left(\frac{|a|}{N\theta} \right)^N \theta^n.$$

Die rechte Seite bildet eine Nullfolge bezüglich n , und wir sind fertig. ⟩⟩⟩⟩

Im nächsten Lemma antizipieren wir die Existenz und Monotonie der n -ten Wurzelfunktion auf den positiven reellen Zahlen ??.

13 **Lemma** Es gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$. ✕

⟨⟨⟨⟨ Sei $\varepsilon > 0$. Dann gilt 11

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{(1 + \varepsilon)^n} = 0.$$

Also gibt es ein $N \geq 1$, so dass

$$\frac{n}{(1 + \varepsilon)^n} < 1, \quad n \geq N.$$

Dies ist äquivalent mit $n < (1 + \varepsilon)^n$, oder

$$\sqrt[n]{n} < 1 + \varepsilon, \quad n \geq N.$$

Da andererseits auch $1 \leq \sqrt[n]{n}$ für alle $n \geq 1$, folgt hieraus

$$|\sqrt[n]{n} - 1| < \varepsilon, \quad n \geq N.$$

Da für jedes $\varepsilon > 0$ ein solches N existiert, folgt die Behauptung. ⟩⟩⟩⟩

5.4 Existenzsätze

Bisher gingen wir davon aus, dass wir den Grenzwert einer konvergenten Folge kennen – schließlich spielt dieser eine zentrale Rolle in der Definition ihrer Konvergenz. Tatsächlich sieht man jedoch vielen konvergenten Folgen *nicht an*, welchen Grenzwert sie haben. So ist die Folge der reellen Zahlen

$$e_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!}$$

konvergent₁₅, auch wenn wir ihren Grenzwert nicht kennen.

Es stellt sich deshalb die Frage, ob man nur durch Betrachten einer Folge selbst auf deren Konvergenz und die Existenz eines Grenzwertes schließen kann. Am einfachsten ist diese Frage für *monotone* Folgen zu beantworten.

■ Monotone Folgen

Definition Eine reelle Folge (a_n) heißt *monoton steigend*, falls

$$a_n \leq a_{n+1}$$

für alle n gilt. Sie heißt *streng monoton steigend*, falls sogar

$$a_n < a_{n+1}$$

für alle n gilt. Analog sind *monoton fallend* und *streng monoton fallend* definiert. Schließlich heißt eine Folge *(streng) monoton*, wenn sie (streng) monoton steigt oder fällt. ✕

Konvergiert eine Folge (a_n) *monoton* gegen ihren Grenzwert a , so schreibt man auch genauer $a_n \nearrow a$ für monoton steigende und $a_n \searrow a$ für monoton fallende Folgen.

14 Satz von der monotonen Konvergenz Eine monotone Folge (a_n) ist konvergent genau dann, wenn sie beschränkt ist. In diesem Fall gilt

$$\lim a_n = \sup \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$$

für monoton steigende und

$$\lim a_n = \inf \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$$

für monoton fallende Folgen. ✕

⟨⟨⟨⟨ $\Rightarrow$ Jede konvergente Folge ist beschränkt₄.

⇐ Sei umgekehrt etwa (a_n) monoton steigend und beschränkt. Dann ist die Menge $A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ beschränkt, und es existiert die reelle Zahl

$$a = \sup A < \infty.$$

Aufgrund des Approximationssatzes 2.12 existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ ein Element $a_N \in A$ mit $a - \varepsilon < a_N \leq a$. Aufgrund der Monotonie der Folge (a_n) und der Definition von a gilt dann auch

$$a - \varepsilon < a_N \leq a_n \leq a, \quad n \geq N.$$

Das aber bedeutet, dass

$$|a_n - a| < \varepsilon, \quad n \geq N.$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, gilt also $\lim a_n = a = \sup A$. $\gggg$

Bemerkung Die Existenz des Grenzwertes folgt somit aus der Existenz eines Supremums oder Infimums, und damit aus der Vollständigkeit der reellen Zahlen. Im Körper $\mathbb{Q}$ gilt der Satz *nicht* A_5 . $\neg$

15 $\Rightarrow$ **Beispiel** Die Folge der Summen

$$e_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n!}$$

ist streng monoton steigend. Außerdem gilt mit $q = 1/2$ $_{3.13}$ für alle n

$$\begin{aligned} e_n - 1 &\leq 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} q^k = \frac{1 - q^n}{1 - q} < \frac{1}{1 - q} = 2. \end{aligned}$$

Die Folge ist also beschränkt, und somit existiert die **Eulersche Zahl**

$$e := \lim_{n \rightarrow \infty} e_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} =: \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}. \quad \lll$$

■ Teilfolgen

Nicht jede reelle Folge ist monoton. Man kann aber immer eine monotone *Teilfolge* auswählen, indem man nur einen Teil der Folgenglieder betrachtet und die übrigen ignoriert.

Definition Ist $(a_n)_n$ eine Folge in einer Menge X und $(n_k)_k$ eine streng monoton steigende Folge natürlicher Zahlen, so heißt

$$(a_{n_k})_k = (a_{n_1}, a_{n_2}, \dots)$$

eine *Teilfolge* von (a_n) . Die Folge $(n_k)_k$ selbst heißt eine *Auswahlfolge*. $\times$

Bemerkungen a. Funktional betrachtet ist eine Teilfolge die Komposition einer Folge $a: \mathbb{N} \rightarrow X$ mit einer streng monoton steigenden Folge $\varphi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, also die Folge

$$a \circ \varphi = (a_{\varphi(n)})_{n \geq 1} = (a_{\varphi(1)}, a_{\varphi(2)}, \dots).$$

b. Die Menge aller Auswahlfolgen φ , und damit die Menge aller möglichen Teilfolgen einer Folge, ist *überabzählbar*. $\rightarrow$

► **Beispiele** A. $(1/n^2)$ und (2^{-n}) sind Teilfolgen von $(1/n)$.

B. Die Folge $(0, 1, 0, 2, 0, 3, 0, \dots)$ besitzt unter anderem die beiden Teilfolgen $(0, 0, 0, \dots)$ und $(1, 2, 3, \dots)$.

C. Die Folge $((-1)^n)$ besitzt die beiden Teilfolgen

$$(1, 1, \dots), \quad (-1, -1, \dots),$$

und noch viele andere, zum Beispiel $((-1)^{k^3})$ oder $((-1)^{k!})$. ◀

Jede Teilfolge einer *konvergenten* Folge ist offensichtlich ebenfalls konvergent mit demselben Grenzwert. Interessanter ist die Frage, ob *jede* Folge eine konvergente Teilfolge besitzt. Die Antwort gibt der Satz von Bolzano-Weierstraß¹⁷, der auf folgender Bemerkung basiert.

16 Lemma Jede reelle Folge (a_n) enthält eine monotone Teilfolge. $\times$

⟨⟨⟨⟨ Betrachte die Menge

$$\begin{aligned} A &= \{n \in \mathbb{N} : a_n \geq a_m \text{ für alle } m \geq n\} \\ &= \{n \in \mathbb{N} : a_n = \sup \{a_n, a_{n+1}, \dots\}\}. \end{aligned}$$

Ist A *unendlich*, so bildet eine streng monotone Abzählung von A eine Auswahlfolge (n_k) mit der Eigenschaft, dass

$$a_{n_k} \geq a_{n_{k+1}}.$$

Also ist (a_{n_k}) monoton *fallend*. Ist dagegen A *endlich*, so ist $\max A$ endlich. Zu jedem $n > \max A$ existiert dann ein $m > n$ mit

$$a_n < a_m,$$

denn andernfalls wäre ja $n \in A$. Auf diese Weise können wir induktiv eine Auswahlfolge (n_k) konstruieren, so dass

$$a_{n_k} < a_{n_{k+1}}.$$

Wir erhalten somit eine streng monoton *steigende* Teilfolge (a_{n_k}) . $\rangle\rangle\rangle\rangle$

Bemerkung Der Satz behauptet *nicht*, dass man immer je eine monoton fallende und eine steigende Teilfolge auswählen kann. Ist die Ausgangsfolge monoton steigend, so ist auch jede Teilfolge monoton steigend. $\rightarrow$

- 17 **Satz von Bolzano-Weierstraß** Jede beschränkte reelle Folge besitzt eine konvergente Teilfolge. $\times$

⟨⟨⟨ Mit dem vorangehenden Lemma können wir aus jeder Folge eine monotone Teilfolge auswählen. Diese ist beschränkt, wenn die Originalfolge beschränkt ist. Also ist sie mit dem Satz von der monotonen Konvergenz 14 konvergent. ⟩⟩⟩

➤ *Beispiele* A. $((-1)^n)$ besitzt unter anderem die konvergenten Teilfolgen $(1, 1, \dots)$ und $(-1, -1, \dots)$.

B. Jede Abzählung der rationalen Zahlen im Intervall $[0, 1]$ besitzt eine konvergente Teilfolge. Es gibt sogar zu jeder reellen Zahl $x \in [0, 1]$ eine Teilfolge, die gegen x konvergiert.

C. Die monotone Folge $(1, 2, 3, \dots)$ besitzt *keine* konvergente Teilfolge. Sie ist aber auch nicht beschränkt. $\leftarrow$

■ Cauchyfolgen

Wann aber ist eine beschränkte Folge auch ohne Auswahl einer Teilfolge konvergent? Die Untersuchung dieser Frage führt zum Begriff der *Cauchyfolge*.

Definition Eine reelle Folge (a_n) heißt *Cauchyfolge*, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N \geq 1$ gibt, so dass

$$|a_n - a_m| < \varepsilon, \quad n, m \geq N. \quad \times$$

In einer Cauchyfolge wird der Abstand *aller Folgenglieder untereinander* also beliebig klein, wenn deren Indizes nur groß genug sind.

- 18 ➤ *Beispiele* A. $((-1)^n)$ bildet *keine* Cauchyfolge, denn

$$|(-1)^{n+1} - (-1)^n| = 2, \quad n \geq 1.$$

- B. Für die Summen e_n von Beispiel 15 gilt für alle $m \geq n \geq 1$

$$|e_n - e_m| = \sum_{k=n+1}^m \frac{1}{k!} \leq \sum_{k=n+1}^m \frac{1}{2^{k-1}} \leq \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Da dies für alle $m \geq n$ gilt und die rechte Seite eine Nullfolge in n bildet, ist (e_n) eine Cauchyfolge. $\leftarrow$

Weitere Beispiele für Cauchyfolgen sind an dieser Stelle nicht nötig. Denn es gilt ganz allgemein:

19 **Satz** Jede konvergente reelle Folge ist eine Cauchyfolge. ✕

⟨⟨⟨⟨ Sei (a_n) konvergent mit Grenzwert a . Dann existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N \geq 1$, so dass

$$|a_n - a| < \varepsilon/2, \quad n \geq N.$$

Für alle $n, m \geq N$ gilt dann aufgrund der Dreiecksungleichung

$$|a_n - a_m| \leq |a_n - a| + |a - a_m| < \varepsilon.$$

Somit ist (a_n) eine Cauchyfolge. ⟩⟩⟩⟩

Bemerkung Es reicht nicht, nur die Abstände $|a_{n+1} - a_n|$ zu betrachten. So bilden die Summen

$$h_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$$

eine streng monoton steigende Folge, und es gilt

$$|h_{n+1} - h_n| = \frac{1}{n+1} \rightarrow 0.$$

Trotzdem ist diese Folge divergent 6.4. $\rightarrow$

Uns interessiert natürlich vor allem die Frage, ob auch umgekehrt eine Cauchyfolge immer konvergiert. Dazu zunächst zwei Teilergebnisse.

20 **Lemma 1** Jede Cauchyfolge ist beschränkt. ✕

⟨⟨⟨⟨ Dies wird genauso bewiesen wie der Beschränktheitsatz 4. Nur wählt man statt des Grenzwertes a zum Beispiel das Folgenglied a_N . ⟩⟩⟩⟩

21 **Lemma 2** Besitzt eine Cauchyfolge eine konvergente Teilfolge, so ist auch die Gesamtfolge konvergent, und die Grenzwerte stimmen überein. ✕

⟨⟨⟨⟨ Sei (a_{n_k}) eine konvergente Teilfolge der Cauchyfolge (a_n) und a deren Grenzwert. Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert aufgrund der Cauchyfolgen-Eigenschaft ein $N \geq 1$, so dass

$$|a_n - a_m| < \varepsilon/2, \quad n, m \geq N.$$

Aufgrund der Konvergenz der Teilfolge existiert außerdem ein $\tilde{N} \geq 1$, so dass

$$|a_{n_k} - a| < \varepsilon/2, \quad n_k \geq \tilde{N}.$$

Wählen wir ein solches $n_k \geq \max(N, \tilde{N})$, so folgt

$$|a_n - a| \leq |a_n - a_{n_k}| + |a_{n_k} - a| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon, \quad n \geq N.$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, folgt die Konvergenz von (a_n) gegen a . ⟩⟩⟩⟩

Zusammen mit dem Satz von Bolzano-Weierstrass folgt nun das Konvergenzkriterium von Cauchy, das ohne Kenntnis des Grenzwertes auskommt.

- 22 **Cauchy Kriterium** Eine reelle Folge ist konvergent genau dann, wenn sie eine Cauchyfolge bildet. ✕

⟨⟨⟨⟨ ⇒ Siehe oben ₁₉.

⇐ Eine reelle Cauchyfolge (a_n) ist beschränkt ₂₀. Nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß ₁₇ besitzt sie also eine konvergente Teilfolge. Dann ₂₁ ist aber auch die gesamte Folge konvergent mit demselben Grenzwert. ⟩⟩⟩⟩

- 23 ➤ **Beispiel** Die durch

$$d_n = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} = 1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \dots + \frac{(-1)^n}{n!}$$

definierte Folge (d_n) ist nicht monoton, doch für $m > n \geq 1$ gilt

$$|d_n - d_m| \leq \sum_{k=n+1}^m \frac{1}{k!} \leq \frac{1}{2^{n-1}}$$

mit derselben Abschätzung wie in Beispiel 18. Also ist auch (d_n) eine Cauchyfolge und damit konvergent. Übrigens gilt

$$\lim d_n = \frac{1}{e} = \frac{1}{\lim e_n}.$$

Dies ergibt sich aus der Potenzreihendarstellung der Exponentialfunktion. ◀

5.5

Häufungswerte

Es gibt Folgen, die nicht konvergieren, aber trotzdem einem oder mehreren Punkten immer wieder »beliebig nahe« kommen. Statt von Grenzwerten spricht man in diesen Fällen von *Häufungswerten*.

Definition Eine reelle Zahl a heißt *Häufungswert* einer reellen Folge (a_n) , wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ und jedem $N \geq 1$ ein $n \geq N$ gibt, so dass

$$|a_n - a| < \varepsilon. \quad \times$$

Da es zu jedem N ein solches $n \geq N$ gibt, ist die Menge $\{n : |a_n - a| < \varepsilon\}$ unbeschränkt. Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es daher *unendlich viele* n mit der Eigenschaft, dass $|a_n - a| < \varepsilon$. Nicht verlangt wird dagegen, dass dies für *alle hinreichend großen* n gilt.

- **Beispiele** A. $(1/n)$ hat 0 als Häufungswert und als Grenzwert.
 B. $((-1)^n)$ hat die zwei Häufungswerte 1 und -1 .
 C. (n) hat keinen Häufungswert.
 D. $(\sin(n\pi/2 + 1/n))$ hat die drei Häufungswerte -1 , 0 und 1. ◀

Um den Unterschied zwischen Grenz- und Häufungswert deutlich zu machen, hat sich folgende Sprechweise eingebürgert. Eine Eigenschaft A gilt für *unendlich viele* n , wenn die Menge $\{n \in \mathbb{N} : A(n)\}$ unbeschränkt ist. Sie gilt für *fast alle* n , oder *für alle bis auf endlich viele* n , wenn die Menge

$$\mathbb{N} \setminus \{n \in \mathbb{N} : A(n)\} = \{n \in \mathbb{N} : \neg A(n)\}$$

endlich und damit beschränkt ist.

- **Beispiele** A. Fast alle Primzahlen sind ungerade.
 B. Unendlich viele natürlichen Zahlen sind ungerade, aber nicht fast alle.
 C. Fast alle ungeraden Zahlen sind nicht durch 2 teilbar. ◀

Schließlich führen wir noch den grundlegenden Begriff der *Umgebung* ein. Ist $a \in \mathbb{R}$ und $\varepsilon > 0$, so nennen wir die Menge

$$U_\varepsilon(a) := \{x \in \mathbb{R} : |x - a| < \varepsilon\} = (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$$

die ε -*Umgebung* von a . Sie besteht aus allen reellen Zahlen x , deren Abstand von a strikt kleiner als ε ist. — Mit diesen Begriffen können wir Häufungs- und Grenzwerte wie folgt charakterisieren.

- 24 **Charakterisierung von Häufungs- und Grenzwert** Eine reelle Zahl a ist Häufungswert respektive Grenzwert einer reellen Folge (a_n) genau dann, wenn in jeder ε -Umgebung von a unendlich viele respektive fast alle Folgenglieder liegen. ✕

Jeder Grenzwert ist somit ein Häufungswert. Aber nicht jeder Häufungswert ist ein Grenzwert. Eine Folge kann keinen, einen, oder viele Häufungswerte haben. Selbst wenn sie nur einen Häufungswert hat, muss dieser kein Grenzwert sein.

- **Beispiele** A. $((-1)^n)_{n \geq 0}$ besitzt genau zwei Häufungswerte, 1 und -1 .
 B. $(1, 2, 3, \dots)$ besitzt keinen Häufungswert.
 C. $(0, 1, 0, 2, 0, 3, \dots)$ besitzt 0 als einzigen Häufungswert, ist aber nicht konvergent. ◀

Zwischen Häufungswert und Teilfolge besteht folgender Zusammenhang, der ebenfalls als Charakterisierung von Häufungswerten dienen kann.

- 25 **Satz** Eine reelle Folge (a_n) besitzt a als Häufungswert genau dann, wenn es eine Teilfolge von (a_n) gibt, die gegen a konvergiert. ✕

⟨⟨⟨⟨ ⇐ Gibt es eine Teilfolge (a_{n_k}) mit $a_{n_k} \rightarrow a$, so liegen in jeder ε -Umgebung von a fast alle Glieder der Teilfolge. Damit liegen in dieser Umgebung aber auch unendlich viele Glieder der Originalfolge. Also ist a ein Häufungswert dieser Folge.

⇒ Sei umgekehrt a ein Häufungswert der Folge (a_n) . Sei (ε_n) eine beliebige monoton fallende Nullfolge, zum Beispiel $\varepsilon_n = 1/2^n$. Dann definieren wir rekursiv eine Auswahlfolge (n_k) durch $n_1 := 1$ und

$$n_k := \min \{n > n_{k-1} : a_n \in U_{\varepsilon_k}(a)\}, \quad k \geq 2.$$

Da a ein Häufungswert ist, sind die betrachteten Mengen nicht leer und besitzen somit ein Minimum. Offensichtlich gilt dann $n_k > n_{k-1}$.²

Wir behaupten, dass $a_{n_k} \rightarrow a$. Nun, da (ε_n) eine positive Nullfolge bildet, existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $K \geq 1$ so, dass

$$0 < \varepsilon_k < \varepsilon, \quad k \geq K.$$

Aufgrund der Definition der n_k gilt dann auch

$$a_{n_k} \in U_{\varepsilon_k}(a) \subset U_\varepsilon(a), \quad k \geq K.$$

In jeder ε -Umgebung von a liegen somit fast alle Glieder der Teilfolge (a_{n_k}) . Also gilt $a_{n_k} \rightarrow a$. ⟩⟩⟩⟩

Den Satz von Bolzano-Weierstraß können wir damit auch so formulieren.

26 Satz von Bolzano-Weierstraß für Häufungswerte Jede beschränkte reelle Folge besitzt einen Häufungswert. ✕

⟨⟨⟨⟨ Jede beschränkte reelle Folge besitzt eine konvergente Teilfolge¹⁷. Deren Grenzwert ist damit auch Häufungswert der Gesamtfolge. ⟩⟩⟩⟩

5.6 Uneigentliche Grenzwerte

Neben den klassisch konvergenten Folgen hat man es oft auch mit Folgen zu tun, die in gewisser Weise gegen ∞ oder $-\infty$ streben. Dieses Verhalten können wir präzisieren, indem wir auch für diese Fälle geeignete Umgebungen betrachten. Dazu definieren wir für alle $\varepsilon > 0$ die offenen Intervalle

$$U_\varepsilon(\infty) := (1/\varepsilon, \infty), \quad U_\varepsilon(-\infty) := (-\infty, -1/\varepsilon)$$

² Statt des Minimums könnten wir auch irgendein Element dieser Menge wählen. Das folgende Argument bleibt davon unberührt.

als ε -Umgebungen von ∞ respektive $-\infty$. Es gilt dann beispielsweise

$$U_\varepsilon(\infty) \subset U_\delta(\infty), \quad 0 < \varepsilon < \delta.$$

Die Umgebungen werden also »kleiner«, wenn ε kleiner wird, wie es sich für Umgebungen gehört. Man beachte, dass diese Umgebungen die Punkte ∞ respektive $-\infty$ nicht enthalten.

Definition Eine reelle Folge (a_n) *konvergiert uneigentlich gegen ∞* , wenn in jeder ε -Umgebung von ∞ fast alle Folgenglieder liegen. Man nennt dann ∞ den *uneigentlichen Grenzwert* einer solchen Folge und schreibt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty.$$

Entsprechendes gilt für die uneigentliche Konvergenz gegen $-\infty$. ✕

Dazu äquivalent ist die folgende Formulierung.

Notiz Es gilt $a_n \rightarrow \infty$ genau dann, wenn zu jedem $M > 0$ ein $N \geq 1$ existiert, so dass

$$a_n > M, \quad n \geq N.$$

Jede beliebige Schranke wird also von fast allen Folgengliedern übertroffen. ✕

► **Beispiel** Es gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n!} = \infty.$$

Denn sei $M > 0$. Wegen $M^n/n! \rightarrow 0$ ₁₂ gibt es ein N , so dass

$$\frac{M^n}{n!} < 1, \quad n \geq N.$$

Für $n \geq N$ ist also $n! > M^n$ und damit $\sqrt[n]{n!} > M$. ◀

Auch im Fall der uneigentlichen Konvergenz ist der Grenzwert *eindeutig bestimmt*. Aber natürlich ist eine uneigentlich konvergente Folge *nicht beschränkt*.

■ Grenzwertsätze

Die Grenzwertgleichungen ₇ verallgemeinern sich nur unter geeigneten zusätzlichen Voraussetzungen auf uneigentliche Grenzwerte. Um diese handlich zu formulieren, schreiben wir $a_n > c$ mit einer reellen Konstanten c , wenn $a_n > c$ für fast alle n gilt.

27 Satz Für reelle Folgen (a_n) und (b_n) gilt:

- (i) $|a_n| \rightarrow \infty \Rightarrow a_n^{-1} \rightarrow 0$.
- (ii) $a_n \rightarrow 0 \wedge a_n > 0 \Rightarrow a_n^{-1} \rightarrow \infty$.
- (iii) $a_n \rightarrow \infty \wedge b_n > c \Rightarrow a_n + b_n \rightarrow \infty$.
- (iv) $a_n \rightarrow \infty \wedge b_n > c > 0 \Rightarrow a_n b_n \rightarrow \infty$. $\times$

⟨⟨⟨⟨ Sei jeweils $\varepsilon > 0$. (i) Gilt $|a_n| > 1/\varepsilon$ für fast alle n , so auch

$$|a_n^{-1}| = |a_n|^{-1} < \varepsilon.$$

Also bildet (a_n^{-1}) eine Nullfolge.

(ii) Nach Voraussetzung sind fast alle Folgenglieder a_n positiv. Da (a_n) eine Nullfolge bildet, gilt $0 < a_n < \varepsilon$ für fast alle n . Dann gilt aber auch

$$\frac{1}{\varepsilon} < \frac{1}{a_n}$$

für fast alle n . Somit folgt $a_n^{-1} \rightarrow \infty$.

(iii) Wegen $a_n \rightarrow \infty$ gilt $a_n > 1/\varepsilon - c$ für fast alle n . Also gilt auch

$$a_n + b_n > \frac{1}{\varepsilon} - c + b_n > \frac{1}{\varepsilon}$$

für fast alle n . Fast alle Glieder der Folge $(a_n + b_n)$ liegen somit in $U_\varepsilon(\infty)$, was zu zeigen war.

(iv) Für fast alle n gilt $a_n > \varepsilon/c$. Mit $b_n > c > 0$ für fast alle n folgt

$$a_n b_n > a_n c > 1/\varepsilon$$

für fast alle n . Also konvergiert auch $(a_n b_n)$ uneigentlich gegen ∞ . $\rangle\rangle\rangle\rangle$

Die Aussagen werden *falsch*, wenn man die $>$ -Bedingungen fallen lässt _{A-26}.

Interpretieren wir die Symbole $\pm\infty$ als Grenzwerte uneigentlich konvergenter Folgen, so rechtfertigt dieser Satz die folgenden Vereinbarungen für das Rechnen mit ihnen. Für reelle x *definieren* wir also

$$\infty + x := \infty, \quad \frac{x}{\infty} = 0, \quad \infty \cdot x := \begin{cases} \infty, & x > 0, \\ -\infty, & x < 0. \end{cases}$$

Die Konventionen für $-\infty$ erhält man durch Umkehrung aller Vorzeichen.

Nicht erklärt sind dagegen die Ausdrücke

$$\infty - \infty, \quad \infty \cdot 0, \quad \frac{\infty}{\infty},$$

denn ihnen lässt sich kein Wert in sinnvoller Weise zuordnen. Vielmehr kann mit geeigneten Folgen *jeder Wert* als Grenzwert realisiert werden _{A-30}.

Wir erweitern jetzt noch drei Existenzsätze auf uneigentliche Grenzwerte.

- 28 **Erweiterter Approximationssatz** In jeder nichtleeren Menge A reeller Zahlen existiert eine Folge (a_n) , die gegen $\sup A$ konvergiert. Entsprechendes gilt für $\inf A$. ✕

⟨⟨⟨⟨ Sei $a = \sup A$ und (ε_n) eine beliebige Nullfolge positiver Zahlen. Aufgrund des Approximationssatzes 2.12 existiert zu jedem n ein Element

$$a_n \in U_{\varepsilon_n}(a) \cap A.$$

Dies gilt sowohl für $a < \infty$ als auch für $a = \infty$. Die so gewonnene Folge (a_n) liegt in A , und genau wie zuvor 25 zeigt man, dass sie gegen a konvergiert. ⟩⟩⟩⟩

- 29 **Erweiterter Satz von der monotonen Konvergenz** Jede monotone Folge konvergiert gegen einen eigentlichen oder uneigentlichen Grenzwert. ✕

⟨⟨⟨⟨ Ist die Folge beschränkt, so kommt der Satz von der monotonen Konvergenz 14 zur Anwendung. Andernfalls ist die Folge unbeschränkt. Wegen der Monotonie hat sie dann den uneigentlichen Grenzwert ∞ oder $-\infty$. ⟩⟩⟩⟩

- 30 **Erweiterter Satz von Bolzano-Weierstraß** Jede reelle Folge besitzt eine eigentlich oder uneigentlich konvergente Teilfolge. ✕

⟨⟨⟨⟨ Dies folgt mit dem Satz von der Existenz monotoner Teilfolgen 16 und dem erweiterten Satz von der monotonen Konvergenz. ⟩⟩⟩⟩

► **Beispiele** A. $(n!^{n!})$ konvergiert uneigentlich gegen ∞ .

B. $(0, 1, 0, 2, 0, 3, \dots)$ besitzt die konvergente Teilfolge $(0, 0, \dots)$ und die uneigentlich konvergente Teilfolge $(1, 2, 3, \dots)$.

C. $((-1)^n n)$ besitzt die uneigentlich konvergenten Teilfolgen $(2, 4, 6, \dots)$ und $(-1, -3, -5, \dots)$. ◀

5.7

Normierte Räume und Banachräume

Bisher haben wir Folgen in $\mathbb{R}$ betrachtet. Aber natürlich wollen wir auch Folgen in $\mathbb{R}^n$ und noch allgemeineren Räumen betrachten. Um auch dort Begriffe wie Konvergenz und Grenzwert zu definieren, verallgemeinern wir den *Betrag* einer reellen Zahl zur *Norm* eines Vektors in einem *reellen Vektorraum*.

Definition Ein *reeller Vektorraum* E ist eine additive Gruppe zusammen mit einer Verknüpfung

$$\mathbb{R} \times E \rightarrow E, \quad (\lambda, v) \mapsto \lambda v,$$

genannt *skalare Multiplikation*, mit folgenden Eigenschaften:

$$(V-1) \quad 1v = v,$$

$$(V-2) \quad \lambda(u + v) = \lambda u + \lambda v,$$

$$(V-3) \quad (\lambda + \mu)v = \lambda v + \mu v,$$

$$(V-4) \quad \lambda(\mu v) = (\lambda\mu)v,$$

für alle $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ und $u, v \in E$. $\times$

Additive Gruppe bedeutet hierbei, dass für die Addition in E die Axiome $(A1-3)_{2.1}$ gelten. — Die große Tragweite des Begriffs des Vektorraums wird später klar werden. Im Augenblick reicht uns folgendes

► A. Das Standardbeispiel ist der $\mathbb{R}^n$ mit der Addition

$$u + v = (u_1, \dots, u_n) + (v_1, \dots, v_n) := (u_1 + v_1, \dots, u_n + v_n)$$

und der skalaren Multiplikation

$$\lambda v = \lambda(v_1, \dots, v_n) := (\lambda v_1, \dots, \lambda v_n).$$

Diese hat alle geforderten Eigenschaften.

B. Insbesondere kann auch $\mathbb{R}$ als reeller Vektorraum aufgefasst werden. Allerdings ignoriert man dabei die Körperstruktur.

C. Der Raum $\mathbb{C}$ mit der üblichen Addition komplexer Zahlen und der Multiplikation mit *reellen Zahlen* ist ein reeller Vektorraum. Man kann ihn mit dem $\mathbb{R}^2$ identifizieren. $\blacktriangleleft$

Die Untersuchung von Vektorräumen ist ein wichtiges Thema der linearen Algebra. Für uns reicht im Moment die Definition, das Standardbeispiel und die Tatsache, dass man auf solchen Räumen das Konzept des Betrages zu dem der *Norm* verallgemeinern kann.

Definition Eine *Norm* auf einem reellen Vektorraum E ist eine Funktion

$$\|\cdot\| : E \rightarrow \mathbb{R}$$

mit folgenden Eigenschaften:

(N-1) *Definitheit*: $\|x\| \geq 0$, und $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$,

(N-2) *Positive Homogenität*: $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$,

(N-3) *Dreiecksungleichung*: $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$,

für alle $x, y \in E$ und $\lambda \in \mathbb{R}$. Das Paar $(E, \|\cdot\|)$ nennt man einen *normierten Vektorraum* oder kurz *normierten Raum*. $\times$

Die Bedingungen (N-1)–(N-3) abstrahieren die wesentlichen Eigenschaften der Betragsfunktion, die eine Längenfunktion auf einem beliebigen Vektorraum aufweisen sollte. Zum Beispiel gilt auch die umgekehrte Dreiecksungleichung.

31 **Lemma** Für jede Norm gilt die *umgekehrte Dreiecksungleichung*

$$\|x - y\| \geq \left| \|x\| - \|y\| \right|. \quad \times$$

⟨⟨⟨ Wie bei der Betragsfunktion 2.8, nur mit $\|\cdot\|$ anstelle von $|\cdot|$. ⟩⟩⟩

► **Beispiele** A. Auf $\mathbb{R}$ wie auf $\mathbb{C}$ definiert der Betrag $|\cdot|$ eine Norm, die sogenannte *Betragsnorm*. Die Normeigenschaften haben wir bereits verifiziert 2.7 & 4.3.

B. Auf dem $\mathbb{R}^n$ wird durch

$$\|x\|_1 := |x_1| + \dots + |x_n|$$

die sogenannte *Summennorm* und durch

$$\|x\|_\infty := \max \{|x_1|, \dots, |x_n|\}$$

die sogenannte *Maximumsnorm* definiert. Die Normeigenschaften sind leicht zu verifizieren.

C. Die *euklidische* oder *natürliche Norm* auf dem $\mathbb{R}^n$ ist

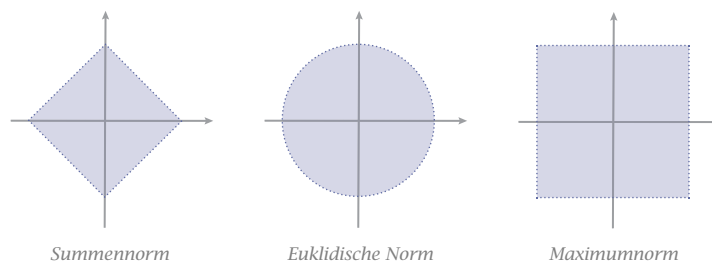
$$\|x\|_2 := \sqrt{|x_1|^2 + \dots + |x_n|^2}.$$

Nach dem Satz des Pythagoras misst sie die ›natürliche‹ Länge des Vektors x . Die Gültigkeit der Dreiecksungleichung ist allerdings nicht offensichtlich und wird gleich bewiesen werden.

D. Tatsächlich wird für jedes $p \geq 1$ durch

$$\|x\|_p := \sqrt[p]{|x_1|^p + \dots + |x_n|^p}$$

eine Norm auf $\mathbb{R}^n$ definiert. Das wird uns aber erst später beschäftigen. ◀

Abb 2 Die Mengen $\|x\| < 1$ bezüglich verschiedener Normen

■ Skalarprodukte

Um auch den euklidischen Abstand als Norm zu erkennen, benötigen wir noch das Konzept des *Skalarproduktes*.

Definition Ein *Skalarprodukt* auf einem reellen Vektorraum E ist eine Funktion

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$$

mit folgenden Eigenschaften:

(S-1) **Definitheit:** $\langle x, x \rangle \geq 0$, und $\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$,

(S-2) **Symmetrie:** $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$,

(S-3) **Linearität:** $\langle \lambda x + \mu y, z \rangle = \lambda \langle x, z \rangle + \mu \langle y, z \rangle$,
für alle $x, y, z \in E$ und $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. ✕

Wegen der Symmetrie ist ein reelles Skalarprodukt auch linear im zweiten Argument, also

$$\langle x, \lambda y + \mu z \rangle = \lambda \langle x, y \rangle + \mu \langle x, z \rangle.$$

Man spricht daher auch von einer *bilinearen Form* auf E . Für diese gilt übrigens $\langle x, 0 \rangle = 0$ für alle $x \in E$.

Für Skalarprodukte gilt folgende grundlegende Ungleichung, die man meist nur *Schwarzsche Ungleichung* nennt.

32 **Cauchy-Schwarz-Bunjakowskische Ungleichung** Für ein Skalarprodukt auf einem reellen Vektorraum E gilt

$$\langle x, y \rangle^2 \leq \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle, \quad x, y \in E.$$

Gleichheit gilt dabei genau dann, wenn x und y linear abhängig sind. ✕

⟨⟨⟨ Für jedes Skalarprodukt und jede reelle Zahl λ gilt

$$0 \leq \langle x + \lambda y, x + \lambda y \rangle = \langle x, x \rangle + 2\lambda \langle x, y \rangle + \lambda^2 \langle y, y \rangle.$$

Da die Behauptung offensichtlich für $y = 0$ gilt, dürfen wir $y \neq 0$ annehmen. Dann ist $\langle y, y \rangle > 0$, und wir können

$$\lambda = -\frac{\langle x, y \rangle}{\langle y, y \rangle}$$

wählen. Einsetzen in die vorangehende Ungleichung ergibt

$$0 \leq \langle x, x \rangle - 2 \frac{\langle x, y \rangle^2}{\langle y, y \rangle} + \frac{\langle x, y \rangle^2}{\langle y, y \rangle} = \langle x, x \rangle - \frac{\langle x, y \rangle^2}{\langle y, y \rangle},$$

und Multiplikation mit $\langle y, y \rangle > 0$ ergibt die Behauptung

$$0 \leq \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle - \langle x, y \rangle^2.$$

Angenommen, es gilt sogar Gleichheit. Ist $y = 0$, so sind x und y ohnehin linear abhängig. Ist dagegen $y \neq 0$, so ergibt dieselbe Wahl von λ und dieselbe Rechnung in umgekehrter Richtung die Identität

$$\langle x + \lambda y, x + \lambda y \rangle = 0,$$

also $x + \lambda y = 0$. Somit sind x und y linear abhängig. »»»»

33 Satz Ist $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ein Skalarprodukt auf einem Vektorraum E , so definiert

$$\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

eine Norm auf E . ✕

»»»» Definitheit ist leicht zu verifizieren. Positive Homogenität folgt mit

$$\|\lambda x\| = \sqrt{\langle \lambda x, \lambda x \rangle} = \sqrt{\lambda^2 \langle x, x \rangle} = |\lambda| \sqrt{\langle x, x \rangle} = |\lambda| \|x\|.$$

Ferner ist aufgrund der Cauchyungleichung

$$|\langle x, y \rangle| \leq \sqrt{\langle x, x \rangle} \sqrt{\langle y, y \rangle} = \|x\| \|y\|.$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 &= \langle x + y, x + y \rangle \\ &= \langle x, x \rangle + 2 \langle x, y \rangle + \langle y, y \rangle \\ &\leq \|x\|^2 + 2 \|x\| \|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2. \end{aligned}$$

Wurzelziehen ergibt die Dreiecksungleichung. »»»»

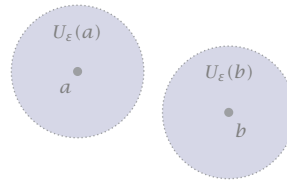
► Das **Standardskalarprodukt** auf dem $\mathbb{R}^n$ ist

$$\langle x, y \rangle := \sum_{k=1}^n x_k y_k = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n.$$

Somit ist $\langle x, x \rangle = |x_1|^2 + \dots + |x_n|^2$, und die hiervon induzierte Norm ist die **euklidische Norm** $\|\cdot\|_2$, die hiermit ₃₃ auch tatsächlich als Norm erkannt ist. ◀

Abb 3

Trennende Umgebungen
 $U_\varepsilon(a)$ und $U_\varepsilon(b)$



Bemerkung Nicht jede Norm wird durch ein Skalarprodukt gegeben. Dies ist nur dann der Fall, wenn die *Parallelogrammgleichung*

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$$

erfüllt ist _{A-37}. $\rightarrow$

Wir haben damit erste Beispiele von normierten Räumen. Viele weitere werden folgen. Eine zentrale Rolle spielen sie zum Beispiel in der Funktionalanalysis, wo man verschiedenste Räume von Funktionen und Abbildungen studiert.

■ Umgebungen

Um Konvergenz für Folgen in einem normierten Vektorraum E zu definieren, genügt es nun, den Begriff der Umgebung entsprechend zu verallgemeinern. Die ε -Umgebungen eines Punktes a sind hier die Mengen

$$U_\varepsilon(a) := \{x \in E : \|x - a\| < \varepsilon\}.$$

Sie werden auch *offene ε -Kugeln* um a genannt und mit $B_\varepsilon(a)$ bezeichnet.

Allerdings sehen diese Kugeln nur im Fall der euklidischen Norm wie handelsübliche Kugeln aus – siehe Abbildung 2. Dies ist jedoch für mathematische Zwecke unwesentlich. Wichtig ist, dass es um zwei verschiedene Punkte eines normierten Raumes immer ε -Umgebungen gibt, die *disjunkt* sind. Man sagt, man kann verschiedene Punkte durch offene Umgebungen *trennen*.

- 34 **Trennungseigenschaft** Zu je zwei Punkten $a \neq b$ eines normierten Raumes gibt es immer ein $\varepsilon > 0$ derart, dass

$$U_\varepsilon(a) \cap U_\varepsilon(b) = \emptyset. \quad \times$$

⟨⟨⟨ Man nehme $\varepsilon = \|b - a\|/2 > 0$ und führe die Annahme, dass die entsprechenden Umgebungen einen Punkt gemeinsam haben, zum Widerspruch. ⟩⟩⟩

■ Konvergenz

Die Definition einer konvergenten Folge und ihres Grenzwertes in einem normierten Raum ist nun *wörtlich* dieselbe wie im reellen Fall ₂₄.

Definition und Satz Eine Folge (a_n) in einem normierten Raum E heißt **konvergent** mit Grenzwert a , falls jede ε -Umgebung von a fast alle Folgenglieder enthält. Dieser Grenzwert a ist eindeutig bestimmt. ✕

⟨⟨⟨ Zu jedem $b \neq a$ existiert aufgrund des Trennungssatzes₃₄ ein $\varepsilon > 0$, so dass die ε -Umgebungen um a und b disjunkt sind. Da fast alle Folgenglieder in $U_\varepsilon(a)$ liegen, können nur noch höchstens endlich viele in $U_\varepsilon(b)$ liegen. Also kann b kein Grenzwert der Folge sein. ⟩⟩⟩

35 **Notiz** In einem normierten Raum konvergiert eine Folge (a_n) genau dann gegen den Punkt a , wenn $(\|a_n - a\|)$ eine reelle Nullfolge bildet. ✕

⟨⟨⟨ Dies ergibt sich aus

$$a_n \in U_\varepsilon(a) \Leftrightarrow \|a_n - a\| < \varepsilon \Leftrightarrow \|a_n - a\| \in U_\varepsilon(0),$$

wobei $U_\varepsilon(0)$ die ε -Umgebung von $0 \in \mathbb{R}$ meint. ⟩⟩⟩

■ Grenzwertsätze

Auch die Grenzwertsätze verallgemeinern sich von reellen Folgen direkt auf Folgen in normierten Räumen. Wir fassen uns daher kurz.

36 **Satz** Gilt $a_n \rightarrow a$ in einem normierten Vektorraum E , so gilt auch

$$\|a_n\| \rightarrow \|a\|$$

in $\mathbb{R}$. Jede konvergente Folge ist daher auch **beschränkt** – das heißt, es gibt ein $M \geq 0$, so dass $\|a_n\| \leq M$ für alle n . ✕

⟨⟨⟨ Wegen der umgekehrten Dreiecksungleichung gilt

$$|\|a_n\| - \|a\|| \leq \|a_n - a\| \rightarrow 0.$$

Also konvergiert $(\|a_n\|)$ gegen $\|a\|$. Insbesondere ist diese Folge beschränkt. ⟩⟩⟩

37 **Grenzwertgleichung für Linearkombinationen** Sind (a_n) und (b_n) zwei konvergente Folgen in einem normierten Vektorraum, so ist auch jede Linearkombination $(\lambda a_n + \mu b_n)$ konvergent, und es gilt

$$\lim (\lambda a_n + \mu b_n) = \lambda \lim a_n + \mu \lim b_n. \quad \text{✕}$$

⟨⟨⟨ Mit $a = \lim a_n$ und $b = \lim b_n$ ist

$$\begin{aligned} \|(\lambda a_n + \mu b_n) - (\lambda a + \mu b)\| &= \|\lambda(a_n - a) - \mu(b_n - b)\| \\ &\leq |\lambda| \|a_n - a\| + |\mu| \|b_n - b\|. \end{aligned}$$

Wegen $a_n \rightarrow a$ und $b_n \rightarrow b$ steht auf der rechten Seite eine Nullfolge₃₅. Also bildet auch die linke Seite eine Nullfolge₅, und die Behauptung folgt₃₅. ⟩⟩⟩

■ Konvergenz in $\mathbb{R}^m$ und $\mathbb{C}$

Eine Folge (x_n) im $\mathbb{R}^m$ heißt auch *vektorwertige Folge*. Hier ist jedes Folgenglied ein m -Tupel, also

$$x_n = (x_{n,1}, \dots, x_{n,m}).$$

Ein Grenzwert einer solchen Folge ist dann ebenfalls ein m -Tupel $a = (a_1, \dots, a_m)$.

- 38 **Satz** Eine vektorwertige Folge (x_n) konvergiert gegen a bezüglich der Summen-, euklidischen und Maximumnorm genau dann, wenn sie also *komponentenweise konvergiert*:

$$x_{n,i} \rightarrow a_i, \quad 1 \leq i \leq m. \quad \times$$

Zunächst eine Ungleichung, die öfter benötigt wird.

- 39 **Lemma** Für $x \in \mathbb{R}^m$ gilt

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq m \|x\|_\infty. \quad \times$$

⟨⟨⟨ Es ist ja

$$\begin{aligned} \left(\max_{1 \leq i \leq m} |x_i| \right)^2 &\leq |x_1|^2 + \dots + |x_m|^2 \\ &\leq (|x_1| + \dots + |x_m|)^2 \leq \left(m \max_{1 \leq i \leq m} |x_i| \right)^2. \end{aligned}$$

Das heißt, es ist $\|x\|_\infty^2 \leq \|x\|_2^2 \leq \|x\|_1^2 \leq m^2 \|x\|_\infty^2$. Wurzelziehen ergibt die Behauptung. ⟩⟩⟩

⟨⟨⟨ *Beweis des Satzes* Aufgrund des letzten Lemmas ist

$$\|x_n - a\|_\infty \leq \|x_n - a\|_2 \leq \|x_n - a\|_1 \leq m \|x_n - a\|_\infty.$$

Bildet also eine dieser Normen eine Nullfolge, dann auch jede andere. Konvergenz in jeder Komponente ist gleichbedeutend mit Konvergenz bezüglich $\|\cdot\|_\infty$, woraus die Behauptung folgt. ⟩⟩⟩

Komplexe Folgen können als ein Spezialfall dieses Satzes betrachtet werden, wenn man $\mathbb{C}$ mit $\mathbb{R}^2$ identifiziert. Eine komplexe Folge konvergiert also genau dann, wenn die Real- und Imaginärteile ihrer Folgenglieder konvergieren A-36.

Schließlich gilt auch der

- 40 **Satz von Bolzano-Weierstraß im $\mathbb{R}^m$** Jede beschränkte vektorwertige Folge besitzt eine konvergente Teilfolge. $\times$

⟨⟨⟨ Sei $(x_n)_n$ eine beschränkte Folge im $\mathbb{R}^m$. Sei $x_n = (x_{n,1}, \dots, x_{n,m})$. Dann ist auch jede Komponentenfolge

$$(x_{n,i})_n, \quad 1 \leq i \leq m,$$

beschränkt. Nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß für reelle Folgen¹⁷ existiert somit eine erste Teilfolge $(x_{n'_k})$, deren erste Koordinate konvergiert:

$$x_{n'_k,1} \rightarrow a_1.$$

Aus dieser können wir eine zweite Teilfolge $(x_{n''_k})$ auswählen, wo auch die zweite Koordinate konvergiert:

$$x_{n''_k,2} \rightarrow a_2.$$

Diesen Auswahlverfahren können wir fortsetzen, bis wir eine letzte Teilfolge (x_{n_k}) erhalten, wo auch die letzte Koordinate konvergiert:

$$x_{n_k,m} \rightarrow a_m.$$

Somit konvergiert jede Komponente der Teilfolge (x_{n_k}) . Damit³⁸ konvergiert diese Teilfolge aber auch in der euklidischen Norm gegen $a = (a_1, \dots, a_m)$. $\ggggg$

■ Cauchyfolgen und Banachräume

Cauchyfolgen in normierten Räumen sind wie reelle Cauchyfolgen definiert.

Definition Eine Folge (a_n) in einem normierten Vektorraum heißt **Cauchyfolge**, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N \geq 1$ gibt, so dass

$$\|a_n - a_m\| < \varepsilon, \quad n, m \geq N. \quad \times$$

Jede konvergente Folge ist wieder eine Cauchyfolge, und Lemma 1²⁰ und 2²¹ für reelle Cauchyfolgen gelten genauso in normierten Räumen. In den Beweisen muss man lediglich den Betrag durch die jeweilige Norm ersetzen:

41 Satz In einem normierten Vektorraum gilt:

- (1) Jede konvergente Folge ist eine Cauchyfolge.
- (2) Jede Cauchyfolge ist beschränkt.
- (3) Besitzt eine Cauchyfolge eine konvergente Teilfolge, so ist die gesamte Folge konvergent mit demselben Grenzwert. $\times$

Der große Unterschied ist jedoch, dass das Cauchy Kriterium im Allgemeinen *nicht mehr gilt*: es gibt normierte Vektorräume, in denen Cauchyfolgen *keinen* Grenzwert haben. Ein Beispiel dafür geben wir im nächsten Abschnitt.

Vielmehr ist dies eine Eigenschaft, die eine wichtige Klasse von normierten Räumen *auszeichnet*, während sie anderen Räumen fehlt. Daher erhalten solche Räume auch einen eigenen Namen.

Definition Ein normierter Vektorraum heißt **vollständig**, wenn in ihm jede Cauchyfolge einen Grenzwert besitzt. Ein vollständiger, normierter Vektorraum wird **Banachraum** genannt. $\times$

Die einfachsten Beispiele von Banachräumen kennen wir bereits.

42 Satz *Die Räume $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$ mit der Betragsnorm sowie $\mathbb{R}^n$ mit der euklidischen Norm sind vollständig, also Banachräume.* ✕

⟨⟨⟨⟨ Jede Cauchyfolge ist beschränkt. Da in den genannten Räumen der Satz von Bolzano-Weierstraß gilt, besitzt jede Cauchyfolge auch eine konvergente Teilfolge. Dann ist aber auch die Cauchyfolge selbst konvergent. ⟩⟩⟩⟩

Bemerkung Wir werden in Abschnitt ?? sehen, dass der $\mathbb{R}^n$ mit *jeder* Norm vollständig ist, da dort alle Normen äquivalent sind. →