

8

Differenziation

8.1

Definitionen und Rechenregeln

Im Folgenden sei I immer ein *nichtentartetes Intervall*, also ein Intervall mit mehr als einem Punkt. Ferner sei $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ eine reellwertige Funktion auf I . Die folgende Definition der Differenzierbarkeit in einem Punkt ist wahrscheinlich aus der Schule vertraut.

Definition Eine Funktion $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ heißt *differenzierbar im Punkt* $a \in I$, wenn der Grenzwert

$$\lim_{t \rightarrow a} \frac{f(t) - f(a)}{t - a} = m$$

existiert. In diesem Fall heißt m die *erste Ableitung* von f im Punkt a und wird mit $f'(a)$ bezeichnet. ✕

Dieser Definition liegt folgende geometrische Anschauung zugrunde. Der Differenzenquotient

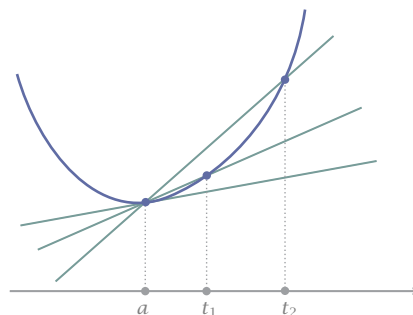
$$\frac{f(t) - f(a)}{t - a}$$

beschreibt die Steigung der Sekante durch die Punkte des Graphen von f über a und t . Konvergieren diese Steigungen für $t \rightarrow a$ gegen einen Grenzwert m , so kann man diesen als *infinitesimale Steigung* von f im Punkt a auffassen. Die Grenzlage der Sekanten bildet dann eine *Tangente* an den Graphen von f .

Unbefriedigend an dieser Definition ist allerdings, dass sie sich in dieser Form nicht auf höhere Dimensionen verallgemeinern lässt, da eine Division durch Vektoren nicht sinnvoll erklärt werden kann. Um dieses Problem zu umgehen, charakterisieren wir Differenzierbarkeit noch auf eine andere, äquivalente Weise.

Abb 1

Sekanten an einen
Graphen



1 Differenzierbarkeitssatz Für eine Funktion $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ und einen Punkt $a \in I$ sind folgende Aussagen äquivalent:

- (i) f ist differenzierbar in a mit $f'(a) = m$.
- (ii) Es gibt eine reelle Zahl m , so dass

$$\lim_{t \rightarrow a} \frac{|f(t) - f(a) - m(t - a)|}{|t - a|} = 0. \quad (1)$$

- (iii) Es gibt eine reelle Zahl m und eine im Punkt a stetige Funktion $\varepsilon: I \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\varepsilon(a) = 0$, so dass

$$f(t) = f(a) + m(t - a) + \varepsilon(t)(t - a). \quad (2)$$

- (iv) Es gibt eine im Punkt a stetige Funktion $\varphi: I \rightarrow \mathbb{R}$, so dass

$$f(t) = f(a) + \varphi(t)(t - a), \quad t \in I.$$

In diesem Fall ist $\varphi(a) = f'(a)$. ✕

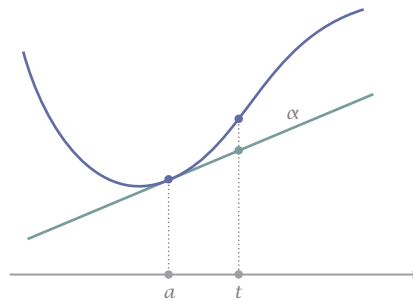
⟨⟨⟨ Gleichung (2) ist für $t \neq a$ äquivalent mit

$$\varepsilon(t) = \frac{f(t) - f(a)}{t - a} - m = \frac{f(t) - f(a) - m(t - a)}{t - a}.$$

Hieraus folgt alles Weitere. So ist (i) $\Leftrightarrow$ (iii), weil für $t \rightarrow a$ der Differenzenquotient genau dann gegen m konvergiert, wenn ε gegen 0 konvergiert. Dasselbe gilt für (iii) $\Leftrightarrow$ (ii), denn der Betrag macht keinen Unterschied. Und (iii) $\Leftrightarrow$ (iv) ergibt sich mit $\varphi(t) = m + \varepsilon(t)(t - a)$. ⟩⟩⟩

Wir haben nicht verlangt, dass eine im Punkt a differenzierbare Funktion dort auch stetig ist. Da in Gleichung (2) aber ε im Punkt a stetig ist, ist es auch die gesamte rechte Seite dieser Gleichung. Ist also f im Punkt a differenzierbar, so ist f dort auch stetig.

Abb 2

Tangente an einen
Graphen

Gleichungen (1) und (2) erlauben folgende geometrische Interpretation. Die affine Funktion

$$\lambda: t \mapsto \lambda(t) = f(a) + m(t - a)$$

beschreibt eine Gerade durch den Punkt des Graphen von f über a mit der Steigung m . Gleichung (1) ist somit gleichbedeutend mit

$$\lim_{t \rightarrow a} \frac{|f(t) - \lambda(t)|}{|t - a|} = 0.$$

Der *Approximationsfehler* $f - \lambda$ zwischen Funktion und Geraden verschwindet also schneller als $t - a$ wenn t gegen a strebt. Diese Eigenschaft bestimmt m sogar *eindeutig*. Somit definiert λ die *bestapproximierende Gerade* an den Graphen von f in diesem Punkt. Geometrisch handelt es sich um die *Tangente*.

2 ➤ *Beispiele* A. Jede konstante Funktion hat Ableitung 0.

B. Jede affine Funktion $\lambda: t \mapsto mt + b$ ist in jedem Punkt differenzierbar, denn für alle t und a gilt

$$\frac{\lambda(t) - \lambda(a)}{t - a} = m.$$

Die Tangentengleichung ist

$$\lambda(a) + m(t - a) = ma + b + m(t - a) = \lambda(t).$$

Jede Gerade ist daher in jedem Punkt ihre eigene Tangente.

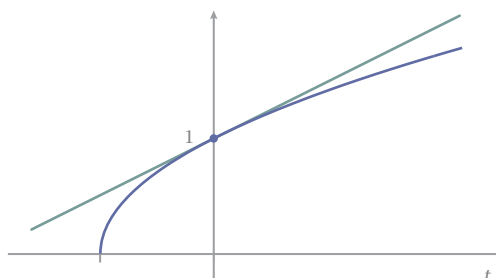
C. Die Betragsfunktion $|\cdot|$ ist im Punkt 0 *nicht* differenzierbar, da es dort keine eindeutige bestapproximierende Tangente gibt.

D. Die Wurzelfunktion $t \mapsto \sqrt{t}$ ist in jedem Punkt $a > 0$ differenzierbar, denn für $h \rightarrow 0$ gilt

$$\frac{\sqrt{a+h} - \sqrt{a}}{h} = \frac{1}{h} \frac{h}{\sqrt{a+h} + \sqrt{a}} = \frac{1}{\sqrt{a+h} + \sqrt{a}} \rightarrow \frac{1}{2\sqrt{a}}.$$

Abb 3

Wurzelfunktion mit
Tangente



Es ist also

$$(\sqrt{t})' \Big|_{t=a} = \frac{1}{2\sqrt{a}}, \quad a > 0.$$

Im Punkt $a = 1$ beispielsweise ist die Tangentengleichung $t \mapsto 1 + t/2$.

Für $a = 0$ und $h \searrow 0$ dagegen divergiert der Differenzenquotient, und die Wurzelfunktion ist in 0 *nicht* differenzierbar. ◀

■ Rechenregeln

- 3 **Satz** Sind $f, g: I \rightarrow \mathbb{R}$ im Punkt $a \in I$ differenzierbar, so sind es auch $f + g$, fg , und falls $g(a) \neq 0$, auch f/g , und es gelten die **Summen-, Produkt- und Quotientenregeln**

$$(f + g)'(a) = (f' + g')(a)$$

$$(fg)'(a) = (f'g + fg')(a)$$

$$(f/g)'(a) = ((f'g - fg')/g^2)(a). \quad \times$$

◀◀◀ Im Folgenden verwenden wir immer Kriterium (iv) von Satz 1. — Es ist

$$f(t) = f(a) + \varphi(t)(t - a), \quad g(t) = g(a) + \psi(t)(t - a),$$

mit in a stetigen Funktionen φ und ψ , wobei $\varphi(a) = f'(a)$ und $\psi(a) = g'(a)$. Für das Produkt beispielsweise folgt daraus

$$\begin{aligned} (fg)(t) &= (fg)(a) + [f(a)\psi(t) + \varphi(t)g(a)](t - a) + \varphi(t)\psi(t)(t - a)^2 \\ &= (fg)(a) + [f(a)\psi(t) + \varphi(t)g(a) + \varphi(t)\psi(t)(t - a)](t - a). \end{aligned}$$

Der Ausdruck in eckigen Klammern ist stetig im Punkt a und hat dort den Wert

$$f(a)\psi(a) + \varphi(a)g(a) = f(a)g'(a) + f'(a)g(a).$$

Also ist fg in a differenzierbar mit der behaupteten Ableitung. Die übrigen Aussagen werden analog bewiesen. ▶▶▶

Als erste Anwendung bestimmen wir die Ableitung der natürlichen Potenzen reeller Zahlen.

4 **Satz** Für alle $n \in \mathbb{Z}$ gilt

$$(t^n)' = nt^{n-1}$$

wobei $t \neq 0$ für $n \leq 0$. $\times$

⟨⟨⟨⟨ Für $n = 0$ ist dies die Ableitung der konstanten Funktion, $(1)' = 0$. Für $n = 1$ ist es die Ableitung der Identität, $(t)' = 1$. Mit Induktion über n und der Produktregel folgt für $n \geq 1$

$$(t^{n+1})' = (t^n t)' = (t^n)' t + t^n (t)' = nt^{n-1} t + t^n = (n+1)t^n.$$

Für $n < 0$ erhält man hieraus mit der Quotientenregel

$$(t^n)' = \left(\frac{1}{t^{-n}} \right)' = \frac{-(t^{-n})'}{t^{-2n}} = \frac{nt^{-n-1}}{t^{-2n}} = \frac{n}{t^{-n+1}} = nt^{n-1}. \quad \rangle\rangle\rangle\rangle$$

► Ein reelles Polynom ist überall differenzierbar, und es gilt

$$\left(\sum_{k=0}^n a_k t^k \right)' = \sum_{k=0}^n k a_k t^{k-1} = \sum_{k=1}^n k a_k t^{k-1}. \quad \blacktriangleleft$$

■ Kettenregel und Umkehrregel

Wie bei der Stetigkeit untersuchen wir nun die Frage, unter welchen Bedingungen die Differenzierbarkeit bei Verkettung und Umkehrung von Funktionen erhalten bleibt. — Zuerst die Verkettung zweier Funktionen.

5 **Kettenregel** Es seien $f: I \rightarrow J$ im Punkt $a \in I$ und $g: J \rightarrow \mathbb{R}$ im Punkt $f(a) \in J$ differenzierbar. Dann ist auch $g \circ f$ im Punkt a differenzierbar, und es gilt

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a))f'(a). \quad \times$$

⟨⟨⟨⟨ Nach Voraussetzung ist

$$f(t) = f(a) + \varphi(t)(t - a), \quad g(s) = g(b) + \psi(s)(s - b),$$

mit in a respektive $b = f(a)$ stetigen Funktionen φ und ψ , wobei $\varphi(a) = f'(a)$ und $\psi(b) = g'(b)$. Setzen wir $s = f(t)$ und $b = f(a)$, so erhalten wir

$$f(t) - f(a) = s - b = \varphi(t)(t - a)$$

und weiter

$$(g \circ f)(t) = (g \circ f)(a) + [\psi(f(t))\varphi(t)](t - a).$$

Der Ausdruck in eckigen Klammern ist stetig im Punkt a mit Wert

$$\psi(f(a))\varphi(a) = g'(f(a))f'(a).$$

Also ist $g \circ f$ in a differenzierbar mit der behaupteten Ableitung. $\ggg$

Man beachte, dass nur die Differenzierbarkeit von f und g in den Punkten a respektive $b = f(a)$ gefordert wird. Differenzierbarkeit in anderen Punkten wird nicht benötigt. Dasselbe gilt für die Umkehrregel ₆.

► Die Funktion

$$f: t \mapsto \sqrt{1+t^2}$$

kann als Komposition der Wurzel $g: s \mapsto \sqrt{s}$ mit dem Polynom $h: t \mapsto 1+t^2$ aufgefasst werden. Sie ist auf ganz $\mathbb{R}$ definiert und differenzierbar mit der Ableitung

$$f'(t) = g'(s) \Big|_{s=h(t)} h'(t) = \frac{1}{2\sqrt{s}} \Big|_{s=h(t)} 2t = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}. \quad \blacktriangleleft$$

6 Umkehrregel Sei $f: I \rightarrow J$ stetig und bijektiv. Ist f im Punkt $a \in I$ differenzierbar und $f'(a) \neq 0$, so ist die Umkehrfunktion $f^{-1}: J \rightarrow I$ im Punkt $b = f(a)$ differenzierbar, und es gilt

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))}. \quad \times \tag{3}$$

⟨⟨⟨ Nach Voraussetzung ist wieder $f(t) = f(a) + \varphi(t)(t-a)$ mit einer im Punkt a stetigen Funktion φ , wobei $\varphi(a) = f'(a) \neq 0$. Es existiert dann ein $\delta > 0$, so dass $\varphi(t) \neq 0$ für alle $t \in U_\delta(a) \cap I$. Für diese t können wir die erste Gleichung umformen zu

$$t = a + \frac{f(t) - f(a)}{\varphi(t)}.$$

Mit $s = f(t)$ und $b = f(a)$ und damit $t = g(s)$ und $a = g(b)$ ist dies gleichbedeutend mit

$$g(s) = g(b) + \frac{1}{\varphi(g(s))} (s - b).$$

Da der Nenner im Punkt b stetig ist und nicht verschwindet, ist g im Punkt b differenzierbar, und die Ableitung ist wie behauptet.

$$g'(b) = \frac{1}{\varphi(g(b))} = \frac{1}{f'(g(b))}. \quad \ggg$$

Man kann Gleichung (3) leicht *rekonstruieren*. Da $f(f^{-1}(t)) = t$ für alle t im Definitionsbereich von f^{-1} , folgt mit der Kettenregel $\S$ an der Stelle b

$$f'(f^{-1}(b))(f^{-1})'(b) = 1,$$

also

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))}.$$

Dies ist allerdings *kein Ersatz* für den vorangehenden Beweis. Wir müssen ja zuerst *wissen*, dass f^{-1} im Punkt b differenzierbar ist, bevor wir die Kettenregel anwenden dürfen.

► Die Parabel $f: t \mapsto t^2$ ist für $t \geq 0$ strikt wachsend, bijektiv und differenzierbar mit Ableitung

$$f'(t) = 2t.$$

Diese ist nicht Null für $t > 0$. Die Umkehrfunktion $g = f^{-1}$ ist deshalb in jedem Punkt $s = t^2 > 0$ differenzierbar mit Ableitung

$$g'(s) = \frac{1}{f'(g(s))} = \frac{1}{2g(s)}.$$

Für die Wurzelfunktion g erhalten wir also wieder das Ergebnis von Beispiel 2,

$$(\sqrt{s})' = \frac{1}{2\sqrt{s}}.$$

Andererseits ist $f'(0) = 0$, und in $0 = f(0)$ ist die Wurzelfunktion auch tatsächlich nicht differenzierbar. Die Annahme, dass f' im betrachteten Punkt nicht verschwinden darf, ist also notwendig. ◀

■ Differenzierbare Funktionen

Definition Eine Funktion $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ heißt *differenzierbar auf I* , oder einfach *differenzierbar*, wenn sie in jedem Punkt von I differenzierbar ist. In diesem Fall heißt die Funktion

$$f': I \rightarrow \mathbb{R}, \quad t \mapsto f'(t)$$

die *Ableitung* von f . Ist f' außerdem stetig, so heißt f *stetig differenzierbar auf I* . Der Raum aller auf I stetig differenzierbaren reellen Funktionen wird mit $C^1(I)$ bezeichnet. ✕

Offensichtlich gilt

$$C^1(I) \subsetneq C^0(I) = C(I).$$

Es gibt sogar stetige Funktionen auf $\mathbb{R}$ gibt, die in *keinem einzigen Punkt* differenzierbar sind.

7 Satz Sind f und g in $C^1(I)$, so sind auch $f + g$ und fg in $C^1(I)$, und es gilt

$$(f + g)' = f' + g', \quad (fg)' = f'g + fg'.$$

Verschwundet g nirgends auf I , so ist auch f/g in $C^1(I)$, und es gilt

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}. \quad \times$$

Aufgrund dieses Satzes ist $C^1(I)$ nicht nur ein Vektorraum, sondern eine kommutative *Algebra* – das heißt, es ist neben der Addition eine Multiplikation erklärt, für die die Assoziativ-, Kommutativ- und Distributivgesetze gelten. — Nun noch die globale Kettenregel.

8 Kettenregel Sind f und g beide C^1 und ist $g \circ f$ auf dem Definitionsbereich von f erklärt, so ist auch $g \circ f$ eine C^1 -Funktion, und es gilt

$$(g \circ f)' = (g' \circ f) f'. \quad \times$$

8.2

Lokale Extrema und Mittelwertsatz

Es liegt nahe, dass die Ableitung einer Funktion Aufschluss gibt über ihr lokales Verhalten. Man sollte zum Beispiel an ihr erkennen, ob sie monoton ist oder eine Extremstelle ausbildet. Dies wollen wir jetzt untersuchen.

Definition Eine Funktion $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ besitzt im Punkt $c \in I$ ein **lokales Minimum**, wenn es eine Umgebung $U_\delta(c)$ gibt, so dass

$$f(c) \leq f(t), \quad t \in U_\delta(c) \cap I.$$

Sie besitzt in c ein **striktes lokales Minimum**, wenn außerdem für $t \neq c$ die strikte Ungleichung gilt. Entsprechend ist ein **(striktes) lokales Maximum** definiert. $\times$

Lokale Minima und Maxima werden gemeinsam als **Extrema** bezeichnet. Punkte, an denen ein lokales Extremum vorliegt, werden **Extremstellen** genannt, oder genauer **Minimal-** und **Maximalstellen**.

Der folgende Satz ist von fundamentaler Bedeutung für das Auffinden von Extremalstellen. Hierbei heißt $c \in I$ **innerer Punkt** des Intervalls I , wenn er kein Randpunkt ist. In einem offenen Intervall ist jeder Punkt ein innerer Punkt.

9 **Satz von Fermat** Besitzt $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ in einem inneren Punkt c von I ein lokales Extremum und ist f in diesem Punkt differenzierbar, so gilt $f'(c) = 0$. $\times$

⟨⟨⟨⟨ Sei zum Beispiel c eine Minimalstelle von f im Innern von I . Dann existiert ein $\delta > 0$, so dass $U_\delta(c) \subset I$ und

$$f(c+h) - f(c) \geq 0, \quad |h| < \delta.$$

Also gilt

$$\frac{f(c+h) - f(c)}{h} \geq 0, \quad 0 < h < \delta,$$

und

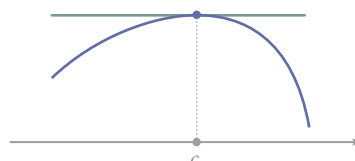
$$\frac{f(c+h) - f(c)}{h} \leq 0, \quad 0 > h > -\delta.$$

Abb 4 Verschiedene Minimalstellen



Abb 5

Satz von Fermat für
eine Maximalstelle



Da wegen der Differenzierbarkeit von f im Punkt c der Grenzwert für $h \rightarrow 0$ existiert, folgt aus diesen Ungleichungen sowohl $f'(c) \geq 0$ als auch $f'(c) \leq 0$. Also ist $f'(c) = 0$. $\gggg$

Beide Voraussetzungen des Satzes – Lage der Extremstelle c im Innern und Differenzierbarkeit im Punkt c – sind *notwendig*. In einer Extremstelle am Rand muss die Ableitung nicht verschwinden, und an einer Extremstelle im Innern muss eine Funktion nicht differenzierbar sein.

Das Kriterium von Fermat ist allerdings nur *notwendig*, aber *nicht hinreichend*. Ein kritischer Punkt ist nicht notwendigerweise eine Extremstelle – siehe Abbildung 6.

Punkte, in denen die Ableitung einer Funktion verschwindet, haben eine besondere Bedeutung und deshalb auch einen besonderen Namen.

Definition Ist $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ im Punkt c differenzierbar und $f'(c) = 0$, so heißt c ein *stationärer* oder *kritischer Punkt* von f . $\times$

Der Satz von Fermat besagt also, dass eine Extremstelle im Innern notwendig ein kritischer Punkt ist, wenn die Funktion dort differenzierbar ist. Geometrisch bedeutet dies, dass der Graph von f an einer solchen Extremstelle eine *horizontale Tangente* aufweist.

■ Mittelwertsätze

Eine erste Anwendung des Satzes von Fermat sind Mittelwertsätze. Zuerst betrachten wir einen Spezialfall.

Abb 6 Satz von Fermat nicht anwendbar

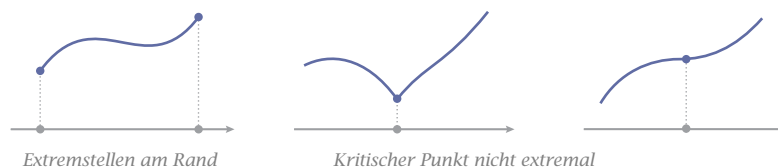
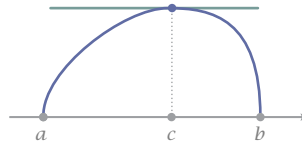


Abb 7

Satz von Rolle



- 10 **Satz von Rolle** Sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und auf (a, b) differenzierbar. Gilt $f(a) = f(b)$, so existiert ein Punkt $c \in (a, b)$ mit $f'(c) = 0$. Somit besitzt f einen kritischen Punkt in (a, b) . ✕

⟨⟨⟨ Ist f konstant, so verschwindet f' überall, und jeder Punkt in $[a, b]$ ist ein kritischer Punkt. Sei also f nicht konstant. Die stetige Funktion f nimmt auf $[a, b]$ ihr Minimum und Maximum an, und beide können nicht gleichzeitig am Rand liegen, da f sonst konstant wäre. Also besitzt f wenigstens eine Extremalstelle c im Innern von $[a, b]$. Da f dort auch differenzierbar ist, ist nach dem Satz von Fermat $f'(c) = 0$. ⟩⟩⟩

Der Satz von Rolle gilt natürlich erst recht, wenn f auf ganz $[a, b]$ differenzierbar ist. Es ist aber sinnvoll, hier und im Folgenden nur die Differenzierbarkeit auf (a, b) zu verlangen, um auch Funktionen zu erfassen, die in den Endpunkten des Intervalls stetig, aber *nicht* differenzierbar sind, wie zum Beispiel in Abbildung 7. Und überhaupt vermeidet ein Mathematiker gerne Bedingungen, die er nicht benötigt.

Übrigens war Rolle ein französischer Mathematiker, sein Name wird daher ohne »e« gesprochen. — Nun der allgemeine Fall.

- 11 **Mittelwertsatz** Ist $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und auf (a, b) differenzierbar, so existiert ein Punkt $c \in (a, b)$ mit

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}. \quad \times$$

⟨⟨⟨ Betrachte die Hilfsfunktion φ mit

$$\varphi(t) = f(t) - m(t - a), \quad m = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

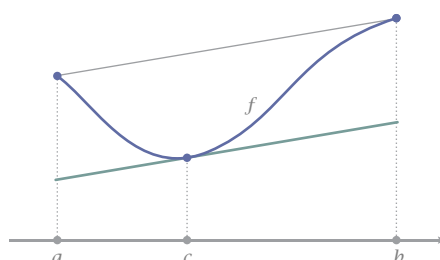
Mit anderen Worten, wir subtrahieren von der Funktion f die Sekante durch die Eckpunkte ihres Graphen. Für diese Funktion gilt $\varphi(a) = \varphi(b)$. Auch ist φ auf $[a, b]$ stetig und auf (a, b) differenzierbar. Nach dem Satz von Rolle₁₀ existiert also ein $c \in (a, b)$ mit

$$\varphi'(c) = f'(c) - m = 0.$$

Dies ist äquivalent zur Behauptung. ⟩⟩⟩

Abb 8

Zum Mittelwertsatz



Der Quotient im Mittelwertsatz stellt die *mittlere Steigung* der Funktion f im Intervall $[a, b]$ dar. Der Mittelwertsatz sagt also aus, dass an wenigstens einer Stelle im Innern des Intervalls die Tangentensteigung gleich der mittleren Steigung ist. Der Satz von Rolle ist hiervon ein Spezialfall, denn für $f(b) = f(a)$ ist die mittlere Steigung 0. Andererseits haben wir den Mittelwertsatz gerade mit dem Satz von Rolle bewiesen. Beide Sätze sind somit *äquivalent*.

- 12 **Verallgemeinerter Mittelwertsatz** Sind $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und auf (a, b) differenzierbar und verschwindet g' auf (a, b) nicht, so gibt es ein $c \in (a, b)$ mit

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}. \quad \times$$

Es ist $g(a) \neq g(b)$, da andernfalls g in (a, b) einen kritischen Punkt hätte. Also ist

$$\varphi(t) = f(t) - m(g(t) - g(a)), \quad m = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)},$$

auf $[a, b]$ wohldefiniert, stetig und auf (a, b) differenzierbar. Außerdem ist wieder $\varphi(a) = f(a) = \varphi(b)$. Anwendung des Satzes von Rolle ergibt dann die Behauptung. >>>>

■ Folgerungen

- 13 **Schränkensatz** Sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und auf (a, b) differenzierbar, so gilt für alle $u < v$ in $[a, b]$ die Ungleichung

$$|f(v) - f(u)| \leq (v - u) \sup_{u < t < v} |f'(t)|.$$

Ist f' auf (a, b) beschränkt, so ist f L -lipschitz mit $L = \sup_{a < t < b} |f'(t)|$. $\times$

Wir können den Mittelwertsatz ₁₁ auf zwei beliebige Punkte $u < v$ in $[a, b]$ anwenden und erhalten ein $c \in (u, v)$ mit

$$f(v) - f(u) = f'(c)(v - u).$$

Also gilt erst Recht

$$|f(v) - f(u)| \leq (v - u) |f'(c)| \leq (v - u) \sup_{u < t < v} |f'(t)|.$$

Die zweite Behauptung folgt daraus sofort. $\ggg$

14 Monotoniesatz Sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und auf (a, b) differenzierbar.

- (i) f ist konstant auf $[a, b]$ genau dann, wenn $f' \equiv 0$ auf (a, b) .
- (ii) f ist monoton steigend auf $[a, b]$ genau dann, wenn $f' \geq 0$ auf (a, b) .
- (iii) f ist streng monoton steigend auf $[a, b]$, wenn $f' > 0$ auf (a, b) .

Entsprechendes gilt für »monoton fallend«. $\times$

$\llll$ Zu je zwei beliebigen Punkten $u < v$ in $[a, b]$ existiert aufgrund des Mittelwertsatzes II ein Punkt $c \in (u, v) \subset (a, b)$ mit

$$f(v) - f(u) = f'(c)(v - u) \geq 0.$$

Ist nun $f' \equiv 0$ auf (a, b) , so folgt hieraus $f(v) = f(u)$ für alle $u < v$ und damit die Konstanz von f . Umgekehrt verschwindet natürlich die Ableitung einer konstanten Funktion überall.

Ist andererseits $f' \geq 0$ auf (a, b) , so folgt hieraus $f(v) - f(u) \geq 0$. Also gilt $f(u) \leq f(v)$ für alle $u < v$, und f ist monoton steigend. Umgekehrt folgt hieraus

$$\frac{f(t) - f(c)}{t - c} \geq 0, \quad t \in [a, b] \setminus \{c\}.$$

Dasselbe gilt dann auch für den Grenzwert $t \rightarrow c$, also $f'(c)$.

Die letzte Behauptung zeigt man analog. $\ggg$

Man beachte, dass die Umkehrung von (iii) *nicht* gilt. Aus der strengen Monotonie folgt *nicht*, dass die Ableitung nirgends verschwindet. So ist die kubische Parabel $t \mapsto t^3$ streng monoton steigend, aber ihre Ableitung $3t^2$ verschwindet bei $t = 0$.

Aus dem Monotoniesatz ergibt sich ein einfaches Kriterium für das Vorliegen einer Extremalstelle.

15 Satz Die Funktion f sei auf dem offenen Intervall I differenzierbar und besitze im Punkt $c \in I$ einen kritischen Punkt.

- (i) Ist f' in einer Umgebung von c streng monoton steigend respektive fallend, so besitzt f in c ein striktes lokales Minimum respektive Maximum.
- (ii) Ist auch f' stetig differenzierbar, so ist $f''(c) < 0$ respektive $f''(c) > 0$ dafür hinreichend. $\times$

$\llll$ Angenommen, es existiert eine Umgebung $U_\delta(c) \subset I$, in der f' streng monoton steigt. Wegen $f'(c) = 0$ gilt dann

$$f'|_{(c-\delta, c)} < 0, \quad f'|_{(c, c+\delta)} > 0.$$

Also ist f auf $(c-\delta, c)$ streng monoton fallend und auf $(c, c+\delta)$ streng monoton steigend. Das aber bedeutet, dass

$$f(c) < f(c+h), \quad 0 < |h| < \delta.$$

Somit liegt bei c ein striktes Minimum.

Die letzte Aussage folgt aus der angenommenen Stetigkeit von f'' und dem Monotoniesatz. >>>>

► **Beispiel** In welchem Verhältnis müssen Höhe h und Radius r einer Konservendose gewählt werden, um bei vorgegebenen Volumen V den Blechbedarf zu minimieren? Höhe und Radius sind durch das Volumen

$$V = \pi r^2 h$$

gekoppelt, die Oberfläche der Konservendose als Funktion des Radius ist daher

$$A(r) = 2\pi r^2 + 2\pi r h = 2\pi r^2 + \frac{2V}{r}.$$

Offensichtlich wird $A(r)$ unbeschränkt für $r \searrow 0$ und $r \nearrow \infty$. Somit muss aus Stetigkeitsgründen ein Minimum auf $(0, \infty)$ angenommen werden. Nach dem Satz von Fermat ist dort notwendigerweise

$$0 = A'(r) = 4\pi r - \frac{2V}{r^2} \quad \Leftrightarrow \quad r^3 = \frac{V}{2\pi}.$$

Da es nur einen einzigen kritischen Punkt gibt, muss dieser die Minimalstelle sein, auch ohne weitere Betrachtung von A' oder A'' . ◀◀

Schließlich erhalten wir noch einen handlichen Satz über Umkehrfunktionen.

- 16 **Satz über differenzierbare Umkehrfunktionen** Ist f in $C^1(I)$ und $f' \neq 0$ auf ganz I , so ist f umkehrbar, die Umkehrfunktion f^{-1} ist auf dem Intervall $f(I)$ ebenfalls C^1 , und es gilt

$$(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}. \quad \times$$

◀◀◀ Da f' auf I stetig ist und nirgends verschwindet, hat f' festes Vorzeichen. Aufgrund des Monotoniesatzes₁₄ ist daher f streng monoton und somit umkehrbar. Aufgrund des Umkehrsatzes₆ ist, da f' nirgends verschwindet, die Umkehrfunktion $g = f^{-1}$ auf $f(I)$ differenzierbar mit Ableitung

$$g' = \frac{1}{f' \circ g}.$$

Diese ist offensichtlich ebenfalls stetig. Somit ist f^{-1} ebenfalls C^1 . >>>>

8.3

Höhere Ableitungen

Ist $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar, so ist die Ableitung $f': I \rightarrow \mathbb{R}$ wieder eine reelle Funktion auf I . Somit kann man fragen, ob f' ebenfalls differenzierbar ist. Ist dies der Fall, so erhält man die *zweite Ableitung* von f ,

$$f'' := (f')': I \rightarrow \mathbb{R}.$$

So kann man fortfahren, so lange die nächste Ableitung ebenfalls differenzierbar ist, und induktiv die höheren Ableitungen von f erklären. Bezeichnen wir die r -te Ableitung mit $f^{(r)}$, so gilt mit $f^{(0)} := f$ also

$$f^{(r)} := (f^{(r-1)})', \quad r \geq 1.$$

Insbesondere ist $f^{(1)} = f'$ und $f^{(2)} = f''$. Andere übliche Bezeichnungen hierfür sind $D^r f$ oder auch $\partial^r f$.

Man sagt, f ist *r -mal differenzierbar*, wenn $f, f', \dots, f^{(r)}$ existieren. Ist außerdem $f^{(r)}$ stetig, so heißt f *r -mal stetig differenzierbar*. Die Klasse dieser Funktionen wird mit $C^r(I)$ bezeichnet, und man sagt, eine Funktion $f \in C^r(I)$ ist eine *C^r -Funktion* oder kurz: *ist C^r* .

Schließlich definiert man noch den Raum der unendlich oft differenzierbaren Funktionen auf I ,

$$C^\infty(I) := \bigcap_{r \geq 0} C^r(I).$$

Man erhält somit eine *Skala* von Funktionenräumen

$$C^\infty(I) \subsetneq \dots \subsetneq C^{r+1}(I) \subsetneq C^r(I) \subsetneq \dots \subsetneq C^1(I) \subsetneq C^0(I).$$

Jede Inklusion ist eine echte Inklusion, denn natürlich gibt es für jedes $r \geq 0$ C^r -Funktionen, die nicht C^{r+1} sind.

- 17 ➤ A. Jede Potenz $t \mapsto t^n$ mit $n \geq 0$ ist unendlich oft differenzierbar, wobei

$$(t^n)^{(r)} = n(n-1) \cdots (n-r+1) t^{n-r} = \frac{n!}{(n-r)!} t^{n-r}, \quad 0 \leq r \leq n,$$

Insbesondere ist $(t^n)^{(n)} = n!$ und $(t^n)^{(r)} \equiv 0$ für alle $r > n$.

B. Jedes Polynom ist unendlich oft differenzierbar. Ist das Polynom p vom Grad n , so ist $p^{(n+1)} \equiv 0$.

C. Die im nächsten Kapitel definierten Funktionen $\exp$, $\sin$ und $\cos$ sind auf $\mathbb{R}$ unendlich oft differenzierbar. Für diese gilt

$$\exp^{(r)} = \exp, \quad r \geq 1,$$

sowie

$$\sin^{(2r+1)} = (-1)^r \cos, \quad \sin^{(2r)} = (-1)^r \sin.$$

D. Die Funktion $t \mapsto t^2 \cos t^{-1}$ ist im Punkt $t = 0$ differenzierbar, aber nicht stetig differenzierbar. $\blacktriangleleft$

Jede Linearkombination von C^r -Funktionen ist wieder eine C^r -Funktion, wie man induktiv mithilfe der Regel

$$(\alpha f + \beta g)' = \alpha f' + \beta g'$$

leicht zeigt. Somit ist $C^r(I)$ ein reeller Vektorraum. Es gilt aber noch mehr.

- 18 Leibnizsche Formel** *Das Produkt zweier Funktionen $f, g \in C^r(I)$ gehört ebenfalls zu $C^r(I)$, und es gilt*

$$(fg)^{(r)} = \sum_{s=0}^r B_s^r f^{(r-s)} g^{(s)}$$

$$\text{mit den Binomialkoeffizienten } B_s^r = \frac{r!}{s!(r-s)!} = \binom{r}{s}. \quad \times$$

Den Beweis übergehen wir, er erfolgt per Induktion wie bei der binomischen Formel. Auch bei der Komposition und der Umkehrung von Funktionen gibt es keine Überraschungen, auch hier übergehen wir die Beweise.

- 19 Satz** *Sei $f \in C^r(I)$ mit $r \geq 1$.*

- (i) *Ist $g \in C^r(J)$ sowie $f(I) \subset J$, so ist $g \circ f$ ebenfalls C^r .*
- (ii) *Verschwindet f' nirgends, so ist f umkehrbar und f^{-1} ebenfalls C^r .* $\times$

$\blacktriangleright$ Differenziert man die erste Ableitung einer Umkehrfunktion $g = f^{-1}$, so erhält man als zweite Ableitung

$$\begin{aligned} g'' &= (-1)(f' \circ g)^{-2} \cdot f'' \circ g \cdot g' \\ &= (-1)(f' \circ g)^{-3} f'' \circ g \\ &= -\frac{f'' \circ g}{(f' \circ g)^3}. \quad \blacktriangleleft \end{aligned}$$

8.4

Die Regeln von l'Hospital

Oft sind sogenannte ›unbestimmte Ausdrücke‹ der Form $0/0$ zu bestimmen, also Grenzwerte wie

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t}, \quad \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 t}{t^2},$$

wo Zähler und Nenner gleichzeitig gegen Null konvergieren. Für diesen Fall gibt es eine nützliche Regel, die auf dem verallgemeinerten Mittelwertsatz basiert.

20 Einfache Regel von l'Hospital Seien $f, g \in C^r(I)$ mit $r \geq 1$, und in einem Punkt $a \in I$ sei

$$f^{(i)}(a) = g^{(i)}(a) = 0, \quad i = 0, \dots, r-1,$$

sowie $g^{(r)}(a) \neq 0$. Dann gilt

$$\lim_{t \rightarrow a} \frac{f(t)}{g(t)} = \frac{f^{(r)}(a)}{g^{(r)}(a)}.$$

Insbesondere existiert der links stehende Grenzwert. ✕

⟨⟨⟨⟨ Betrachte der Einfachheit halber $t > a$. Dann gilt aufgrund des verallgemeinerten Mittelwertsatzes

$$\frac{f(t)}{g(t)} = \frac{f(t) - f(a)}{g(t) - g(a)} = \frac{f'(\tau_1)}{g'(\tau_1)}$$

mit einem $\tau_1 \in (a, t)$. Ist $r > 1$, so fahren wir induktiv fort und erhalten

$$\frac{f(t)}{g(t)} = \dots = \frac{f^{(i)}(\tau_i) - f^{(i)}(a)}{g^{(i)}(\tau_i) - g^{(i)}(a)} = \dots = \frac{f^{(r)}(\tau_r)}{g^{(r)}(\tau_r)}$$

mit $\tau_i \in (a, t)$ für $i = 1, \dots, r$. Mit $t \rightarrow a$ gilt auch $\tau_r \rightarrow a$. Da der Grenzwert auf der rechten Seite existiert, folgt

$$\lim_{t \rightarrow a} \frac{f(t)}{g(t)} = \lim_{\tau \rightarrow a} \frac{f^{(r)}(\tau)}{g^{(r)}(\tau)} = \frac{f^{(r)}(a)}{g^{(r)}(a)}.$$

wie behauptet. ⟩⟩⟩⟩

➤ A. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x^2 + x - 2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x}{2x + 1} = \frac{2}{3}$ und $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\cos t}{1} = 1.$

B. Für $f \in C^1(I)$ gilt in jedem Punkt $a \in I$

$$\lim_{t \rightarrow a} \frac{f(t) - f(a)}{t - a} = \lim_{t \rightarrow a} \frac{f'(t)}{1} = f'(a).$$

C. Gelegentlich kann und muss man die Regel mehrfach anwenden:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - x^2 - x + 1}{x^3 - 3x + 2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - 2x - 1}{3x^2 - 3} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{6x - 2}{6x} = \frac{2}{3}.$$

- A. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - x^2 - x + 1}{x^3 - 3x + 2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - 2x - 1}{3x^2 - 3} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{6x - 2}{6x} = \frac{2}{3}.$
- B. $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 t}{t^2} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t \cos t}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\cos^2 t - \sin^2 t}{1} = 1.$
- C. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - 2f(a) + f(a-h)}{h^2} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(a+h) - f'(a-h)}{2h} = f''(a). \quad \blacktriangleleft$

■ Der allgemeine Fall

Oft handelt es sich bei a um einen Randpunkt eines Definitionsintervalls, in dem f' und g' nicht definiert sind. Auch ist der Fall eines uneigentlichen Randpunktes bei ∞ oder $-\infty$ von Interesse, sowie unbestimmte Ausdrücke der Form ∞/∞ . Auf alle diese Fälle lässt sich die Regel von l'Hospital verallgemeinern. Der Beweis ist etwas technisch und kann beim ersten Lesen übergangen werden.

21 Regel von l'Hospital Es seien $f, g \in C^1(I)$. Ist a ein Randpunkt von I mit

$$\lim_{t \rightarrow a} f(t) = \lim_{t \rightarrow a} g(t) = 0 \quad \text{oder} \quad \lim_{t \rightarrow a} g(t) = \pm\infty,$$

und ist $g' \neq 0$ in einer punktierten Umgebung von a , so gilt

$$\lim_{t \rightarrow a} \frac{f(t)}{g(t)} = \lim_{t \rightarrow a} \frac{f'(t)}{g'(t)}, \quad (5)$$

falls der zweite Grenzwert auf der erweiterten Zahlengerade existiert. $\times$

⟨⟨⟨⟨ Sei

$$\lambda = \lim_{t \rightarrow a} \frac{f'(t)}{g'(t)}. \quad (6)$$

Wir zeigen, dass im Fall $\lambda < \infty$ zu jedem $\lambda^+ > \lambda$ ein Intervall $I_\delta = \dot{U}_\delta(a) \cap I$ existiert, so dass

$$\frac{f(t)}{g(t)} \leq \lambda^+, \quad t \in I_\delta. \quad (7)$$

Analog zeigt man im Fall $\lambda > -\infty$, dass zu jedem $\lambda^- < \lambda$ ein ähnliches Intervall J_δ existiert, so dass

$$\frac{f(t)}{g(t)} \geq \lambda^-, \quad t \in J_\delta.$$

Beides zusammen ergibt die Behauptung (5).

Sei also $\lambda < \lambda^+ < \infty$. Da der Grenzwert in Gleichung (6) existiert, gibt es ein $\varepsilon > 0$ und ein Intervall $I_\delta = \dot{U}_\delta(a) \cap I$ so, dass

$$\frac{f'(t)}{g'(t)} \leq \lambda^+ - \varepsilon, \quad t \in I_\delta.$$

Mit dem verallgemeinerten Mittelwertsatz folgt hieraus

$$\frac{f(t) - f(s)}{g(t) - g(s)} = \frac{f'(u)}{g'(u)} \leq \lambda^+ - \varepsilon, \quad s, t \in I_\delta, \quad (8)$$

mit einem von s und t abhängenden $u \in I_\delta$.

Gilt jetzt

$$\lim_{t \rightarrow a} f(t) = \lim_{t \rightarrow a} g(t) = 0,$$

so folgt mit $s \rightarrow a$ hieraus (7), und wir sind fertig.

Gilt dagegen beispielsweise $\lim_{t \rightarrow a} g(t) = \infty$, so schreiben wir zuerst

$$\frac{f(t)}{g(t)} = \frac{f(t) - f(s)}{g(t) - g(s)} \frac{g(t) - g(s)}{g(t)} + \frac{f(s)}{g(t)}.$$

Für irgendein festes $s \in I_\delta$ und t hinreichend nahe bei a ist $g(t) - g(s) > 0$, so dass mit (8)

$$\frac{f(t)}{g(t)} \leq (\lambda^+ - \varepsilon) \frac{g(t) - g(s)}{g(t)} + \frac{f(s)}{g(t)}, \quad t \in I_\theta,$$

auf einem hinreichend kleinen Intervall $I_\theta \subset I_\delta$. Für $t \rightarrow a$ konvergiert die rechte Seite gegen $\lambda^+ - \varepsilon$. Wählen wir also I_θ nochmal kleiner, so gilt auch

$$\frac{f(t)}{g(t)} \leq \lambda^+, \quad t \in I_\theta,$$

und damit wieder (7). Der Fall $\lim_{t \rightarrow a} g(t) = -\infty$ geht genauso. $\gggg$

Bemerkung Der Beweis gilt für den Fall $t \rightarrow a$ und $t \rightarrow \pm\infty$ als auch für den Fall, dass es sich in (5) um einen uneigentlichen Grenzwert handelt. $\rightarrow$

► A. $\lim_{t \rightarrow \infty} t^2 e^{-t} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t^2}{e^t} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{2t}{e^t} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{2}{e^t} = 0.$

B. Ganz allgemein gilt $\lim_{t \rightarrow \infty} t^m e^{-t} = 0$ für $m \geq 0$.

C. $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\log t}{t} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1/t}{1} = 0.$

Andere unbestimmte Ausdrücke wie $0 \cdot \infty$ und $\infty - \infty$ lassen sich oft in eine Form bringen, auf die die Regel von l'Hospital angewendet werden kann:

D. $\lim_{t \rightarrow 0} (t \log t) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\log t}{1/t} = -\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1/t}{1/t^2} = -\lim_{t \rightarrow 0} t = 0.$

E. $\lim_{t \rightarrow \infty} t \log \left(1 + \frac{1}{t}\right) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\log(1+s)}{s} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1/(1+s)}{1} = 1.$

F. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \exp \left(n \log \left(1 + \frac{1}{n}\right)\right) = e^1 = e. \quad \blacktriangleleft$

8.5

Taylorpolynom und Taylorreihe

Sei f eine reelle Funktion auf einem Intervall I und $a \in I$. Die *Stetigkeit* von f im Punkt a können wir auffassen als lokale Approximierbarkeit von f durch eine *konstante* Funktion, denn es gilt

$$f(t) = f(a) + \varepsilon(t)$$

mit einer in a stetigen und dort verschwindenden Funktion ε . Die *Differenzierbarkeit* von f in a ist gleichbedeutend mit der lokalen Approximierbarkeit durch eine *lineare* Funktion, denn

$$f(t) = f(a) + f'(a)(t - a) + \varepsilon(t)(t - a)$$

wiederum mit einer in a stetigen und dort verschwindenden Funktion ε_1 . Man kann daher fragen, ob sich eine Funktion lokal auch durch *Polynome höherer Ordnung* so approximieren lässt, dass

$$f(t) = f(a) + \sum_{k=1}^n a_k(t - a)^k + \varepsilon(t)(t - a)^n$$

mit einer im Punkt a stetigen und dort verschwindenden Funktion ε .

Ist ε hinreichend oft differenzierbar, so sind die Koeffizienten a_k eindeutig bestimmt. Denn dann gilt ¹⁸

$$\partial^k(\varepsilon(t)(t - a)^n) \Big|_{t=a} = 0, \quad 0 \leq k \leq n.$$

Daraus folgt

$$f^{(k)}(a) = \partial^k(f(t)) \Big|_{t=a} = \sum_{l=1}^n a_l \partial^k(t - a)^l \Big|_{t=a} = k! a_k, \quad 1 \leq k \leq n.$$

Wir erhalten also

$$a_k = \frac{1}{k!} f^{(k)}(a), \quad 1 \leq k \leq n.$$

Dies nehmen wir zum Anlass für folgende Definition.

Definition Für $f \in C^n(I)$ und $a \in I$ heißt

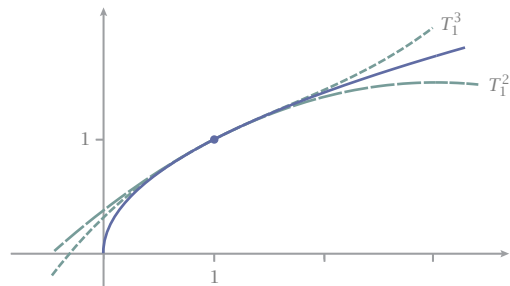
$$T_a^n f(t) := \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (t - a)^k$$

das n -te *Taylorpolynom* von f im *Entwicklungspunkt* a . $\times$

Insbesondere ist

Abb 9

Taylorpolynome zu
 $\sqrt{1+t}$ im Punkt 1



$$T_a^0 f(t) = f(a),$$

$$T_a^1 f(t) = f(a) + f'(a)(t-a)$$

$$T_a^2 f(t) = f(a) + f'(a)(t-a) + \frac{f''(a)}{2}(t-a)^2.$$

Schreibt man $t = a + h$ mit einem ›kleinen‹ h , so lautet das n -te Taylorpolynom

$$T_a^n f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \frac{f''(a)}{2}h^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}h^n.$$

► **Beispiele** A. Für $f: t \mapsto \sqrt{1+t}$ und $a = 0$ ist

$$T_0^2 f(t) = 1 + \frac{t}{2} - \frac{t^2}{4}.$$

B. Für das Polynom $p: t \mapsto (1+t)^n$ erhalten wir

$$T_0^n p(t) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} t^k$$

denn

$$\frac{p^{(k)}(0)}{k!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}.$$

Aufgrund der binomischen Formel 3.33 gilt also $T_0^n p = p$. Entwickeln wir dagegen p an einer anderen Stelle $a \neq 0$, so erhalten wir ein Polynom n -ter Ordnung in $(t-a)$ mit anderen Koeffizienten. ◀◀

■ Restgliedformel

Das Taylorpolynom allein sagt wenig aus, solange man nicht weiß, wie gut es die Funktion selbst approximiert. Wir müssen also den Approximationsfehler, das sogenannte *Restglied*

$$R_a^n f(t) = f(t) - T_a^n f(t)$$

kontrollieren. Dies leistet der folgende Satz.

- 22 **Satz von Taylor mit Restglied von Lagrange** Sei $f \in C^{n+1}(I)$ und $a \in I$. Dann existiert zu jedem $t \in I$ ein s zwischen a und t , so dass

$$R_a^n f(t) = f(t) - T_a^n f(t) = \frac{f^{(n+1)}(s)}{(n+1)!} (t-a)^{n+1}. \quad \times$$

⟨⟨⟨⟨ Betrachte

$$R(t) = f(t) - T_a^n(t), \quad S(t) = (t-a)^{n+1}.$$

Alle Ableitungen von R und S im Punkt a bis zur Ordnung n verschwinden:

$$R^{(k)}(a) = S^{(k)}(a) = 0, \quad 0 \leq k \leq n,$$

während $S^{(n+1)} = (n+1)! \neq 0$. Durch n -fache Anwendung des allgemeinen Mittelwertsatzes₁₂ erhalten wir

$$\begin{aligned} \frac{R(t)}{S(t)} &= \frac{R(t) - R(a)}{S(t) - S(a)} = \frac{R'(\tau_1)}{S'(\tau_1)} \\ &= \frac{R'(\tau_1) - R'(a)}{S'(\tau_1) - S'(a)} = \frac{R''(\tau_2)}{S''(\tau_2)} = \dots \\ &= \frac{R^{(n+1)}(\tau_{n+1})}{S^{(n+1)}(\tau_{n+1})} = \frac{f^{(n+1)}(s)}{(n+1)!}. \end{aligned}$$

mit $s = \tau_{n+1}$. Dies ist äquivalent zur Behauptung. ⟩⟩⟩⟩

Eine Funktion $f \in C^{n+1}(I)$ kann man also lokal durch sein Taylorpolynom vom Grad n so approximieren, dass

$$f(a+h) = T_a^n f(a+h) + O(h^{n+1}).$$

Hierbei steht der ›groß-O-Ausdruck‹ für eine beliebige Funktion ϕ mit der Eigenschaft, dass

$$\sup_{0 < |h| < r} \frac{|\phi(h)|}{|h|^{n+1}} < \infty$$

für ein $r > 0$. Diese Information ist für viele Zwecke bereits völlig ausreichend.

► **Beispiel** Die Bewegungsgleichung eines Oszillators mit Masse m ist gegeben durch

$$m\ddot{x} = F(x),$$

wobei der Punkt die Ableitung nach der Zeit, x die Auslenkung aus der Ruhelage bei $x = 0$ und F die dort wirkende Rückstellkraft bezeichnen. Es gilt also $F(0) = 0$, und Entwickeln bei 0 ergibt

$$F(x) = F(0) + F'(0)x + O(x^2) = -\omega^2 x + O(x^2)$$

mit einer gewissen Konstanten $\omega^2 > 0$. Das Minuszeichen tritt auf, da die Kraft entgegengesetzt zur Auslenkung wirkt. Für kleine Auslenkungen kann man in erster Näherung den quadratischen Term vernachlässigen, und erhält die Bewegungsgleichung

$$m\ddot{x} = -\omega^2 x$$

für den harmonischen Oszillator. ◀

► **Beispiel** Die kinetische Energie eines relativistischen Teilchens mit Ruhemasse m_0 und Geschwindigkeit v ist

$$E_{\text{rel}} = m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} - 1 \right),$$

wobei c die Lichtgeschwindigkeit bezeichnet. Für die Funktion f mit

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{1-t}} = (1-t)^{-1/2}, \quad |t| < 1,$$

finden wir

$$f(t) = 1 + \frac{1}{2}t + \frac{3}{8}t^2 + O(t^3).$$

Somit erhalten wir mit $u = v^2/c^2$ näherungsweise

$$E_{\text{rel}} = m_0 c^2 \left(\frac{1}{2}u + \frac{3}{8}u^2 \right) = \frac{1}{2}m_0 v^2 + \frac{3}{8}m_0 \frac{v^4}{c^2}. \quad \blacktriangleleft$$

■ Taylorreihe

Ist f beliebig oft differenzierbar, so können wir Taylorpolynome jeder Ordnung bilden. Dies führt zum Begriff der *Taylorreihe*.

Definition Für $f \in C^\infty(I)$ und $a \in I$ heißt

$$T_a f(t) := T_a^\infty f(t) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} f^{(k)}(a) (t-a)^k$$

die *Taylorreihe von f am Entwicklungspunkt a* . ✕

Die Taylorreihe $T_a f$ konvergiert immer im Entwicklungspunkt a selbst und hat dort den Wert $f(a)$. Das ist trivial. Eine ganz andere Frage ist, ob sie auch in anderen Punkten konvergiert, und ob ihr Wert dort mit der Funktion selbst übereinstimmt.

Definition Konvergiert die Taylorreihe in einer Umgebung von a und gilt dort $T_a f = f$, so heißt f *um a entwickelbar in seine Taylorreihe*. ✕

Im Falle der Konvergenz der Taylorreihe im Punkt t gilt also

$$0 = f(t) - T_a f(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} (f(t) - T_a^n f(t)) = \lim_{n \rightarrow \infty} R_a^n f(t).$$

Somit erhalten wir sofort folgendes

23 Entwicklungskriterium Es gilt $f(t) = T_a f(t)$ genau dann, wenn

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_a^n f(t) = 0. \quad \times$$

Dies muss man nun für die jeweilige Funktion nachprüfen, so wie man auch die Konvergenz einer Reihe in jedem Fall einzeln prüfen muss. Ein einfaches Allzweckkriterium gibt es nicht. Als Beispiel betrachten wir die binomische Formel für beliebige reelle Exponenten. Wir greifen dabei der Definition von t^α für reelle α _{9.2} und der verallgemeinerten Ableitungsregel ?? vor.

24 Binomische Reihe für reelle Exponenten Für jedes $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt

$$(1+t)^\alpha = 1 + \sum_{k \geq 1} B_k^\alpha t^k, \quad |t| < 1,$$

mit den *allgemeinen Binomialkoeffizienten*

$$B_k^\alpha := \frac{\alpha \cdot (\alpha - 1) \cdots (\alpha - k + 1)}{1 \cdot 2 \cdots k}, \quad k \geq 1. \quad \times$$

Man beachte, dass die Identität nur für $|t| < 1$ gilt, während die Funktion selbst für alle $t > -1$ erklärt ist.

⟨⟨⟨ Die Funktion $f: t \mapsto (1+t)^\alpha$ ist auf $(-1, \infty)$ unendlich oft differenzierbar mit

$$f^{(k)}(t) = \alpha(\alpha-1) \cdots (\alpha-k+1) (1+t)^{\alpha-k}.$$

Also ist

$$\frac{f^{(k)}(0)}{k!} = \frac{\alpha(\alpha-1) \cdots (\alpha-k+1)}{1 \cdot 2 \cdots k} = B_k^\alpha.$$

Für das Restglied erhalten wir mit $a = 0$ und $0 < t < 1$ die Abschätzung

$$|R_0^{n-1} f(t)| = |B_n^\alpha| \frac{t^n}{(1+t)^{n-\alpha}} \leq |B_n^\alpha| t^n,$$

und es ist nicht schwer zu zeigen, dass dies für $n \rightarrow \infty$ verschwindet. ⟩⟩⟩

► *Beispiele* A. Für natürliche Exponenten $\alpha = n$ erhalten wir wieder die klassische binomische Formel _{3.33}, denn $B_k^n = 0$ für $k > n$.

B. Für $\alpha = -1$ ist $B_k^\alpha = (-1)^k$ und somit

$$\frac{1}{1+t} = 1 + \sum_{k \geq 1} (-1)^k t^k = 1 - t + t^2 - t^3 \pm \dots, \quad |t| < 1.$$

Also gilt auch

$$\frac{1}{1-t} = 1 + \sum_{k \geq 1} t^k = 1 + t + t^2 + \dots, \quad |t| < 1,$$

wie es sich für die geometrische Reihe auch gehört.

c. Für $\alpha = 1/2$ erhalten wir

$$\sqrt{1+t} = 1 + \sum_{k \geq 1} b_k t^k = 1 + \frac{1}{2}t - \frac{1}{8}t^2 + \frac{1}{16}t^3 - \frac{5}{128}t^4 \pm \dots$$

mit

$$b_k = \frac{(-1)^k}{2^k} \frac{(-1) \cdot 1 \cdot 3 \cdots (2k-3)}{1 \cdot 2 \cdots k}. \quad \triangleleft$$

Funktionen in $C^\infty(I)$, die sich in jedem Punkt in ihre Taylorreihe entwickeln lassen, heißen *reell analytisch*. Ihre Klasse wird mit $C^\omega(I)$ bezeichnet. Diese Funktionen können also lokal immer durch eine Potenzreihe dargestellt werden. Dies gilt aber nicht für jede Funktion in $C^\infty(I)$! Selbst wenn die Taylorreihe einer Funktion in einer Umgebung des Entwicklungspunktes konvergiert, so bedeutet dies keineswegs, dass sie auch die Funktion darstellt. Das klassische Beispiel hierfür geben wir in Abschnitt ??.

8.6

Noch einmal Potenzreihen

Offen ist auch noch die Frage, ob eine Potenzreihe selbst innerhalb ihres Konvergenzbereichs eine analytische Funktion definiert. Dies ist tatsächlich der Fall. Die Grundlage dafür bildet der folgende Satz.

25 Jede Potenzreihe

$$\phi(t) = \sum_{n \geq 0} a_n (t-a)^n$$

definiert im Innern ihres Konvergenzintervalls eine differenzierbare Funktion, deren Ableitung man durch gliedweises Differenzieren erhält:

$$\phi'(t) = \sum_{n \geq 1} n a_n (t-a)^{n-1}.$$

Diese Reihe hat denselben Konvergenzradius wie ϕ . $\times$

⟨⟨⟨⟨ Sei der Einfachheit halber $a = 0$. Wie im Fall der Potenzreihe selbst ^{6.17} zeigt man, dass die ϕ' -Reihe für $|t| < |t_0|$ konvergiert, wenn die ϕ -Reihe im

Punkt t_0 konvergiert, und umgekehrt. Daher haben beide Reihen denselben Konvergenzradius ρ_{A-42} .

Für den Differenzenquotienten erhalten wir mit dem Mittelwertsatz ¹¹

$$\frac{\phi(t+h) - \phi(t)}{h} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{(t+h)^n - t^n}{h} = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n s_n^{n-1}$$

mit Punkten $(s_n)_{n \geq 1}$ zwischen t und $t+h$. Mit

$$\psi(t) = \sum_{n \geq 1} n a_n t^{n-1}$$

erhalten wir also

$$\begin{aligned} \left| \frac{\phi(t+h) - \phi(t)}{h} - \psi(t) \right| &= \left| \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (s_n^{n-1} - t^{n-1}) \right| \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} n |a_n| |s_n^{n-1} - t^{n-1}|. \end{aligned}$$

Für t und $t+h$ in einem abgeschlossenen Konvergenzintervall wird die zweite Summe beliebig klein, indem man N groß genug wählt. Anschließend wird die erste Summe beliebig klein, indem man h klein genug wählt. Daher gilt

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\phi(t+h) - \phi(t)}{h} = \psi(t).$$

Also ist ϕ im Punkt t differenzierbar, und es ist $\phi'(t) = \psi(t)$. $\gggg$

Da der Konvergenzradius einer Reihe unter Differenziation derselbe bleibt, können wir diesen Vorgang beliebig oft wiederholen.

26 Potenzreihensatz Eine Potenzreihe

$$\phi(t) = \sum_{n \geq 0} a_n (t-a)^n$$

mit positivem Konvergenzradius definiert im Innern ihres Konvergenzintervalles I eine analytische Funktion ϕ , deren Taylorreihe im Punkt a die Potenzreihe selbst ist:

$$T_a \phi = \phi. \quad \times$$

$\llll$ Aus dem vorangehenden Satz folgt durch Induktion, dass diese Potenzreihe im Innern ihres Konvergenzintervalls beliebig oft differenzierbar ist, mit

$$\phi^{(k)}(t) = \sum_{n \geq k} n(n-1) \cdots (n-k+1) a_n (t-a)^{n-k}, \quad k \geq 0.$$

Also ist $\phi^{(k)}(a) = k! a_k$ für alle $k \geq 0$ und damit

$$T_a \phi(t) = \sum_{k \geq 0} \frac{\phi^{(k)}(a)}{k!} (t-a)^k = \sum_{k \geq 0} a_k (t-a)^k = \phi(t). \quad \gggg$$

Im nächsten Kapitel werden wir mithilfe von Potenzreihen einige der wichtigsten Funktionen der Analysis definieren.

8.7

Nachtrag zu Reihen: Potenzreihen

Eine Reihe der Gestalt

$$\sum_{n \geq 0} a_n (z - a)^n$$

mit komplexen Koeffizienten und Variable heißt *komplexe Potenzreihe* um den *Entwicklungspunkt* a . Sind Koeffizienten wie auch Variable reell, so spricht man von einer *reellen Potenzreihe*. Die Theorie für beide Arten von Potenzreihen ist jedoch exakt dieselbe. Wir betrachten daher von vornherein den komplexen Fall und sprechen einfach von *Potenzreihen*.

Bei Potenzreihen stellt sich die Frage der Konvergenz der Reihe eigentlich für jedes einzelne Argument. Tatsächlich sind die Verhältnisse relativ einfach.

27 **Lemma** Konvergiert die Potenzreihe

$$\phi(z) = \sum_{n \geq 0} a_n (z - a)^n$$

in einem Punkt $z_0 \in \mathbb{C}$, so konvergiert sie absolut und gleichmäßig auf jeder abgeschlossenen Kreisscheibe

$$\bar{D}_r(a) := \{z \in \mathbb{C} : |z - a| \leq r\}, \quad 0 < r < r_0 := |z_0 - a|.$$

Genauer gibt es eine Konstante $M > 0$, so dass

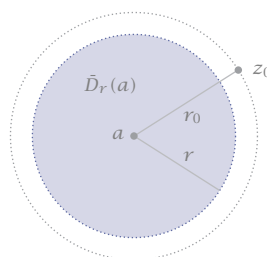
$$\sup_{z \in \bar{D}_r(a)} \left| \sum_{n \geq N} a_n (z - a)^n \right| \leq M \frac{\delta^N}{1 - \delta}, \quad \delta = \frac{r}{r_0} < 1. \quad \times$$

⟨⟨⟨ Konvergiert ϕ im Punkt z_0 , so bilden die Koeffizienten von $\phi(z_0)$ eine Nullfolge, und es gilt

$$\sup_{n \geq 0} |a_n (z_0 - a)^n| =: M < \infty,$$

Abb 10

Absolute und gleichmäßige Konvergenz auf $\bar{D}_r(a)$



oder $|a_n| \leq M/r_0^n$ für $n \geq 0$ mit $r_0 = |z_0 - a|$. Für jedes $z \in \bar{D}_r(a)$ gilt dann

$$|a_n(z - a)^n| \leq |a_n| r^n \leq M \left(\frac{r}{r_0}\right)^n = M\delta^n$$

mit $\delta = r/r_0$, also 6.1

$$\sum_{n \geq N} |a_n| |z - a|^n \leq M \sum_{n \geq N} \delta^n = M \frac{\delta^N}{1 - \delta}.$$

Damit ist alles gezeigt. $\gggg$

Dieses Lemma beinhaltet auch folgende Umkehrung. *Divergiert* die Potenzreihe in einem Punkt z_0 , so divergiert sie auch in jedem anderen Punkt z mit $|z - a| > |z_0 - a|$. Denn konvergierte sie in z , so müsste sie ja auch in z_0 konvergieren. Daher besitzt jede Potenzreihe einen eindeutigen *Konvergenzradius*:

28 Konvergenzsatze für Potenzreihen Zu jeder Potenzreihe

$$\phi(z) = \sum_{n \geq 0} a_n (z - a)^n \quad (9)$$

existiert ein eindeutig bestimmtes $R \in [0, \infty]$ derart, dass sie auf jeder abgeschlossenen Kreisscheibe $\bar{D}_r(a)$ mit $0 < r < R$ absolut und gleichmäßig konvergiert und in jedem Punkt z mit $|z - a| > R$ divergiert. Diese Zahl R heißt der *Konvergenzradius* von ϕ im Punkt a . $\times$

$\llll$ Die Menge

$$K = \{z \in \mathbb{C} : \phi(z) \text{ ist konvergent}\}$$

enthält immer den Punkt a , ist also nicht leer. Somit ist

$$R = \sup \{|z - a| : z \in K\}$$

ein wohldefiniertes Element von $[0, \infty]$. Für dieses R folgen die Behauptungen mit dem vorangehenden Lemma. $\gggg$

Damit gilt Folgendes für den Konvergenzradius R von (9).

- (i) Im Fall $R = 0$ divergiert ϕ für jedes $z \neq a$.
- (ii) Im Fall $R = \infty$ konvergiert ϕ für jedes $z \in \mathbb{C}$.
- (iii) Im Fall $0 < R < \infty$ konvergiert ϕ in jedem Punkt z innerhalb des *Konvergenzkreises* $D_R(a)$ und divergiert in jedem Punkt außerhalb.

Über Konvergenz oder Divergenz in Punkten auf dem Rand $\partial D_R(a)$ des Konvergenzkreises lässt sich ohne weitere Annahmen allerdings *nichts sagen*. Dort kann das Verhalten sogar außerordentlich »wild« sein.

Es gilt übrigens folgende Formel, die wir allerdings nicht benötigen und deren Beweis wir als Übung überlassen $\Delta??$.

29 **Formel von Hadamard** Für den Konvergenzradius einer Potenzreihe (9) gilt

$$R = \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}},$$

wobei vereinbarungsgemäß $1/0 = \infty$ und $1/\infty = 0$. ✕

Viele wichtige Funktionen der Mathematik werden durch Potenzreihen beschrieben. Hier sind drei Beispiele, die allgemeine Theorie der sogenannten *analytischen Funktionen* folgt später.

30 ➤ **Beispiele** A. Die *Exponentialfunktion* wird durch die Exponentialreihe

$$\exp z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots$$

beschrieben. Ihr Konvergenzradius ist $R = \infty$.

B. Die komplexe *Sinus-* und *Cosinusfunktion* werden durch

$$\sin z = \sum_{n \geq 0} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} \mp \dots$$

und

$$\cos z = \sum_{n \geq 0} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} \mp \dots$$

beschrieben. Ihr Konvergenzradius ist ebenfalls $R = \infty$.

Wer übrigens bei Betrachtung der letzten drei Reihen den Eindruck hat, dass $\exp$, $\sin$ und $\cos$ irgendwie miteinander zusammenhängen, wird sich bald bestätigt fühlen ?? ◀