7

Stetigkeit

Mit dem Begriff der Stetigkeit verbindet sich die Vorstellung einer Bewegung ohne abrupte Sprünge, oder einer Kurve, die man ›in einem Zug und ohne abzusetzen‹ zeichnen kann.

Natürlich ist dies keine mathematische Definition. So gibt es stetige Kurven, die ein Quadrat vollständig ausfüllen und sich damit jedem Zeichenversuch entziehen. Oder es gibt Funktionen, die in irrationalen Punkten stetig, in rationalen Punkten dagegen unstetig sind.

Dennoch weist die naive Vorstellung in die richtige Richtung. Wenn man sich mit dem Argument einer Funktion einem festen Punkt nähert, so sollten sich auch die zugehörigen Funktionswerte einem festen Wert nähern, und nicht wild herumspringen. Beschreiben wir den Abstand zum festen Punkt durch δ und den Abstand zum festen Wert durch ε, so erhalten wir bereits den Begriff der Stetigkeit in einem Punkt in der heute üblichen ε-δ-Charakterisierung.

Anders als in der naiven Vorstellung ist diese Stetigkeit aber lediglich eine *lokale* Eigenschaft. Sie kommt einem einzelnen Punkt im Definitionsbereich zu und hängt ausschließlich vom Verhalten der Funktion in einer kleinen Umgebung dieses Punktes ab. Im ›nächsten‹ Punkt kann alles schon ganz anders aussehen . . .

Erst die Stetigkeit in *allen* Punkten des Definitionsbereichs kommt der naiven Vorstellung näher. Sie bildet die Grundlage für so fundamentale Sätze wie den Zwischenwertsatz, den Satz über Umkehrfunktionen oder den Satz über Minimum & Maximum.

7.1 Stetige Funktionen und Abbildungen

Wir betrachten zuerst Funktionen

$$f: \mathbb{R} \supset D \to \mathbb{R},$$

wobei dies für $D \subset \mathbb{R} \wedge f: D \to \mathbb{R}$ steht. Typischerweise ist D ein Intervall, aber es kann auch eine beliebige andere Menge sein.

1 **Definition** *Eine Funktion $f: \mathbb{R} \supset D \to \mathbb{R}$ heißt stetig im Punkt $a \in D$, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass*

$$t \in D \wedge |t-a| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(t) - f(a)| < \varepsilon. \qquad \rtimes \tag{1}$$

Mit Quantoren stellt sich die Bedingung folgendermaßen dar:

$$\underset{\varepsilon>0}{\forall} \ \underset{\delta>0}{\exists} \ \underset{t \in D}{\forall} \ |t-a| < \delta \to |f(t) - f(a)| < \varepsilon. \tag{2}$$

Ausgedrückt mit Umgebungen bedeutet dies, dass es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass f jeden Punkt in $U_\delta(a) \cap D$ auf einen Punkt in $U_\varepsilon(f(a))$ abbildet. Es gilt also

$$t \in U_\delta(a) \cap D \quad \Rightarrow \quad f(t) \in U_\varepsilon(f(a)), \tag{3}$$

oder kürzer

$$f(U_\delta(a) \cap D) \subset U_\varepsilon(f(a)). \tag{4}$$

Für den Graphen von f bedeutet dies, dass es zu jedem horizontalen ε-Streifen $W = U_\varepsilon(f(a))$ um den Bildpunkt $f(a)$ einen vertikalen δ-Streifen $V = U_\delta(a)$ um den Urbildpunkt a gib, so dass der Graph von f über $V \cap D$ ganz in W enthalten ist – siehe Abbildung 1.

Man beachte, dass in (1), (2) und (3) nur solche $t \in U_\delta(a)$ betrachtet werden, die auch zum Definitionsbereich D von f gehören. Es wird nicht vorausgesetzt, dass f auf der gesamten δ-Umgebung von a definiert ist.

⊳ *Zwei triviale Beispiele* A. Jede konstante Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(t) = c$, ist in jedem Punkt von $\mathbb{R}$ stetig.

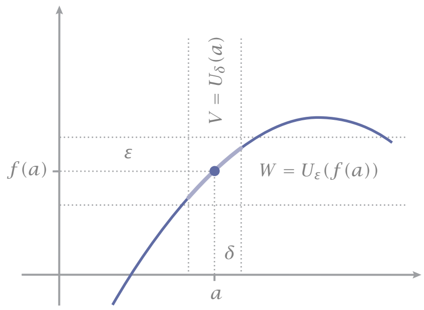
B. Jede lineare Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(t) = mt$ ist in jedem Punkt stetig. Denn zu $\varepsilon > 0$ brauchen wir nur $\delta = \varepsilon/(1+|m|)$ zu wählen. Ist dann $|t-a| < \delta$, so wird

$$|f(t) - f(a)| = |mt - ma| \leqslant |m|\,|t-a| < |m|\,\delta < \varepsilon. \qquad ◂$$

Definition *Eine Funktion $f: \mathbb{R} \supset D \to \mathbb{R}$ heißt unstetig im Punkt $a \in D$, wenn sie dort nicht stetig ist.* $\rtimes$

Abb 1

Im Punkt a stetige Funktion



Somit ist f im Punkt a unstetig, wenn es *ein* $\varepsilon > 0$ gibt, so dass in *jeder* δ-Umgebung von a *wenigstens ein* Punkt $t \in D$ existiert, so dass $f(t)$ *nicht* in $U_\varepsilon(f(a))$ liegt. Oder mit Quantoren:

$$\underset{\varepsilon>0}{\exists}\ \underset{\delta>0}{\forall}\ \underset{t\in D}{\exists}\ |t-a| < \delta \wedge |f(t) - f(a)| \geqslant \varepsilon.$$

Dies ist die logische Negation der Aussage (2).

Stetigkeit in einem Punkt ist eine *lokale Eigenschaft*. Das heißt, sie hängt nur vom Verhalten der Funktion in einer hinreichend kleinen Umgebung dieses Punktes ab. Mehr noch, man kann von der Stetigkeit in einem Punkt a *nicht* auf die Stetigkeit in einem anderen Punkt b schließen, auch wenn er noch so nahe bei a liegt. Ein Beispiel hierfür ist die Thomaefunktion A-10.

Nun noch die *globale* Stetigkeit.

Definition *Eine Funktion $f: D \to \mathbb{R}$ heißt stetig auf D, oder kurz stetig, wenn sie in jedem Punkt von D stetig ist.* ⋊

Umgekehrt ist f auf D *unstetig*, wenn sie in wenigstens *einem* Punkt von D unstetig ist. *Ein* unstetiger Punkt genügt also, um die Stetigkeit auf ganz D zu ruinieren.

2 ⊳ A. Die Betragsfunktion $t \mapsto |t|$ ist auf $\mathbb{R}$ stetig.

Abb 2

Im Punkt a unstetige Funktion

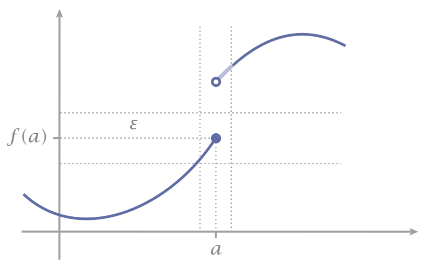
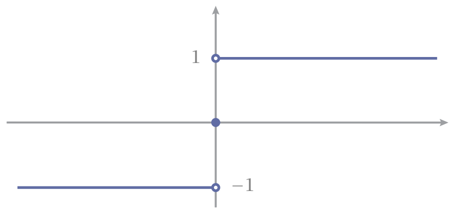


Abb 3

Signumfunktion



B. Die *Vorzeichen-* oder *Signumfunktion*

$$\operatorname{sgn}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \operatorname{sgn}(t) = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ 0, & t = 0 \\ -1, & t < 0 \end{cases}$$

ist in 0 unstetig und in allen anderen Punkten stetig.

C. Die Gaußklammer $t \mapsto [t]$ ist in jedem Punkt $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ stetig und in jedem Punkt $a \in \mathbb{Z}$ unstetig.

D. Die *Dirichletfunktion*

$$\delta: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \delta(t) = \begin{cases} 1, & t \in \mathbb{Q} \\ 0, & t \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

ist in keinem Punkt stetig.

E. Ist $f: D \to \mathbb{R}$ stetig, so ist auch die Einschränkung von f auf eine beliebige Teilmenge von D stetig. Für die Stetigkeit ist es daher unerheblich, ob die Definitionsmenge D eine ›schöne‹ Menge ist. ◂

Stetige Abbildungen

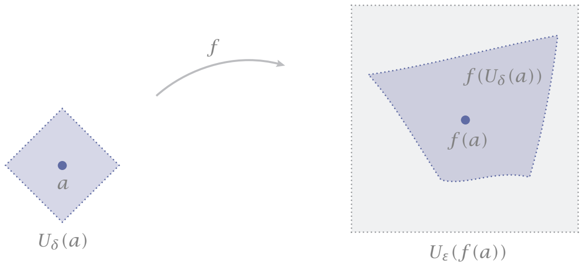
Der Begriff der Stetigkeit ist nicht nur für reellwertige Funktionen auf der reellen Geraden erklärt. Er ist auch sinnvoll für Abbildungen zwischen Räumen, in denen in irgendeiner Weise ein Abstand definiert ist. Als erste Verallgemeinerung in diese Richtung definieren wir nun Stetigkeit für Abbildungen zwischen *normierten Vektorräumen*. Für den Anfang kann man sich darunter den $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{R}^m$ mit der euklidischen Norm vorstellen.

Seien $(E, \|\cdot\|_E)$ und $(F, \|\cdot\|_F)$ normierte Vektorräume und

$$f: E \supset D \to F$$

eine Abbildung, wobei D eine beliebige Teilmenge von E sein darf. Die Stetigkeitsdefinition 1 überträgt sich auf diese Situation, wenn wir den reellen Betrag durch die entsprechenden Normen ersetzen.

Abb 4 Im Punkt a stetige Abbildung



Definition *Eine Abbildung $f: E \supset D \to F$ heißt stetig im Punkt $a \in D$, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass*

$$x \in D \wedge \|x - a\|_E < \delta \quad \Rightarrow \quad \|f(x) - f(a)\|_F < \varepsilon. \quad \rtimes$$

Um dies wie in (3) und (4) durch Umgebungen auszudrücken, sei

$$U_\delta(a) = \{x \in E : \|x - a\|_E < \delta\},$$
$$U_\varepsilon(b) = \{y \in F : \|y - b\|_F < \varepsilon\}.$$

Dann erhalten wir folgende

Äquivalente Definition *Eine Abbildung $f: E \supset D \to F$ heißt stetig in $a \in D$, wenn zu jeder ε-Umgebung um $f(a)$ eine δ-Umgebung um a existiert, so dass*

$$f(U_\delta(a) \cap D) \subset U_\varepsilon(f(a)). \quad \rtimes \tag{5}$$

Für $D \subset \mathbb{R}$ und $F = \mathbb{R}$ erhalten wir wieder unsere Definition für reelle Funktionen $_1$.

Globale Stetigkeit ist wie zuvor erklärt:

Definition *Eine Funktion $f: E \supset D \to F$ heißt stetig auf D, oder kurz stetig, wenn sie in jedem Punkt von D stetig ist.* $\rtimes$

▪ Das Folgenkriterium

Der nächste Satz charakterisiert Stetigkeit mithilfe von Folgen. Dies erlaubt uns, Stetigkeitssätze aus entsprechenden Sätzen über Folgen zu erhalten.

3 **Folgenkriterium** *Eine Abbildung $f\colon E \supset D \to F$ ist stetig im Punkt $a \in D$ genau dann, wenn für jede Folge (x_n) in D gilt:*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \quad\Rightarrow\quad \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(a). \quad ⋊$$

Wichtig: Dies muss für *jede* Folge in D mit Grenzwert a gelten, nicht nur für eine, die einem gerade gut passt.

⟨⟨⟨⟨⟨ $\Rightarrow$ Sei f stetig in a und (x_n) eine beliebige gegen a konvergierende Folge in D. Sei $\varepsilon > 0$. Dann existiert dazu ein $\delta > 0$, so dass

$$\|f(x) - f(a)\|_F < \varepsilon, \qquad x \in U_\delta(a) \cap D.$$

Wegen $x_n \to a$ existiert zu diesem $\delta > 0$ ein $N \geqslant 1$, so dass

$$\|x_n - a\|_E < \delta, \qquad n \geqslant N.$$

Da alle x_n in D liegen, gilt auch $x_n \in U_\delta(a) \cap D$ für $n \geqslant N$, und wir erhalten

$$\|f(x_n) - f(a)\|_F < \varepsilon, \qquad n \geqslant N.$$

Da für jedes $\varepsilon > 0$ ein solches $N \geqslant 1$ existiert, gilt $f(x_n) \to f(a)$.

$\Leftarrow$ Wir zeigen die Kontraposition. Angenommen, f ist *nicht* stetig in a. Dann gibt es ein $\varepsilon > 0$ und zu jedem $n \geqslant 1$ einen Punkt $x_n \in U_{1/n}(a) \cap D$ mit

$$\|f(x_n) - f(a)\|_F \geqslant \varepsilon.$$

Wir erhalten eine Folge (x_n) in D mit $x_n \to a$, aber $f(x_n) \nrightarrow f(a)$. ⟩⟩⟩⟩⟩

Die Negation des Folgenkriteriums $_3$ ergibt ein handliches

4 **Unstetigkeitskriterium** *Gibt es wenigstens eine Folge (x_n) in D mit $x_n \to a$, aber $f(x_n) \nrightarrow f(a)$, so ist f im Punkt a unstetig.* ⋊

⊳ *Beispiele* A. Die Gaußklammer ist unstetig in jedem Punkt $m \in \mathbb{Z}$, denn

$$\lim_{n\to\infty} [m - 1/n] = m - 1 \neq [m] = m.$$

B. Die Signumfunktion ist unstetig im Punkt 0, denn

$$\lim \operatorname{sgn}(-1/n) = -1, \qquad \lim_{n\to\infty} \operatorname{sgn}(1/n) = 1,$$

aber $\operatorname{sgn}(0) = 0$. ◅

Nun noch die globale Version des Folgenkriteriums. Der Beweis sei als Übung überlassen $_{\text{A-4}}$.

5 **Satz** *Eine Abbildung $f\colon E \supset D \to F$ ist stetig auf ganz D, wenn sie jede konvergente Folge in D in eine konvergente Folge in F abbildet.* ⋊

Ist also f auf D stetig und konvergiert die Folge (x_n) in D, so gilt

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(\lim_{n\to\infty} x_n).$$

Bei stetigen Funktionen darf man also ›lim‹ und ›f‹ *vertauschen.*

▪ Stetigkeitssätze

Wie bei der Konvergenz von Folgen fragen wir nun, wie sich Stetigkeit mit Körper- und Vektorraumoperationen verträgt. Zuerst betrachten wir reellwertige Funktionen auf einer beliebigen Teilmenge D eines normierten Vektorraums E und die Körperoperationen in $\mathbb{R}$.

6 **Satz** *Sind die Funktionen $f, g\colon E \supset D \to \mathbb{R}$ stetig im Punkt $a \in D$, so sind es auch die Funktionen $f + g$ und fg sowie f/g, falls $g(a) \neq 0$.* ⋊

⟨⟨⟨⟨ Betrachte zum Beispiel f/g. Ist (x_n) eine beliebige Folge in D mit Grenzwert a, so gilt aufgrund der Stetigkeit von f und g $_3$

$$f(x_n) \to f(a), \qquad g(x_n) \to g(a).$$

Wegen $g(a) \neq 0$ gilt dann auch $_{5.7}$ $f(x_n)/g(x_n) \to f(a)/g(a)$. Das ist gleichbedeutend mit

$$(f/g)(x_n) \to (f/g)(a).$$

Da dies für jede solche Folge gilt, ist f/g in a stetig $_3$. Alles Übrige beweist man genauso. ⟩⟩⟩⟩

7 **Korollar** *Sind die Funktionen $f, g\colon D \to \mathbb{R}$ stetig auf D, so sind es auch $f + g$ und fg sowie f/g, falls $g \neq 0$ auf ganz D.* ⋊

Bemerkung Aufgrund dieses Satzes bildet der Raum

$$C(D) \coloneqq \{f : D \to \mathbb{R} : f \text{ ist stetig auf } D\}$$

einen linearen Vektorraum über $\mathbb{R}$. Da auch das Produkt zweier Elemente in ihm erklärt ist und wieder zu $C(D)$ gehört, ist er sogar eine Algebra. In Abschnitt **??** betrachten wir diesen Raum genauer. ⊸

▷ Aus der Stetigkeit der konstanten Funktionen und der Identitätsfunktion folgt 6 die Stetigkeit aller *Polynome*, also Funktionen $p\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ der Gestalt

$$p(t) = a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + .. + a_1 t + a_0$$

mit reellen Koeffizienten $a_0, .., a_n$. Der *Grad* eines solchen Polynoms ist übrigens das größte n, für das $a_n \neq 0$ gilt, also

$$\operatorname{grad} p = \sup\{n : a_n \neq 0\}.$$

Das *Nullpolynom* $p \equiv 0$ hat demnach den Grad $-\infty$. Dies ist sinnvoll, denn damit ist beispielsweise der Grad des Produkts zweier Polynome immer die Summe der Grade der Faktorpolynome. ◁

Für Abbildungen in einen beliebigen normierten Vektorraum F sind lediglich Linearkombinationen erklärt. Der entsprechende Satz lautet hier 5.37:

8 **Satz** *Sind die Abbildungen $f, g\colon E \supset D \to F$ stetig im Punkt $a \in D$, so ist es auch jede Linearkombination $\lambda f + \mu g\colon D \to F$. Entsprechendes gilt für die Stetigkeit auf ganz D.* ⋊

Wir betrachten nun die Komposition zweier stetiger Abbildungen.

9 **Satz** *Ist f stetig im Punkt $a \in D$ und ist g in einer Umgebung von $f(a)$ definiert und im Punkt $f(a)$ stetig, so ist auch $g \circ f$ stetig im Punkt a.* ⋊

⟨⟨⟨⟨⟨ Es sei g in einer Umgebung $U_\sigma(f(a))$ definiert. Ist nun (x_n) eine Folge in D mit Grenzwert a, so gilt $f(x_n) \to f(a)$ aufgrund der Stetigkeit von f 3. Für alle hinreichend großen n liegt dann $f(x_n)$ in $U_\sigma(f(a))$. Daher gilt dann auch $g(f(x_n)) \to g(f(a))$ wegen der Stetigkeit von g im Punkt $f(a)$ 3. Somit gilt auch

$$(g \circ f)(x_n) \to (g \circ f)(a).$$

Da dies für jede Folge (x_n) mit Grenzwert a gilt, ist $g \circ f$ im Punkt a stetig. ⟩⟩⟩⟩⟩

10 **Korollar** *Ist f stetig auf D und g stetig auf einer Obermenge von $f(D)$, so ist auch $g \circ f$ stetig auf D.* ⋊

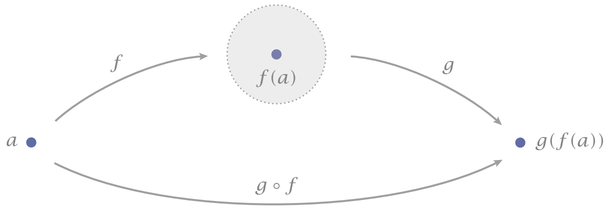
▷ Die Funktion

$$t \mapsto \sqrt{1 + t^2}$$

ist auf $\mathbb{R}$ stetig. Denn das Polynom $1 + t^2$ ist auf $\mathbb{R}$ stetig und nichtnegativ, und die Wurzel ist auf $[0, \infty)$ ebenfalls stetig – wie wir noch in Abschnitt 2 sehen. ◁

Abb 5

Komposition von f und g



Lipschitzstetige Abbildungen

Eine wichtige und sehr handliche Klasse stetiger Abbildungen bilden die *lipschitzstetigen* Abbildungen.

Definition *Eine Abbildung $f: E \supset D \to F$ heißt lipschitzstetig auf D, wenn es eine Konstante $L \geqslant 0$ gibt, genannt Lipschitzkonstante, so dass*

$$\|f(u) - f(v)\|_F \leqslant L\,\|u - v\|_E\,, \qquad u, v \in D.$$

Eine solche Funktion mit Lipschitzkonstante L heißt auch L-lipschitz. ⋊

Bemerkungen *a.* Mit L ist auch jede reelle Zahl $L^* \geqslant L$ eine Lipschitzkonstante.

b. Ist f lipschitz auf D, so ist

$$L_* = \sup_{\substack{u \neq v \\ u, v \in D}} \frac{\|f(u) - f(v)\|_F}{\|u - v\|_E}.$$

die kleinstmögliche Lipschitzkonstante auf D [A-15].

c. Lipschitzstetige Funktionen heißen auch *dehnungsbeschränkt*, was diese Eigenschaft recht anschaulich beschreibt. ⊸

Die Berechtigung der Bezeichnung ergibt sich aus dem nächsten Lemma.

11 **Lemma** *Jede lipschitzstetige Funktion ist stetig.* ⋊

⟪⟪⟪ Sei f L-lipschitz. Zu gegebenem $\varepsilon > 0$ wähle man $\delta = \varepsilon/(L+1) > 0$. Für alle u, v im Definitionsbereich von f mit $\|u - v\|_E < \delta$ gilt dann

$$\|f(u) - f(v)\|_F \leqslant L\,\|u - v\|_E < L\delta = \frac{L}{L+1}\,\varepsilon < \varepsilon.$$

Da δ unabhängig vom betrachteten Punkt ist, folgt daraus die Stetigkeit von f auf dem gesamten Definitionsbereich. ⟫⟫⟫

⊳ A. Auf jedem normierten Raum sind konstante Funktionen 0-lipschitz, und die Identität ist 1-lipschitz.

B. Auf jedem normierten Raum ist die Norm $\|\cdot\|$ 1-lipschitz, denn dies ist gerade die umgekehrte Dreiecksungleichung,

$$\big|\, \|u\| - \|v\| \,\big| \leqslant \|u - v\| .$$

Insbesondere ist die Betragsfunktion $|\cdot|$ 1-lipschitz auf $\mathbb{R}$.

C. Auf $\mathbb{C}$ sind die Abbildungen

$$z \mapsto \operatorname{Re} z, \qquad z \mapsto \operatorname{Im} z, \qquad z \mapsto \bar{z}$$

sämtlich 1-lipschitz. Zum Beispiel ist

$$|\operatorname{Im} z - \operatorname{Im} w| = \left| \frac{z - \bar{z}}{2\mathrm{i}} - \frac{w - \bar{w}}{2\mathrm{i}} \right| \leqslant \frac{|z - w| + |\bar{z} - \bar{w}|}{2} = |z - w| .$$

D. Die Parabel $t \mapsto t^2$ ist auf $\mathbb{R}$ *nicht* lipschitz, denn für $u > v = 0$ ist

$$\frac{|u^2 - v^2|}{|u - v|} = \frac{|u^2|}{|u|} = |u|$$

nicht beschränkt. Sie ist aber lipschitz auf jedem beschränkten Intervall A-13. ◅

7.2 Stetige Funktionen auf Intervallen

Wir betrachten nun einige fundamentale Eigenschaften stetiger reellwertiger Funktionen auf einem *Intervall*. Dazu zählen der Zwischenwertsatz 14, der Satz über Umkehrfunktionen 16, und der Satz vom Minimum & Maximum 18.

▪ Zwischenwerte

12 **Zwischenwertsatz von Bolzano** *Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und $f(a) \neq f(b)$. Dann existiert zu jeder reellen Zahl w zwischen $f(a)$ und $f(b)$ mindestens ein Punkt $c \in (a, b)$ mit $f(c) = w$.* ⋊

Bemerkung Der Zwischenwertsatz gilt offensichtlich *nicht*, wenn f *nicht stetig* oder der Definitionsbereich *kein Intervall* ist – siehe Abbildung 7. ⊸

⟨⟨⟨⟨ Wir können annehmen, dass $f(a) < w < f(b)$. Andernfalls gehen wir zur Funktion $-f$ und dem Zwischenwert $-w$ über und wenden den folgenden Beweis darauf an.

Betrachte die Menge

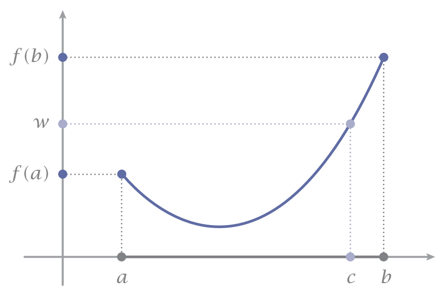
$$A = \{t \in [a, b] : f(t) < w\} \subset [a, b].$$

Diese Menge ist beschränkt und wegen $a \in A$ nicht leer. Somit existiert die reelle Zahl $c = \sup A$, und es gilt $a \leqslant c \leqslant b$. Also gehört c zu $[a, b]$. Wir wollen zeigen, dass $f(c) = w$.

Aufgrund des Approximationsatzes 5.28 existiert eine Folge (t_n) in A mit $\lim_{n\to\infty} t_n = c$. Mit der Stetigkeit von f und $f(t_n) < w$ für alle n folgt 5.9

$$\lim_{n\to\infty} f(t_n) = f(c) \leqslant w.$$

Abb 6 Zwischenwertsatz von Bolzano



Wegen $w < f(b)$ ist $c \neq b$ und somit $c < b$. Wäre nun $f(c) < w$, so wäre f aus Stetigkeitsgründen auch in einer kleinen, ganz in $[a, b]$ enthaltenen Umgebung von c kleiner als w. Es gäbe also ein $d \in (c, b)$ mit $f(d) < w$. Dann aber wäre $d \in A$, im Widerspruch zur Definition von c als dem Supremum von A. Also gilt nicht $f(c) < w$, sondern $f(c) = w$. ⟫⟫⟫

Ein wichtiger Spezialfall des Zwischenwertsatzes liefert die Existenz einer *Nullstelle* einer Funktion, also eines Punktes x mit $f(x) = 0$.

13 **Nullstellensatz** *Ist $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und $f(a)f(b) < 0$, so besitzt f in (a, b) mindestens eine Nullstelle.* ⋊

⟪⟪⟪ Entweder ist $f(a) < 0 < f(b)$ oder $f(a) > 0 > f(b)$. In beiden Fällen können wir den Satz von Bolzano $_{12}$ mit $w = 0$ anwenden. ⟫⟫⟫

14 **Allgemeiner Zwischenwertsatz** *Sei I ein beliebiges Intervall und $f: I \to \mathbb{R}$ stetig. Dann nimmt f jeden Wert zwischen $\inf_I f := \inf\{f(t) : t \in I\}$ und $\sup_I f := \sup\{f(t) : t \in I\}$ mindestens einmal an.* ⋊

⟪⟪⟪ Sei $\inf_I f < w < \sup_I f$. Dann gibt es aufgrund des Approximationssatzes $_{2.12}$ Punkte $a \in I$ und $b \in I$ mit $f(a) < w < f(b)$. Wenden wir den Satz von Bolzano $_{12}$ auf die Einschränkung von f auf das abgeschlossene Intervall mit den Endpunkten a und b an, so erhalten wir die Behauptung. ⟫⟫⟫

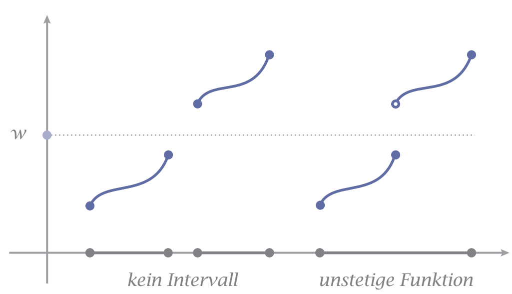
Bemerkung Alle drei Zwischenwertsätze sind tatsächlich *äquivalent:* aus jedem lassen sich die beiden anderen ableiten $_{A\text{-}7}$. ⊸

▷ *Beispiel* Jedes reelle Polynom ungeraden Grades,

$$p(t) = t^{2n+1} + a_{2n}t^{2n} + .. + a_1 t + a_0,$$

besitzt mindestens eine reelle Nullstelle. Denn ein solches Polynom definiert eine stetige Funktion auf $\mathbb{R}$, die für hinreichend große t positiv und hinreichend kleine

Abb 7 Zwischenwertsatz von Bolzano nicht anwendbar



t negativ wird. Die Existenz einer Nullstelle folgt damit aus dem Nullstellensatz $_{13}$. — Dies gilt nicht für Polynome geraden Grades. Das Polynom $1+t^2$ beispielsweise besitzt keine reelle Nullstelle.

Eine Konsequenz des allgemeinen Zwischenwertsatzes betrifft die Gestalt stetiger Bilder von Intervallen.

15 **Intervallabbildungssatz** *Ist I ein Intervall und $f\colon I \to \mathbb{R}$ stetig, so ist*

$$f(I) = \{ f(t) : t \in I \} \subset \mathbb{R}$$

ebenfalls ein Intervall.

Besteht $f(I)$ nur aus einem Punkt, so sind wir fertig. Gehören zwei Punkte $u < v$ zu $f(I)$, so nimmt f also die Werte u und v an. Dann nimmt f aufgrund des Zwischenwertsatzes $_{14}$ auf I auch jeden dazwischen liegenden Werte an. Es gilt also auch $[u,v] \subset f(I)$. Somit enthält $f(I)$ mit je zwei Punkten auch alle dazwischen liegenden Punkte. *Per definitionem* ist $f(I)$ damit ein Intervall.

Umkehrfunktionen

Die Frage, wann eine *stetige* Funktion auf einem *Intervall* bijektiv und damit umkehrbar ist, lässt sich vollständig beantworten. Die entscheidende Eigenschaft hierfür ist die strenge *Monotonie.*

Definition *Eine Funktion $f\colon \mathbb{R} \supset D \to \mathbb{R}$ heißt monoton steigend, falls*

$$u < v \quad \Rightarrow \quad f(u) \leqslant f(v)$$

für alle $u, v \in D$. Sie heißt streng monoton steigend, falls sogar

$$u < v \quad \Rightarrow \quad f(u) < f(v)$$

für alle $u, v \in D$. Analog sind monoton fallende und streng monoton fallende Funktionen definiert. Schließlich heißt eine Funktion (streng) monoton, wenn sie (streng) monoton steigt oder fällt.

A. Jede konstante Funktionen $t \mapsto c$ ist auf $\mathbb{R}$ monoton steigend *und* monoton fallend, aber natürlich nicht streng monoton.

B. Die Identitätsfunktion $t \mapsto t$ ist auf $\mathbb{R}$ streng monoton steigend.

C. Die Parabel $t \mapsto t^2$ ist auf $(-\infty, 0]$ streng monoton fallend und auf $[0, \infty)$ streng monoton steigend.

D. Die Cosinusfunktion ist auf den abgeschlossenen Intervallen

$$I_n^- = [(2n-1)\pi, 2n\pi], \qquad I_n^+ = [2n\pi, (2n+1)\pi], \qquad n \in \mathbb{Z},$$

streng monoton steigend respektive streng monoton fallend. ◂

Eine auf einem Intervall I streng monotone Funktion f ist injektiv und damit auf ihrer Bildmenge $f(I)$ umkehrbar $_{\text{A-21}}$. Ist f außerdem *stetig*, so ist $f(I)$ ebenfalls ein Intervall $_{15}$. Wir zeigen jetzt, dass f^{-1} auf diesem Intervall auch wieder stetig und streng monoton ist. Die Funktion f^{-1} hat also dieselben Eigenschaften wie f.

16 **Satz über stetige Umkehrfunktionen** *Sei I ein Intervall. Ist $f: I \to \mathbb{R}$ streng monoton und stetig, so gilt:*

(i) *$J = f(I)$ ist wieder ein Intervall.*
(ii) *$f: I \to J$ ist bijektiv und besitzt eine Umkehrfunktion $f^{-1}: J \to I$.*
(iii) *f^{-1} ist ebenfalls stetig und im selben Sinn streng monoton.* ⋊

Bemerkung Dieser Satz gilt für *jedes* Intervall, also beispielsweise auch für $I = [0, \infty)$ oder $I = \mathbb{R}$. ⊸

⟨⟨⟨⟨⟨ Sei $f: I \to \mathbb{R}$ zum Beispiel streng monoton steigend. Dann ist f injektiv und auf der Bildmenge $J = f(I)$ umkehrbar. Die Umkehrfunktion $f^{-1}: J \to I$ existiert somit auf jeden Fall. Ferner gilt

$$t_1 \geqslant t_2 \quad \Rightarrow \quad s_1 = f(t_1) \geqslant s_2 = f(t_2).$$

Die Kontraposition hiervon ist

$$s_1 < s_2 \quad \Rightarrow \quad t_1 = f^{-1}(s_1) < t_2 = f^{-1}(s_2).$$

Also ist auch f^{-1} streng monoton steigend.

All dies gilt auch für nichtstetige, streng monoton steigende Funktionen. Ist nun f außerdem stetig, so ist J wieder ein Intervall $_{15}$, und es bleibt die Stetigkeit von f^{-1} auf J zu zeigen.

Sei zunächst t_0 kein Randpunkt von I. Ist $\varepsilon > 0$ hinreichend klein, so gilt $I_0 = U_\varepsilon(t_0) = (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon) \subset I$. Aufgrund der Monotonie von f gilt dann auch

$$J_0 := f(I_0) = (f(t_0 - \varepsilon), f(t_0 + \varepsilon)) \subset J,$$

und es ist $s_0 = f(t_0) \in J_0$. Wählen wir jetzt zum Beispiel

$$\delta := \min\{s_0 - f(t_0 - \varepsilon), f(t_0 + \varepsilon) - s_0\},$$

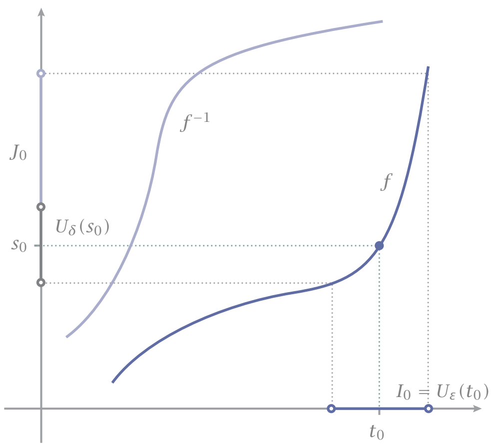
so ist $\delta > 0$ und $U_\delta(s_0) \subset J_0$. Ferner gilt

$$f^{-1}(U_\delta(s_0)) \subset f^{-1}(J_0) = I_0 = U_\varepsilon(t_0) = U_\varepsilon(f^{-1}(s_0)).$$

Da zu jedem $\varepsilon > 0$ ein solches $\delta > 0$ existiert, ist f^{-1} also in s_0 stetig.

Für Randpunkte und streng monoton fallende Funktionen gelten entsprechende Argumente. ⟩⟩⟩⟩⟩

Abb 8 Streng monotone Funktion und Umkehrfunktion



Eine Anwendung dieses Satzes liefert uns – *endlich* – die Existenz der n-ten Wurzel als stetige Funktion auf der Halbgeraden $[0, \infty)$.

17 **Wurzelsatz** *Für jedes $n \geqslant 2$ besitzt die Funktion $t \mapsto t^n$ auf $[0, \infty)$ eine streng monoton steigende, stetige Umkehrfunktion*

$$[0, \infty) \to [0, \infty), \quad t \mapsto \sqrt[n]{t},$$

genannt die n-te Wurzelfunktion. ⋊

⟨⟨⟨⟨ Sei $n \geqslant 2$. Auf $[0, \infty)$ ist die Funktion $f : t \mapsto t^n$ als Polynom stetig und streng monoton steigend, da für alle $u > v \geqslant 0$ 3.13

$$u^n - v^n = (u - v)(u^{n-1} + u^{n-2}v + .. + v^{n-1}) > 0.$$

Da $f(0) = 0$ und f nach oben unbeschränkt ist, gilt auch $f([0, \infty)) = [0, \infty)$. Alle Aussagen folgen daher aus dem vorangehenden Satz. ⟩⟩⟩⟩

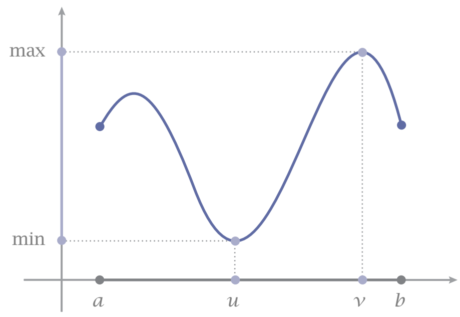
▪ Minimum & Maximum

Für eine beliebige Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ existiert immer das Supremum über ihren Definitionsbereich,

$$\sup_D f \coloneqq \sup f(D) = \sup \{ f(t) : t \in D \},$$

wenn wir auch den Wert ∞ zulassen. Es muss aber keinen Punkt in D geben, an dem f diesen Wert annimmt, auch wenn f beschränkt ist. Siehe Abbildung 10 für einfache Beispiele.

Abb 9 Satz vom Minimum & Maximum



Gibt es dagegen einen Punkt $c \in D$ mit $f(c) = \sup_D f$, so spricht man von einem *Maximum* und sagt, *f nimmt sein Supremum im Punkt c an* [1]. Hierfür schreibt man

$$\sup_D f = \max_D f = f(c).$$

Der Punkt c selbst wird eine *Maximalstelle* von f genannt. Ein Maximum ist in jedem Fall endlich.

Entsprechend sind das *Minimum* $\min_D f$ und eine *Minimalstelle* erklärt.

Der folgende Satz sagt aus, dass eine *stetige* Funktion auf einem *abgeschlossenen* Intervall immer ihr Infimum und Supremum annimmt.

18 **Satz vom Minimum & Maximum** *Ist $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig, so existieren Punkte $u, v \in [a,b]$ mit*

$$f(u) \leqslant f(t) \leqslant f(v), \qquad t \in [a,b].$$

Insbesondere gilt

$$f(u) = \inf_{[a,b]} f = \min_{[a,b]} f, \qquad f(v) = \sup_{[a,b]} f = \max_{[a,b]} f. \qquad ⋊$$

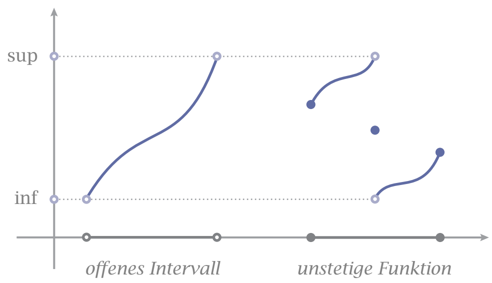
⟪⟪⟪⟪ Sei $m \coloneqq \inf_{[a,b]} f$, wobei auch $-\infty$ zugelassen ist. Aufgrund des erweiterten Approximationssatzes $_{5.28}$ existiert eine Folge (t_n) in $[a,b]$ mit $f(t_n) \to m$. Da diese Folge beschränkt ist, besitzt sie nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß $_{5.17}$ eine konvergente Teilfolge (t_{n_k}) mit Grenzwert u. Da $a \leqslant t_n \leqslant b$ für alle n, ist auch $a \leqslant u \leqslant b$, es gilt also

$$t_{n_k} \to u \in [a,b].$$

[1] Gebräuchlicher ist die nicht ganz korrekte Formulierung, f nehme sein *Maximum* an.

Abb 10

Kein Minimum oder Maximum



Aufgrund der Stetigkeit von f ist $f(u) = \lim_{k\to\infty} f(t_{n_k})$. Da aber $f(t_{n_k})$ Teilfolge der konvergenten Folge $f(t_n)$ ist, erhalten wir insgesamt

$$f(u) = \lim_{k\to\infty} f(t_{n_k}) = \lim_{n\to\infty} f(t_n) = m = \inf_{[a,b]} f.$$

Insbesondere ist m *endlich.* – Entsprechend für das Supremum. ⟫⟫⟫

Als Korollar erhalten wir eine Verschärfung des Intervallabbildungssatzes 15 für abgeschlossene Intervalle.

19 **Korollar** *Eine stetige reelle Funktion auf einem abgeschlossenen Intervall ist beschränkt und bildet dieses wieder auf ein abgeschlossenes Intervall ab.* ⋊

Für die anderen Intervalltypen gilt dieses Korollar nicht. Eine stetige Funktion kann auf einem offenen Intervall unbeschränkt sein, oder das Bild kann ein abgeschlossenes Intervall sein.

7.3 Funktionsgrenzwerte

Ist eine Funktion f in einem Punkt a ihres Definitionsbereichs stetig, so ist

$$f(a) = \lim_{n\to\infty} f(x_n)$$

für jede Folge (x_n) im Definitionsbereich von f, die gegen a konvergiert [3]. Ein solcher Grenzwert kann aber auch existieren, wenn f im Punkt a gar nicht definiert oder dort unstetig ist.

⊳ *Beispiel* Es ist [3.13]

$$\frac{t^3-1}{t-1} = t^2+t+1.$$

Die links stehende Funktion ist im Punkt $t=1$ nicht definiert, die rechts stehende dagegen ist auf ganz $\mathbb{R}$ stetig. Man kann daher erwarten, dass der links stehende Ausdruck für $t\to 1$ den Grenzwert 3 besitzt. ⊲

Wir wollen solche Grenzwerte unabhängig von einem eventuell vorliegenden Funktionswert definieren, und das auch in solchen Punkten, wo die Funktion nur in einer Umgebung, aber nicht im Punkt selbst definiert ist.

Definition *Ein Punkt $a\in E$ heißt Häufungspunkt einer Menge $D\subset E$, wenn in jeder Umgebung von a unendlich viele Punkte von D liegen.* ⋊

⊳ A. Eine endliche Menge besitzt *keine* Häufungspunkte.
B. Die Menge $B=\{1/n : n\geqslant 1\}\subset\mathbb{R}$ besitzt 0 als einzigen Häufungspunkt.
C. Ist die Zahlenfolge $(a_n)_{n\geqslant 1}$ konvergent mit Grenzwert a, so ist a der einzige Häufungspunkt der Menge $\{a_n : n\geqslant 1\}$.
D. Die Menge $\mathbb{Q}\subset\mathbb{R}$ besitzt jede reelle Zahl als Häufungspunkt. ⊲

Definition *Sei a Häufungspunkt des Definitionsbereichs von $f\colon E\supset D\to F$. Dann heißt $w\in F$ Grenzwert von f im Punkt a, geschrieben*

$$\lim_{x\to a} f(x) = w,$$

wenn für jedes $\varepsilon>0$ ein $\delta>0$ existiert, so dass

$$f(\dot U_\delta(a)\cap D)\subset U_\varepsilon(w), \tag{6}$$

wobei

$$\dot U_\delta(a) \coloneqq U_\delta(a)\setminus\{a\} = \{x\in E : 0<\|x-a\|_E<\delta\}$$

die punktierte δ-Umgebung des Punktes $a\in E$ bezeichnet. ⋊

Die Bedingung (6) ähnelt der Stetigkeitsbedingung in (4), nur wird hier die Funktion f an der Stelle a *nicht* ausgewertet. Sie muss daher auch nicht in a definiert sein. Andererseits ist $\dot{U}_\delta(a) \cap D$ für alle $\delta > 0$ nicht leer, da a Häufungspunkt von D sein soll.

20 **Folgenkriterium für Funktionsgrenzwerte** *Sei $f : E \supset D \to F$ und a ein Häufungspunkt von D. Dann gilt $\lim_{x\to a} f(x) = w$ genau dann, wenn*

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = w$$

für jede gegen a konvergierende Folge (x_n) in $D \setminus \{a\}$. ⋊

⟪⟪ Der Beweis ist praktisch identisch mit dem Beweis des Folgenkriteriums für Stetigkeit in einem Punkt $_3$. ⟫⟫

Aus diesem Kriterium ergibt sich die folgende Charakterisierung der Stetigkeit, die oft auch als deren Definition dient.

21 **Korollar** *Eine Funktion $f : E \supset D \to F$ ist stetig in einem nicht-isolierten Punkt $a \in D$ genau dann, wenn $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.* ⋊

Mit dem Folgenkriterium $_{20}$ erhalten wir Grenzwertsätze für Funktionen aus den Grenzwertsätzen für Folgen $_{5.7}$. Der Beweis der folgenden Ergebnisse ist als Übung überlassen. Dabei gilt (i) auch für Abbildungen in einen beliebigen Banachraum F.

22 **Grenzwertsätze** *Sei a ein Häufungspunkt von D. Besitzen die Funktionen $f, g : D \to \mathbb{R}$ im Punkt a die Grenzwerte*

$$\lim_{x\to a} f(x) = u, \qquad \lim_{x\to a} g(x) = v,$$

so gilt auch

(i) $\lim_{x\to a}(\lambda f + \mu g)(x) = \lambda u + \mu v$ *für* $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$,

(ii) $\lim_{x\to a}(fg)(x) = uv$,

(iii) $\lim_{x\to a}(f/g)(x) = u/v$, *falls* $v \neq 0$.

(iv) *Gilt außerdem $f \leqslant g$ in einer punktierten Umgebung von a, so ist $u \leqslant v$.* ⋊

23 ⊳ A. Führt man die Polynomdivision aus, so ist

$$\lim_{t\to 1} \frac{t^3 - 1}{t - 1} = \lim_{t\to 1}(t^2 + t + 1) = 3.$$

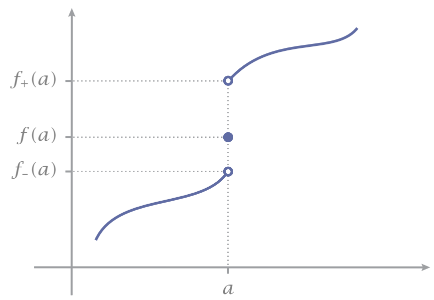
B. Da $|t \sin t^{-1}| \leqslant |t|$ für $t \neq 0$, gilt $\lim_{t\to 0} t \sin t^{-1} = 0$.

C. Die Funktion $t \mapsto \sin t^{-1}$ hat in 0 keinen Grenzwert.

D. Die Dirichletfunktion $_2$ δ besitzt in keinem einzigen Punkt der reellen Gerade einen Grenzwert. ⊲

Abb 11

Einseitige Grenzwerte einer monotonen Funktion



Einseitige Grenzwerte

Auf der reellen Geraden kann man noch unterscheiden, ob man sich einem Punkt von links oder von rechts nähert. Für eine auf einer Teilmenge $D \subset \mathbb{R}$ definierten Funktion f erklärt man deshalb noch den *linksseitigen Grenzwert*

$$f_-(a) \coloneqq \lim_{x \nearrow a} f(x) \coloneqq \lim_{x \to a} (f \mid D_a^-)(x), \qquad D_a^- \coloneqq D \cap (-\infty, a),$$

und den *rechtsseitigen Grenzwert*

$$f_+(a) \coloneqq \lim_{x \searrow a} f(x) \coloneqq \lim_{x \to a} (f \mid D_a^+)(x), \qquad D_a^+ \coloneqq D \cap (a, \infty).$$

Man betrachtet für die Grenzwertbildung im Punkt a also nur Argumente links oder rechts des Punktes a. Andere für diese Grenzwerte übliche Bezeichnungen sind übrigens $f(a-)$ und $f(a+)$.

A. Für die Wurzelfunktion gilt

$$\lim_{x \to 0} \sqrt{x} = \lim_{x \searrow 0} \sqrt{x} = 0.$$

B. Für die Gaußklammer $[\cdot] : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gilt in jedem Punkt $m \in \mathbb{Z}$

$$\lim_{x \nearrow m} [x] = m - 1 \quad < \quad [m] \quad = \quad m \quad = \quad \lim_{x \searrow m} [x].$$

Man sagt dazu auch, $[\cdot]$ ist in m *rechtsseitig stetig*.

C. Die Funktion $t \mapsto \sin t^{-1}$ besitzt in 0 weder einen links- noch einen rechtsseitigen Grenzwert.

Bemerkung Der *Grenzwert* von f in a existiert genau dann, wenn beide einseitigen Grenzwerte existieren und übereinstimmen:

$$\lim_{x \to a} f(x) = w \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x \nearrow a} f(x) = w = \lim_{x \searrow a} f(x). \quad ⊸$$

Einseitige Grenzwerte existieren insbesondere immer für *monotone* Funktionen, ohne jede Stetigkeitsannahme. Das macht diese besonders nützlich.

24 **Satz** *Ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monoton, so existieren in jedem Punkt $a \in \mathbb{R}$ die links- und rechtsseitigen Grenzwerte von f. Genauer gilt im Falle einer monoton steigenden Funktion*

$$\sup_{(-\infty,a)} f = f_-(a) \leqslant f(a) \leqslant f_+(a) = \inf_{(a,\infty)} f,$$

sowie

$$\inf_{(-\infty,a)} f = f_-(a) \geqslant f(a) \geqslant f_+(a) = \sup_{(a,\infty)} f$$

im Falle einer monoton fallenden Funktion. ⋊

⟪⟪⟪ Sei zum Beispiel f monoton steigend. Dann ist f auf $(-\infty, a)$ nach oben durch $f(a)$ beschränkt. Somit existiert

$$f_m(a) \coloneqq \sup_{(-\infty,a)} f \leqslant f(a).$$

Dazu existiert eine Folge (t_n) mit $t_n \nearrow a$ und $f(t_n) \nearrow f_m(a)$. Aus Monotoniegründen konvergieren dann auch die Funktionswerte entlang jeder anderen, linksseitig gegen a konvergierenden Folge gegen denselben Grenzwert. Also existiert der linksseitige Grenzwert, und es gilt

$$f_-(a) = f_m(a) \leqslant f(a).$$

Entsprechend argumentiert man für den rechtsseitigen Grenzwert. ⟫⟫⟫

Bemerkung Eine monotone Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist stetig in a genau dann, wenn $f_-(a) = f_+(a)$. Andernfalls bezeichnet man

$$\sigma_f(a) = |f_+(a) - f_-(a)|$$

als die *Sprunghöhe* von f in a. ⊸

▪ Uneigentliche Grenzwerte

Für Funktionen auf der reellen Geraden sind auch *uneigentliche Grenzwerte* für $t \to \infty$ oder $t \to -\infty$ definiert. Wir müssen dazu nur Umgebungen von ∞ und $-\infty$ wie zuvor $_{5.6}$ erklären, also

$$U_\delta(\infty) = \dot{U}_\delta(\infty) = (\delta^{-1}, \infty), \qquad \delta > 0$$

und

$$U_\delta(-\infty) = \dot{U}_\delta(-\infty) = (-\infty, -\delta^{-1}), \qquad \delta > 0.$$

So ist zum Beispiel ∞ ein Häufungspunkt von $D \subset \mathbb{R}$, wenn $U_\delta(\infty)$ für jedes $\delta > 0$ unendlich viele Punkte von D enthält. Es gilt dann

$$\lim_{t\to\infty} f(t) = w,$$

wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass

$$f(U_\delta(\infty) \cap D) \subset U_\varepsilon(w).$$

Mit anderen Worten,

$$|f(t) - w| < \varepsilon, \qquad t \in U_\delta(\infty) \cap D.$$

Und dies gilt genau dann, wenn für jede Folge (t_n) in D mit $t_n \to \infty$ auch

$$\lim_{n\to\infty} f(t_n) = w.$$

Entsprechend sind uneigentliche Grenzwerte für Funktionswerte erklärt, indem in ?? und (6) die Umgebungen von w entsprechend interpretiert werden.

A. $\lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{1}{t} = \lim\limits_{t\to-\infty} \dfrac{1}{t} = 0, \qquad \lim\limits_{t\searrow 0} \dfrac{1}{t} = \infty, \qquad \lim\limits_{t\nearrow 0} \dfrac{1}{t} = -\infty.$

B. Für jedes Polynom p mit $p(t) = t^n + a_{n-1}t^{n-1} + .. + a_0$ gilt

$$\lim_{t\to\infty} p(t) = \infty, \qquad \lim_{t\to-\infty} p(t) = \begin{cases} \infty, & n \text{ gerade}, \\ -\infty, & n \text{ ungerade}. \end{cases}$$

C. Für eine konvergente reelle *Folge* $\underset{\sim}{a} = (a_n)$ ist

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{t\to\infty} \underset{\sim}{a}(t),$$

wenn wir $\underset{\sim}{a}$ als eine Funktion $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$ betrachten.